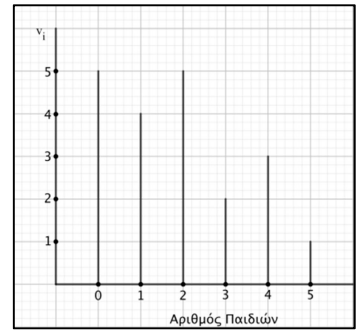


2.3 Μέτρα θέσης και διασποράς

1. Στο διπλανό διάγραμμα συχνοτήτων φαίνεται ο αριθμός των παιδιών (οριζόντιος άξονας) είκοσι (20) οικογενειών.



- α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.
 β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του αριθμού των παιδιών των 20 οικογενειών.
 γ) Ποιο είναι το πλήθος των οικογενειών με τουλάχιστον 3 παιδιά;

Αριθμός Παιδιών x_i	Αριθμός Οικογενειών v_i	$x_i \cdot v_i$
0		
1		
2		
3	2	6
4		
5		
Σύνολο	$v = 20$	

2. Οι βαθμοί των γραπτών δοκιμασιών στο μάθημα των μαθηματικών ενός μαθητή για το Α' τετράμηνο είναι 16,18,18,12,16,10, και αποτελούν τις τιμές ενός δείγματος. Αν η μέση τιμή των βαθμών είναι $\bar{x} = 15$ και η τιμή της διασποράς $s^2 = 9$.
- α) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση s και τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος των βαθμών.
 β) Να βρείτε τη διάμεσο δ του δείγματος.
 γ) Οι βαθμοί των γραπτών δοκιμασιών στο μάθημα των μαθηματικών του μαθητή για το Β' τετράμηνο αυξήθηκαν όλοι κατά δύο μονάδες. Να υπολογίσετε την νέα μέση τιμή των βαθμών του Β' τετράμηνου.
3. Οι βαθμοί των γραπτών δοκιμασιών στο μάθημα των μαθηματικών ενός μαθητή είναι 14,18,20,14,12,12, και αποτελούν τις τιμές ενός δείγματος. Η τυπική απόκλιση του δείγματος είναι $s = 3$.
- α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του παραπάνω δείγματος βαθμών.
 β) Να βρείτε τη διάμεσο δ και το εύρος R του δείγματος.
 γ) Αν $\bar{x} = 15$, να υπολογίσετε την τιμή του συντελεστή μεταβολής CV.
4. Κατάστημα υποδημάτων κατέγραψε στον παρακάτω πίνακα κατανομής συχνοτήτων τις πωλήσεις σε ένα μήνα ενός σχεδίου γυναικείου παπουτσιού ανάλογα με το νούμερό του. Για την κατανομή αυτή:

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα σχετικών συχνοτήτων.

Νούμερο x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
36	8		
37	12		
38	20		
39	10		
Σύνολο			

β) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων v_i .

5. Βιοτεχνία θέλει να προμηθευτεί κουτιά συσκευασίας για τα 100 προϊόντα που παρήγαγε σε μια εβδομάδα, τα οποία μοίρασε σε τέσσερις κλάσεις ανάλογα με τον όγκο της συσκευασίας σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

Όγκος (cm^3) [-)	v_i	f_i	$f_i\%$
50-60	20		
60-70	10		
70-80	40		
80-90	30		
Σύνολο	100		

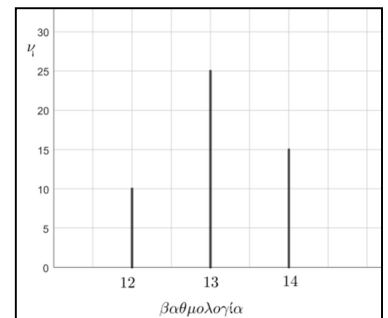
α) Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα κατανομής σχετικών συχνοτήτων.

β) Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων v_i και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής.

6. Στο παρακάτω διάγραμμα συχνοτήτων παρουσιάζονται οι βαθμολογίες 50 μαθητών σε μια γραπτή δοκιμασία.

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων.

β) Να βρείτε την μέση τιμή \bar{x} της κατανομής της βαθμολογίας των μαθητών.



Βαθμολογία x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
12			
13			
14			
Σύνολο			

7. Σε μία έρευνα, για ένα δείγμα 20 οικογενειών που επιλέχθηκαν, καταγράφηκε ο αριθμός των παιδιών της κάθε οικογένειας, όπως φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

Αριθμός παιδιών x_i	Πλήθος οικογενειών v_i
0	1
1	5
2	9
3	3
4	2
ΣΥΝΟΛΟ	20

- α) Να βρείτε τη διάμεσο του αριθμού των παιδιών.
 β) Να συμπληρώσετε την τρίτη στήλη του παρακάτω πίνακα.
 γ) Να βρείτε τη μέση τιμή του αριθμού των παιδιών για το δείγμα που επιλέχτηκε.

Αριθμός παιδιών x_i	Πλήθος οικογενειών v_i	$x_i \cdot v_i$
0	1	
1	5	
2	9	
3	3	
4	2	
ΣΥΝΟΛΟ	20	

8. Οι εισπράξεις σε χιλιάδες ευρώ ενός δείγματος δέκα καταστημάτων σε ένα εμπορικό κέντρο κατά το μήνα Απρίλιο του 2023 ήταν:

50, 15, 15, 20, 15, 30, 15, 20, 50, 50.

- α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή \bar{x} των εισπράξεων.
 β) Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία του.

Εισπράξεις (σε χιλ. ευρώ) x_i	Συχνότητα v_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
15				
20				
30				
50				
Σύνολο				

- γ) Θεωρώντας γνωστό ότι για τη διακύμανση ισχύει ο τύπος $s^2 = \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$, να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 των εισπράξεων.

9. Δίνονται οι αριθμοί: 2, 3, 4, 6, 10.

- α) Να βρεθεί η μέση τιμή τους.
 β) Να δείξετε ότι η διασπορά τους είναι $s^2 = 8$.

γ) Να βρείτε την τυπική απόκλιση, του παραπάνω δείγματος των πέντε αριθμών.

10. Ένα ξενοδοχείο του Ναυπλίου διαθέτει 15 δωμάτια. Στο διπλανό πίνακα, καταγράφηκε ο αριθμός των κρεβατιών ανά δωμάτιο, καθώς και ο αριθμός των δωματίων που τα έχουν.

Να βρείτε:

- α) τη διάμεσο του αριθμού των κρεβατιών ανά δωμάτιο.
β) το συνολικό αριθμό των κρεβατιών του ξενοδοχείου.
γ) τη μέση τιμή του αριθμού των κρεβατιών ανά δωμάτιο.

Αριθμός κρεβατιών x_i	Αριθμός δωματίων v_i
1	1
2	2
3	8
4	4
ΣΥΝΟΛΟ	15

11. Η μέση τιμή του βάρους έξι μαθητών της Γ' Λυκείου είναι 72 κιλά.
α) Να δείξετε ότι το άθροισμα του βάρους των έξι μαθητών είναι 432 κιλά.
β) Στην ομάδα των έξι μαθητών προστίθενται άλλοι δύο, με βάρος 77 και 83 κιλά αντίστοιχα. Να βρείτε:
i. το άθροισμα των βαρών των οκτώ μαθητών.
ii. τη μέση τιμή του βάρους των οκτώ μαθητών.

12. Οι βαθμοί που έγραψε στα πέντε τεστ του 1ου τετραμήνου, για το μάθημα των Μαθηματικών, ένας μαθητής της Γ' Λυκείου είναι: 12, 14, 8, 20, 16.

- α) Να βρείτε τη μέση τιμή \bar{x} της βαθμολογίας του μαθητή, για τα πέντε τεστ.
β) i. Να συμπληρώσετε τα κενά στον παρακάτω πίνακα.

Βαθμός x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
12		
14		
8		
20		
16		
ΣΥΝΟΛΟ		

- ii. Αξιοποιώντας τον συμπληρωμένο πίνακα του ερωτήματος β) i. , να βρείτε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση, της βαθμολογίας του μαθητή για τα πέντε τεστ.

13. Η κατανομή των ηλικιών των νέων κατασκηνωτών ενός κάμπινγκ της Αμοργού, είναι περίπου κανονική με μέση τιμή $\bar{x} = 25$ έτη και συντελεστή μεταβολής $CV = 0,08$.

α) Να βρεθεί η τυπική απόκλιση της κατανομής.

β) Να βρεθεί το εύρος των ηλικιών της κατανομής.

γ) Αν γνωρίζουμε ότι 200 είναι όλοι οι κατασκηνωτές του κάμπινγκ, να βρείτε πόσοι από αυτούς έχουν ηλικία μικρότερη από τα 25 έτη.

14. Οι υπάλληλοι μιας μεγάλης εταιρείας πετρελαιοειδών, χρησιμοποιούν το καφέ και το εστιατόριο της εταιρείας καθημερινά. Αν τα χρήματα που ξοδεύουν ακολουθούν περίπου κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x} = 10$ ευρώ και συντελεστή μεταβολής $CV = 0,2$ τότε:
- α) να δείξετε ότι η τυπική απόκλιση της κατανομής των χρημάτων που ξοδεύουν οι υπάλληλοι της εταιρείας καθημερινά, είναι $s = 2$ ευρώ,
- β) i. να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων της εταιρείας που ξοδεύει καθημερινά το πολύ 10 ευρώ,
ii. να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων της εταιρείας που ξοδεύει καθημερινά περισσότερα από 14 ευρώ.
15. Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές x_i , $i = 1, 2, 3, 4$ μιας μεταβλητής X με τις αντίστοιχες συχνότητες τους v_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

x_i	v_i
1	1
2	2
3	1
4	4

Να αποδείξετε ότι:

- α) Η μέση τιμή \bar{x} ισούται με 3.
β) Η διάμεσος δ ισούται με 3,5.
16. Ένα δείγμα εργαζομένων μιας εταιρείας εξετάστηκε ως προς το χρόνο (σε ώρες) υπερωριακής απασχόλησης κατά της διάρκεια του μήνα Απριλίου. Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τις αθροιστικές συχνότητες N_i των ωρών της υπερωριακής απασχόλησης, οι οποίες έχουν χωριστεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους.

Ώρες υπερωριακής απασχόλησης Κλάσεις [-)	Συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Κεντρική τιμή x_i	$x_i \cdot v_i$
0-2		5	1	
2-4		15	3	
4-6		20	5	
6-8		35	7	
8-10		40	9	
ΣΥΝΟΛΟ				

- α) Να βρεθεί το μέγεθος του δείγματος.
β) Να συμπληρωθεί ο παραπάνω πίνακας.
γ) Να βρεθεί η μέση τιμή των ωρών της υπερωριακής απασχόλησης.

17. Δίνονται οι πέντε αριθμοί 6, 5, 28, 3, 8.
- α) Να βρείτε τη μέση τιμή των παραπάνω πέντε αριθμών.
- β) Να βρείτε τη διάμεσο των παραπάνω πέντε αριθμών.
- γ) Στους παραπάνω πέντε αριθμούς, δίνεται ως έκτος, ο αριθμός 16. Να βρείτε τη διάμεσο των έξι αριθμών.
18. Οι πόντοι που πέτυχε ένας καλαθοσφαιριστής στους τελευταίους πέντε (5) αγώνες της ομάδας του ήταν:
- $$20, 17, 21, 19, 23$$
- α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή \bar{x} των πόντων του καλαθοσφαιριστή.
- β) Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 του δείγματος. Δίνεται ότι $\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{x})^2 = 20$, όπου $t_i, i=1, 2, 5$, είναι οι πόντοι του καλαθοσφαιριστή στους 5 αγώνες.
- γ) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
19. Οι βαθμοί ενός μαθητή σε πέντε μαθήματα στις εξετάσεις ήταν: 8, 18, 12, 14, 13.
- α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο των βαθμών του μαθητή.
- β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των βαθμών του μαθητή.
- γ) Αν τα μαθήματα είχαν συντελεστές στάθμισης 2, 1, 3, 3 και 1 αντίστοιχα, ποια θα ήταν η μέση τιμή των βαθμών του μαθητή;
20. Εξετάσαμε ένα δείγμα δέκα μαθητών ενός λυκείου ως προς τη μεταβλητή 'Βάρος' και διαπιστώσαμε ότι οι τιμές του βάρους τους ήταν σε kg:
- $$76, 74, 75, 75, 78, 72, 70, 80, 75, 75$$
- α) Να βρείτε τη μέση τιμή \bar{x} της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.
- β) Αν η τυπική απόκλιση s της κατανομής του βάρους των δέκα μαθητών κατά προσέγγιση είναι $s = 3$ kg, να βρείτε τον συντελεστή μεταβλητότητας CV του δείγματος.
- γ) Είναι το δείγμα ομοιογενές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
21. Οι βαθμοί που έγραψε ένας μαθητής σε τέσσερα τεστ, στο μάθημα των Μαθηματικών το πρώτο τετράμηνο της τρέχουσας χρονιάς είναι: 19, 10, 13, 20.
- α) Να βρείτε τη διάμεσο των βαθμών αυτών.
- β) Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας που πέτυχε ο μαθητής στα τέσσερα τεστ.
- γ) Να βρείτε το σταθμικό μέσο της βαθμολογίας που πέτυχε ο μαθητής στα τέσσερα τεστ, αν τα παραπάνω τεστ είχαν αντίστοιχα συντελεστές βαρύτητας τους αριθμούς: 1, 4, 3, 2.
22. Εξετάσαμε ένα δείγμα δέκα μαθητών ενός λυκείου ως προς τη μεταβλητή 'Βάρος' και διαπιστώσαμε ότι οι τιμές του βάρους τους ήταν σε kg:

80 , 70 , 75 , 75 , 78 , 72 , 70 , 80 , 75 , 75

- α) Να κατασκευάσετε το σημειόγραμμα της κατανομής του βάρους των δέκα μαθητών.
 β) Να βρείτε:
 i. τη μέση τιμή \bar{x} της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.
 ii. τη διάμεσο δ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.

23. Στη διάρκεια του χειμώνα, από το σύνολο των μαθητών μιας τάξης, οι δέκα σημείωσαν τις εξής ημέρες απουσίας από το σχολείο: 6 , 7 , 1 , 2 , 3 , 5 , 2 , 4 , 4 , 6 . Να βρείτε:

- α) το εύρος των ημερών απουσίας που σημειώθηκαν,
 β) τη διάμεσο των ημερών απουσίας που σημειώθηκαν,
 γ) τη μέση τιμή των ημερών απουσίας που σημειώθηκαν.

24. Στον παρακάτω πίνακα, αναγράφεται ανά ημέρα, το πλήθος των απόντων μαθητών ενός τμήματος της Γ' Λυκείου.

Ημέρα	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή
Πλήθος απόντων μαθητών	4	3	2	2	4

Για το δείγμα των απόντων μαθητών να υπολογίσετε:

- α) το εύρος R ,
 β) τη διάμεσο δ ,
 γ) τη μέση τιμή \bar{x} .

25. Οι προφορικοί βαθμοί έξι μαθητών στα μαθηματικά είναι 10 , 13 , 11 , 15 , 9 , 14 .

- α) Να υπολογίσετε την μέση τιμή \bar{x} του δείγματος των έξι μαθητών.
 β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

t_i	$t_i - \bar{x}$	$(t_i - \bar{x})^2$
9		
10		
11		
13		
14		
15		

- ii. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 του δείγματος.

26. Οι ημέρες απουσίας 11 μαθητών το μήνα Σεπτέμβριο ήταν: 1 , 4 , 4 , 7 , 3 , 6 , 10 , 3 , 1 , 2 , 3 .

- α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο των δοσμένων τιμών για τις ημέρες απουσίας.
 β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των δοσμένων τιμών για τις ημέρες απουσίας.
 γ) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων των δοσμένων τιμών για τις ημέρες απουσίας.

27. Εξετάσαμε ένα δείγμα δέκα μαθητών ενός λυκείου ως προς τη μεταβλητή 'Βάρος' και διαπιστώσαμε ότι οι τιμές του βάρους τους ήταν σε kg: 76 , 74 , 75 , 75 , 78 , 72 , 70 , 80 , 75 , 75 .
- α) τι είδους μεταβλητή είναι η μεταβλητή 'Βάρος'; Ποιοτική, Ποσοτική Διακριτή ή Ποσοτική Συνεχής;
- β) Να βρείτε:
- τη μέση τιμή \bar{x} της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.
 - τη διάμεσο δ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.
28. Οι βαθμοί 10 φοιτητών στο μάθημα της Στατιστικής ήταν: 4 , 7 , 3 , 5 , 8 , 6 , 5 , 9 , 6 , 6 .
- α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των βαθμών όλων των φοιτητών του δείγματος.
- β) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων.
- γ) Ποιο είναι το ποσοστό των φοιτητών με βαθμό μεγαλύτερο του 8;
29. Έστω a ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Δίνεται η παρακάτω κατανομή συχνοτήτων:

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές x_i	v_i	$x_i v_i$
30-40		a	
40-50		$2a$	
50-60		$3a$	
60-70		$4a$	
Σύνολο		$10a$	

- α) i. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα, αφού τον μεταφέρετε στην κόλλα σας.
- ii. Να δείξετε ότι η μέση τιμή της κατανομής είναι $\bar{x} = 55$.
- β) i. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, αφού τον μεταφέρετε στην κόλλα σας.

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμή x_i	v_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
30-40		a			
40-50		$2a$			
50-60		$3a$			
60-70		$4a$			
Σύνολο		$10a$			

- ii. Να βρείτε την διακύμανση s^2 της κατανομής.
- γ) Να βρείτε την μέση τιμή και την διακύμανση της κατανομής συχνοτήτων του παρακάτω πίνακα.

Κλάσεις [-)	v_i
30-40	10
40-50	20
50-60	30
60-70	40
Σύνολο	100

30. Στις 10 το πρωί, η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) δύο πόλεων Α και Β, το πρώτο δεκαήμερο του Μαΐου ήταν:

Πόλη Α: 20 17 18 20 17 16 17 16 18 10

Πόλη Β: 18 22 20 17 16 16 15 17 12 16

- α) Να βρείτε τη μέση και τη διάμεσο θερμοκρασία των πόλεων Α και Β, για το πρώτο δεκαήμερο του Μαΐου.
- β) Ο Γιάννης υπολόγισε την τυπική απόκλιση των θερμοκρασιών (σε βαθμούς Κελσίου) των πόλεων Α και Β και βρήκε ότι είναι: $s_A = 2,66$ και $s_B = 2,59$ αντίστοιχα. Να δικαιολογήσετε σε ποια από τις δύο πόλεις οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη διασπορά.
- γ) Εκ των υστέρων διαπιστώθηκε ότι το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας στην πόλη Α παρουσίαζε, λόγω κατασκευαστικού λάθους, αυξημένη θερμοκρασία κατά 5 βαθμούς. Αφού υπολογίσετε τις σωστές θερμοκρασίες της πόλης Α, να βρείτε σε ποια από τις δύο πόλεις Α και Β οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη ομοιογένεια. Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

(Δίνεται ότι: $\frac{2,59}{16,9} = 0,153$ και $\frac{2,66}{11,9} = 0,223$).

31. Μια μεταβλητή X παίρνει τις τιμές $x_1 = \alpha$, $x_2 = \alpha + 5$, $x_3 = \alpha + 10$ και $x_4 = \alpha + 35$, όπου α πραγματικός αριθμός. Οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες των τιμών δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

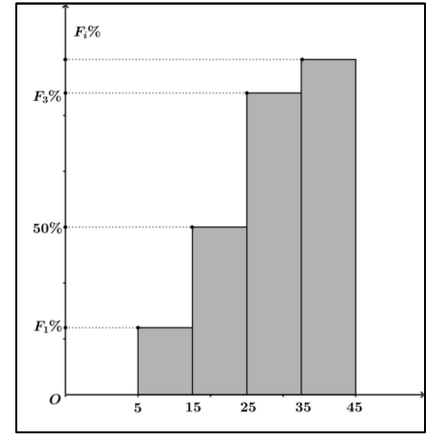
x_i	F_i
α	$\frac{4}{\lambda}$
$\alpha + 5$	$\frac{11}{\lambda}$
$\alpha + 10$	$\frac{18}{\lambda}$
$\alpha + 35$	$\frac{25}{\lambda}$

όπου λ θετικός ακέραιος.

- α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 25$.

- β)** Να βρείτε τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_1, F_2, F_3 και F_4 αλλά και τις σχετικές συχνότητες f_1, f_2, f_3 και f_4 .
- γ)** Αν η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 19$, να βρείτε την τιμή του a .
- 32.** Ο χρόνος αναμονής των πολιτών μέχρι να εξυπηρετηθούν σε μια δημόσια υπηρεσία ακολουθεί την κανονική κατανομή, με μέση τιμή 5 λεπτά και τυπική απόκλιση 1 λεπτό.
- α)** Να βρείτε πόσο είναι περίπου το ποσοστό των πολιτών που εξυπηρετούνται σε χρόνο:
- Από 4 έως 6 λεπτά,
 - Από 3 έως 6 λεπτά.
- β)** Αν το πλήθος των πολιτών που εξυπηρετήθηκαν το μήνα Μάιο σε αυτή την υπηρεσία ήταν 5000 πόσοι περίπου πολίτες περίμεναν από 5 έως 6 λεπτά μέχρι να εξυπηρετηθούν;
- γ)** Να εκτιμήσετε το εύρος της κατανομής του χρόνου αναμονής των πολιτών.
- δ)** Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής της κατανομής του χρόνου αναμονής.
- 33.** Μια εταιρεία απασχολεί 7 υπαλλήλους, οι 4 από αυτούς εργάζονται στο τμήμα Α και οι υπόλοιποι 3 στο τμήμα Β. Οι μισθοί (σε ευρώ) των 4 εργαζομένων στο τμήμα Α είναι: 990, 910, 960, 940. Ενώ των 3 εργαζομένων στο τμήμα Β είναι: 990, 980, 1000.
- α)** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών των εργαζομένων στο τμήμα Α της εταιρείας.
- β)** Να υπολογίσετε το ποσοστό των εργαζομένων στο τμήμα Α της εταιρείας, που έχουν μισθό μικρότερο από το μέσο μισθό των εργαζομένων στο τμήμα Β.
- γ)** Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή των μισθών των 4 εργαζομένων στο τμήμα Α είναι 960 ευρώ ενώ η μέση τιμή των μισθών των 3 εργαζομένων στο τμήμα Β είναι 990 ευρώ. Η εταιρεία θέλει να προσλάβει έναν υπάλληλο στο τμήμα Β ώστε η νέα μέση τιμή των μισθών των εργαζομένων του τμήματος Β να είναι ίση με αυτή του τμήματος Α, ποιος πρέπει να είναι ο μισθός του υπαλλήλου που θα προσληφθεί;
- 34.** Η βαθμολογία δέκα μαθητών σε ένα διαγώνισμα στη Στατιστική ήταν:
- $$10, 10, 18, 8, 20, 7, 9, 17, 11, 10$$
- α)** Να βρείτε το εύρος και τη διάμεσο της βαθμολογίας.
- β)** Να δείξετε ότι η μέση τιμή της βαθμολογίας είναι $\bar{x} = 12$.
- γ)** Να δείξετε ότι η διασπορά της βαθμολογίας είναι $s^2 = 18,8$ και να δείξετε ότι το δείγμα των βαθμών δεν είναι ομοιογενές. Δίνεται ότι: $\sqrt{18,8} \approx 4,3$.
- δ)** Ένας μαθητής της τάξης ισχυριζόμενος ότι το δείγμα των βαθμών δεν είναι ομοιογενές, διατύπωσε την άποψη ότι αν σε κάθε βαθμό προσθέσουμε τον αριθμό 33, θα προκύψει ένα δείγμα αριθμών (όχι βαθμών) που θα είναι ομοιογενές. Συμφωνείτε με την άποψη του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

35. Οι χρόνοι σε λεπτά, που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα $[5,45)$ και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο διπλανό ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.



α) Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

β) i. Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι $\alpha = 8$,

ii. και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας.

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5,15)		$\alpha+4$			
[15,25)		$3\alpha-6$			
[25,35)		$2\alpha+8$			
[35,45)		$\alpha-2$			
Σύνολο					

36. Ο κυβισμός των κινητήρων X , σε κυβικά εκατοστά ενός δείγματος 10.000 αυτοκινήτων, ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Στο παραπάνω δείγμα βρέθηκαν 5000 αυτοκίνητα με κυβισμό μικρότερο από 1.800 κυβικά εκατοστά.

α) Να αποδειχθεί ότι η μέση τιμή \bar{x} του κυβισμού των κινητήρων των αυτοκινήτων του δείγματος, είναι 1.800 κυβικά εκατοστά.

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι στο παραπάνω δείγμα υπάρχουν 3400 αυτοκίνητα που ο κυβισμός τους είναι από 1.800 κυβικά εκατοστά έως 2.000 κυβικά εκατοστά, να βρείτε την τυπική απόκλιση s του κυβισμού των κινητήρων των αυτοκινήτων του δείγματος.

γ) Να εκτιμήσετε το εύρος R του κυβισμού των κινητήρων των αυτοκινήτων του δείγματος.

37. Μελετήσαμε ένα δείγμα I.X. αυτοκινήτων που κυκλοφορούν στο κέντρο της Αθήνας ως προς τον αριθμό των επιβατών συμπεριλαμβανομένου και του οδηγού. Μερικά από τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Αριθμός επιβατών x_i	Αριθμός αυτοκινήτων v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
1	50	0,125				
2	110	0,275				
3		0,3				
4	30	0,075				
5	90					
ΣΥΝΟΛΑ	$v = 400$					

- α) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.
- β) Να υπολογίσετε την μέση τιμή και τη διάμεσο του δείγματος.
- γ) Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι το δείγμα είναι ομοιογενές. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του Γιάννη; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.
- (Δίνεται ότι $\sqrt{7} = 2,65$).

38. Ένας καθηγητής Μαθηματικών που διδάσκει στο ΕΠΑΛ μιας πόλης, κατέγραψε τη βαθμολογία που πέτυχαν οι 20 μαθητές του, στις Πανελλαδικές Εξετάσεις, στην κλίμακα 0 – 20. Στη συνέχεια κατασκεύασε το διπλανό πίνακα, όπου σημείωσε τους βαθμούς που πέτυχαν οι μαθητές του (η στήλη των x_i) και το πλήθος-συχνότητα των μαθητών που τους πέτυχε (η στήλη των v_i). N_i είναι η αθροιστική συχνότητα.

Βαθμός x_i	Συχνότητα v_i	$x_i \cdot v_i$	N_i
6	3		
8	2		
10	4		
11	1		
14	5		
15	1		
18	3		
20	1		
ΣΥΝΟΛΟ	20		

- α) Να συμπληρώσετε τις δύο στήλες του πίνακα που δεν έχουν συμπληρωθεί.
- β) Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας, που πέτυχαν οι μαθητές του ΕΠΑΛ αυτού.
- γ) Όταν ο σύλλογος των διδασκόντων του ΕΠΑΛ αυτού, συζήτησε τα αποτελέσματα που πέτυχαν οι μαθητές τους, ο καθηγητής των Μαθηματικών υποστήριξε ότι:
- το πανελλαδικό ποσοστό, όσων μαθητών έγραψε κάτω από τη βάση (κάτω από 10) ξεπερνάει το 52% και είναι υπερδιπλάσιο από το αντίστοιχο ποσοστό των μαθητών του σχολείου.
 - το πανελλαδικό ποσοστό, όσων μαθητών έγραψε άριστα (από 18 έως 20) είναι μόλις το 5%, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό των μαθητών του σχολείου είναι τετραπλάσιο αυτού.
- Συμφωνείτε με τις απόψεις που διατύπωσε ο Μαθηματικός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

39. Δύο διαφορετικά δείγματα μίας μεταβλητής X ενός πληθυσμού έχουν τις παρακάτω τιμές:

Δείγμα 1: 8 , 9 , 10 , 11 , 12 και Δείγμα 2: 8 , 10 , 10 , 10 , 12

- α) Για κάθε δείγμα να υπολογίσετε τη μέση τιμή \bar{x} και τη διάμεσο d .
- β) Για κάθε δείγμα να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 και την τυπική απόκλιση s .
- γ) Για κάθε δείγμα να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής CV .
- δ) Ένας μαθητής διατύπωσε την άποψη:

«Αν δύο διαφορετικά δείγματα έχουν ίδια μέση τιμή και διάμεσο, τότε εμφανίζουν και την ίδια ομοιογένεια.»

Συμφωνείτε με αυτήν την άποψη; Χρησιμοποιώντας τα δείγματα που δόθηκαν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

40. Στις τέσσερις κλάσεις του παρακάτω πίνακα, παρουσιάζονται τα χρόνια εργασίας του συνόλου των εκπαιδευτικών ενός Λυκείου της Αθήνας.

Χρόνια Υπηρεσίας	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i \cdot \nu_i$
[0, 10)		10	
[10, 20)		15	
[20, 30)		κ	
[30, 40)		5	
Σύνολο			

- α) Αφού μεταφέρετε στην κόλλα σας τον πίνακα, να συμπληρώσετε τα κενά του, συναρτήσει του κ , όπου αυτό είναι αναγκαίο.
- β) Αν ο μέσος χρόνος εργασίας των παραπάνω εκπαιδευτικών είναι τα 19 χρόνια, να δείξετε ότι το $\kappa = 20$. Πόσοι ήταν συνολικά οι εκπαιδευτικοί του σχολείου;

Για $\kappa = 20$,

- γ) να μεταφέρετε στην κόλλα σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε τα κενά,

Χρόνια Υπηρεσίας	ν_i	f_i	N_i	F_i	$F_i\%$
[0, 10)	10				
[10, 20)	15				
[20, 30)	20				
[30, 40)	5				
Σύνολο					

- δ) να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, και να βρείτε τη διάμεσο του χρόνου εργασίας.
41. Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι (σε λεπτά), που χρειάζονται οι μαθητές ενός σχολείου για να πάνε το πρωί από το σπίτι τους στο σχολείο, ακολουθούν κανονική κατανομή. Δίνεται ότι ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος των χρόνων είναι $CV = 20\%$ και η διακύμανσή του $s^2 = 4$.
- α) Να δείξετε ότι η μέση τιμή $\bar{x} = 10$.
- β) Να υπολογίσετε (προσεγγιστικά), το εύρος του δείγματος των χρόνων.
- γ) Να βρείτε κατά προσέγγιση το ποσοστό των μαθητών, που χρειάζονται για να πάνε από το σπίτι τους στο σχολείο:
- το πολύ 10 λεπτά,
 - πάνω από 14 λεπτά,
 - από 6 έως 12 λεπτά.