

1. ΘΕΜΑ_2_24357

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x) = -2x + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε την $f'(5)$.

γ) Για $x > 1$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

2. ΘΕΜΑ_2_32365

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x + 6$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 3x^2 + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να υπολογίσετε το $f'(0)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

3. ΘΕΜΑ_2_25459

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 6x + 2023$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 6x - 6$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να υπολογίσετε το $f'(1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, για $x > 1$.

4. ΘΕΜΑ_2_34845

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - x^3$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1,0)$.

Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = -3$

γ) η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $y = -3x + 3$.

5. ΘΕΜΑ_3_32363

Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τη συνάρτηση $x(t) = t^2 - 4t - 1$, $t \geq 0$, όπου το t μετρίεται σε δευτερόλεπτα (s) και το $x(t)$ σε μέτρα (m).

α) Να βρείτε την ταχύτητα $v(t)$ του σημείου σε χρόνο t .

β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του υλικού σημείου τις χρονικές στιγμές $t_1 = 1s$ και $t_2 = 3s$.

γ) Σε ποια χρονική στιγμή το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο;

δ) Πότε το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;

6. ΘΕΜΑ_3_27898

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x) = -2x + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.

γ) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \leq 5$.

7. ΘΕΜΑ_3_27959

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 6x + 2023$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 6x - 6$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2020$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

8. ΘΕΜΑ_4_36812

Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, και το σημείο $A(3,0)$, όπως φαίνονται στο σχήμα. Αν $M(x,y)$ είναι τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f , τότε:

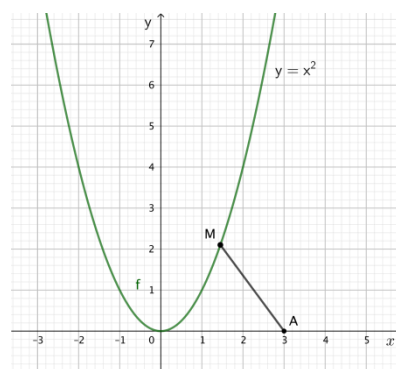
α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση AM , συνάρτησι του x , είναι

$$d(x) = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}, x \in \mathbb{R}.$$

β) i. Να αποδείξετε ότι $2x^3 + x - 3 = (x-1)(2x^2 + 2x + 3)$.

ii. Να βρείτε για ποιο σημείο M η απόσταση AM γίνεται ελάχιστη. Θεωρείστε ότι η ελάχιστη απόσταση θα παρουσιαστεί όταν το υπόριζο $x^4 + x^2 - 6x + 9$, $x \in \mathbb{R}$, γίνει ελάχιστο.

γ) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση AM .



9. ΘΕΜΑ_4_36811

Ένα σώμα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος του σε μέτρα (m) μετά από t δευτερόλεπτα (s) από την εκτόξευσή του δίνεται από την συνάρτηση $h(t) = 8t - t^2$, $0 \leq t \leq 8$.

α) Να υπολογίσετε το ύψος του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s.

β) Να αποδείξετε ότι η ταχύτητα του σώματος σε χρόνο t δίνεται από τη συνάρτηση

$$v(t) = 8 - 2t, 0 \leq t \leq 8$$

γ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s.

δ) Σε ποια χρονική στιγμή το σώμα φτάνει στο μέγιστο ύψος; Ποιο είναι το μέγιστο ύψος του σώματος;

10. ΘΕΜΑ_4_25458

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης.

11. ΘΕΜΑ_4_34846

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - x - 4$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

α) την παράγωγο της συνάρτησης f ,

β) τα ακρότατα της συνάρτησης f ,

γ) i. τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 3x + 3$,

ii. να δείξετε ότι η μια από τις εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f με συντελεστή διεύθυνσης 3 και σημείο επαφής με αρνητική τετμημένη διέρχεται από το σημείο $M\left(3, \frac{31}{3}\right)$.

12. ΘΕΜΑ_4_34838

Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x}$, $x \geq 0$, και το σημείο $A(3,0)$,

όπως φαίνονται στο σχήμα. Αν $M(x,y)$ είναι τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f , τότε:

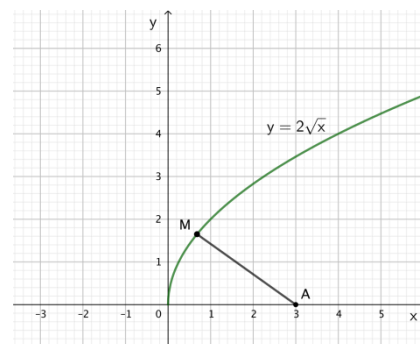
α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση AM , συναρτήσει του x , είναι

$$d(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 9}, x \geq 0.$$

β) Να βρείτε για ποιο σημείο M η απόσταση AM γίνεται ελάχιστη.

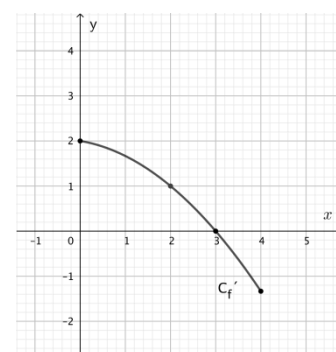
Θεωρείστε ότι η ελάχιστη απόσταση θα παρουσιαστεί όταν το υπόρριζο $x^2 - 2x + 9$, $x \geq 0$, γίνει ελάχιστο.

γ) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση AM .



13. ΘΕΜΑ_4_34824

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολωνυμικής συνάρτησης f η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,4]$. Η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από το σημείο $(2,1)$ και



τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη 3 . Μελετώντας το σχήμα να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

- Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x=2$;
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο $[0,3]$.
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=3$.

14. ΘΕΜΑ_4_33662

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$, $x > 0$.

- Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση $f'(x)$ και το πρόσημο της f' .
- Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .
- Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό $x > 0$.

15. ΘΕΜΑ_4_32366

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = 6x^2 - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.
- Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - 5}{g'(x) - 10}$.

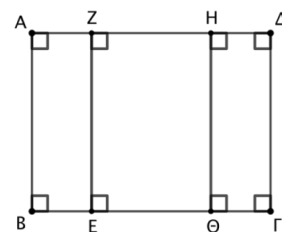
16. ΘΕΜΑ_4_34835

Ένας αγρότης διαθέτει συρματοπλέγμα μήκους 200 m και να θέλει να περιφράξει με αυτό σε ένα χωράφι του μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ με δύο ενδιάμεσα χωρίσματα EZ και ΘH , όπως φαίνεται στο σχήμα.

- Αν $A\Delta = x$ και $AB = y$, να αποδείξετε ότι το συνολικό εμβαδόν του

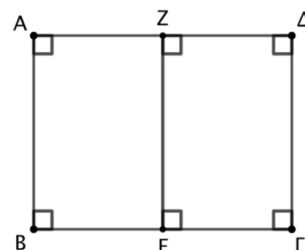
σχήματος, συναρτήσει του x , είναι $E(x) = \frac{100x - x^2}{2}$, $0 < x < 100$.

- Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ ώστε το συνολικό εμβαδόν του να είναι μέγιστο.
- Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος.



17. ΘΕΜΑ_4_34832

Ένας αγρότης διαθέτει συρματοπλέγμα μήκους 200 m και θέλει να περιφράξει με αυτό σε ένα χωράφι του μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ με ενδιάμεσο χωρίσμα EZ , όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Αν $ΑΔ = x$ και $AB = y$, να αποδείξετε ότι το συνολικό εμβαδόν του σχήματος, συναρτήσει του x , είναι

$$E(x) = \frac{200x - 2x^2}{3}, 0 < x < 100$$

β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου $ABΓΔ$ ώστε το συνολικό εμβαδόν να είναι μέγιστο.

γ) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του σχήματος.

18. ΘΕΜΑ_4_34802

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + c$, $x \in \mathbb{R}$, όπου c ένας πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε το c αν ισχύει $f(2) + f'(2) + f''(2023) = 0$.

Για $c = 2$:

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(2023)$, $f(2024)$.

19. ΘΕΜΑ_4_33629

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x)$.

β) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$.

γ) i. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

δ) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2023)$ και $f(2301)$ της συνάρτησης f .

20. ΘΕΜΑ_4_33628

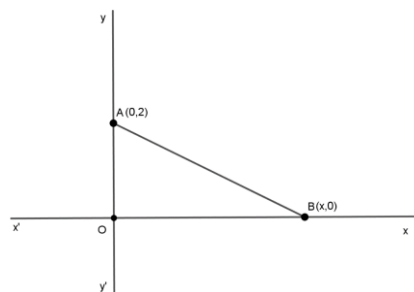
Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα σημεία $A(0, 2)$ και $B(x, 0)$ με $x > 0$.

α) Να δείξετε ότι η απόσταση των σημείων A και B συναρτήσει του

x είναι $d(x) = (AB) = \sqrt{x^2 + 4}$ με $x > 0$.

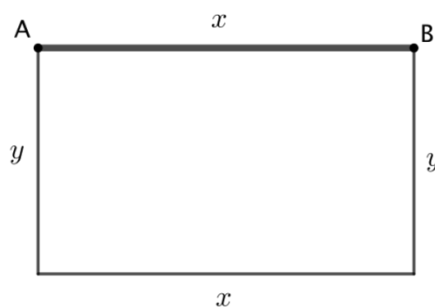
β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων A και B ως προς x όταν $x = 3$.

γ) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι, καθώς το σημείο B κινείται προς τα δεξιά στον ημιάξονα Ox , το μήκος του AB αυξάνεται. Να αιτιολογήσετε γιατί συμβαίνει αυτό, αξιοποιώντας το ερώτημα β).



21. ΘΕΜΑ_4_34828

Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει σε ένα χωράφι μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου με μεταβλητές διαστάσεις x , y ώστε να έχει εμβαδόν 800 m^2 . Η πλευρά AB της περιοχής, μήκους x , όπως φαίνεται στο σχήμα, θα είναι πέτρινη, ενώ για τις υπόλοιπες πλευρές θα χρησιμοποιήσει συρμάτινο φράχτη. Αν το κόστος περίφραξης για την πέτρινη πλευρά είναι 6 ευρώ ανά m και για τον συρμάτινο φράχτη είναι 2 ευρώ ανά m , τότε:



α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος της περίφραξης, συνάρτηση του x , είναι

$$K(x) = 8x + \frac{3200}{x}, \quad x > 0.$$

β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κτήματος ώστε το συνολικό κόστος περίφραξης να είναι ελάχιστο.

γ) Ποιο είναι το ελάχιστο κόστος περίφραξης;

22. ΘΕΜΑ_4_34801

Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) ενός δωματίου σε συνάρτηση με τον χρόνο t σε ώρες δίνεται από τον τύπο $\theta(t) = t^3 - 3t^2 + 2t + c$, $0 \leq t \leq 4$, όπου c ένας πραγματικός αριθμός.

α) Αν είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του δωματίου τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι ίση με 8 βαθμούς Κελσίου, να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού c .

Για $c = 8$:

β) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας όταν $t = 2$.

γ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας γίνεται ελάχιστος και την τιμή του ελάχιστου ρυθμού μεταβολής.

23. ΘΕΜΑ_4_33860

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + \lambda x + 5$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά.

α) Αν ισχύει $f'(1) = 0$, να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Για $\lambda = 3$:

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{7}{3}\right)$ και

$$f\left(\frac{13}{4}\right).$$

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - x}$.

24. ΘΕΜΑ_4_32367

Μια επιχείρηση παραγωγής αιθέριων ελαίων εκτιμά ότι το ημερήσιο κόστος $C(x)$ (σε εκατοντάδες ευρώ) για την παραγωγή x κιλών λεβάντας είναι $C(x) = 2x^3 - 4x^2 - 8x + 30$, $x \geq 0$.

- Πόσο είναι το ημερήσιο κόστος για την παραγωγή 2 κιλών λεβάντας;
- Να υπολογίσετε το $C(0)$. Τι εκφράζει;
- Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $C(x)$.
- Να βρείτε πόσα κιλά λεβάντας πρέπει να παράγονται ημερησίως ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος. Πόσο είναι το ελάχιστο ημερήσιο κόστος;

25. ΘΕΜΑ_4_34259

Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = ax^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$, όπου a ένας πραγματικός αριθμός.

- Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f .
 - Αν η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $a = 1$.

Για $a = 1$:

- να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα,
- να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\sqrt{x} - 1}$.

26. ΘΕΜΑ_4_33859

Ένα οικοπέδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα, πλάτος y μέτρα και περίμετρο 200 μέτρα.

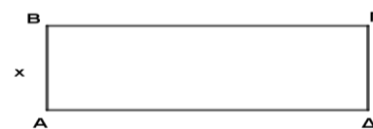
- Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = 100x - x^2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση $E(x)$ ως προς τη μονοτονία της.
- Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο, και ποια είναι η μέγιστη τιμή του; Για την τιμή που βρήκατε τι σχήμα προκύπτει;

27. ΘΕΜΑ_4_32260

Δίνεται το ορθογώνιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος με εμβαδόν 4 m^2 .

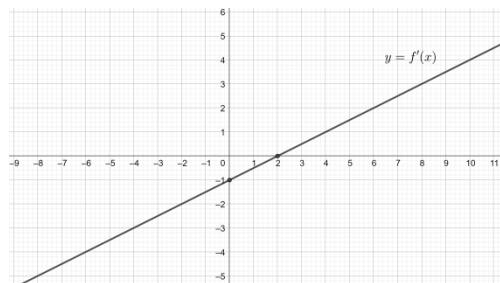
- Αν το μήκος της πλευράς $AB = x \text{ m}$, να δείξετε ότι η πλευρά $BΓ$ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ συναρτήσει του x είναι $BΓ = \frac{4}{x}$, $x > 0$.
- Να αποδείξετε ότι, η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = 2x + \frac{8}{x}$, $x > 0$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

- δ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με σταθερό εμβαδό, παίρνει την ελάχιστη τιμή της, όταν αυτό γίνει τετράγωνο. Συμφωνείτε με την άποψη του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



28. ΘΕΜΑ_4_30975

Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(2)=5$ και $f(0)=6$. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' της συνάρτησης, η οποία είναι ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2 και τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -1 .



- α) Να αιτιολογήσετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$.
- β) Να βρείτε τα ακρότατα της f .
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0, f(0))$.

29. ΘΕΜΑ_4_28125

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 8x + 18$ και $g(x) = -(x-4)^4 + 2$.

- α) Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων f και g .
- β) Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων αυτών.
- γ) Να δείξετε ότι $f(x) \geq g(x), x \in \mathbb{R}$.

30. ΘΕΜΑ_4_26895

Δύο θετικοί αριθμοί x, y συνδέονται με τη σχέση $2x + y = 20$.

- α) i. Να δείξετε ότι το γινόμενο των δύο αριθμών, ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο $f(x) = -2x^2 + 20x$.
- ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της παραπάνω συνάρτησης.
- β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- γ) Να βρείτε τη τιμή του x ώστε το γινόμενο των δύο αριθμών να γίνει μέγιστο.

31. ΘΕΜΑ_4_28618

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + \frac{2}{3}, x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f .
- β) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο της $A(1,1)$.

32. ΘΕΜΑ_4_28282

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά $AB=4$. Θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία K , Λ , M και N των πλευρών AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ΔA αντίστοιχα έτσι ώστε $AK=BL=GM=\Delta N=x$.

α) Να δείξετε ότι:

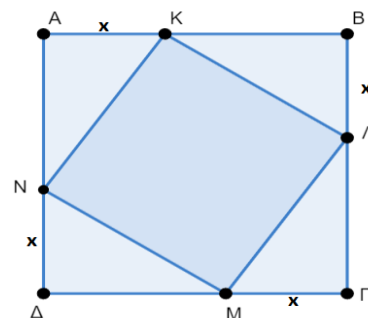
i. το εμβαδόν του AKN ως συνάρτηση του x είναι

$$E_1(x) = \frac{1}{2}(4-x) \cdot x, \quad x \in (0,4).$$

ii. το εμβαδόν του $K\Lambda MN$ ως συνάρτηση του x είναι $E(x) = 2(x^2 - 4x + 8)$, $x \in (0,4)$.

β) Να υπολογίσετε τη πρώτη παράγωγο του εμβαδού $E(x)$.

γ) Να βρείτε την τιμή του x , για την οποία το $E(x)$ γίνεται ελάχιστο.



33. ΘΕΜΑ_4_28280

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με διαστάσεις $AB=4$ και $B\Gamma=2$. Θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία K , Λ , M και N των πλευρών AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ΔA αντίστοιχα έτσι ώστε $AK=BL=GM=\Delta M=x$.

α) Να δείξετε ότι:

i. το εμβαδόν του AKN ως συνάρτηση του x είναι

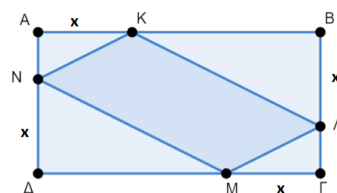
$$E_1(x) = \frac{1}{2}(2-x) \cdot x, \quad x \in (0,2) \quad \text{και} \quad \text{το εμβαδόν του } K\Lambda\Gamma \text{ ως συνάρτηση του } x \text{ είναι}$$

$$E_2(x) = \frac{1}{2}(4-x) \cdot x, \quad x \in (0,2).$$

ii. το εμβαδόν του $K\Lambda MN$ ως συνάρτηση του x είναι $E(x) = 2 \cdot (x^2 - 3x + 4)$, $x \in (0,2)$.

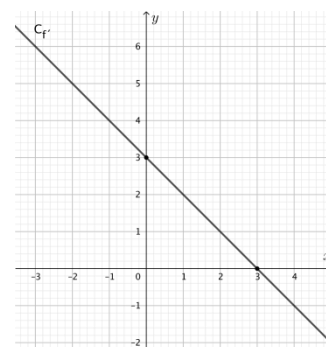
β) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ως προς το x όταν $x = \frac{3}{2}$.

γ) Να βρείτε την τιμή του x , για την οποία το $E(x)$ γίνεται ελάχιστο.



34. ΘΕΜΑ_4_25643

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση $C_{f'}$ της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f . Αν η $C_{f'}$ είναι ευθεία η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(3,0)$, τότε:



- α) Να αιτιολογήσετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$.
- β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(3)$ και $f(4)$.
- γ) Να βρείτε το είδος και την τιμή του ακροτάτου που παρουσιάζει η f αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3, 2)$.

35. ΘΕΜΑ_4_24363

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι: $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$ με $x \in \mathbb{R}$.
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της.
- γ) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(2, f(2))$, είναι η ευθεία $(\varepsilon): y = -\frac{3}{25}x + \frac{16}{25}$.

36. ΘΕΜΑ_4_24360

Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα (m), πλάτος y μέτρα (m) και εμβαδό 400 τετραγωνικά μέτρα (m^2).

- α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $\Pi(x) = 2x + \frac{800}{x}$ με $x > 0$.
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $\Pi(x)$ ως προς τη μονοτονία της.
- γ) Για ποια τιμή του x η περίμετρος του οικοπέδου γίνεται ελάχιστη, και ποια είναι η ελάχιστη τιμή της;

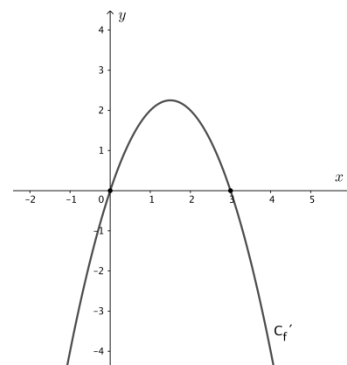
37. ΘΕΜΑ_4_24359

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

- α) i. Για $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f .
- ii. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(2, f(2))$.
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

38. ΘΕΜΑ_4_25461

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f , όπου f' είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού.



- α) Να αιτιολογήσετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[3, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 3]$.
- β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(1)$ και $f(2)$.
- γ) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(0, -1)$ και $B(3, 2)$, τότε να βρείτε τα ακρότατα της f .

39. ΘΕΜΑ_4_24361

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - x$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά.

- α) Αν ισχύει $f'(1) = 0$, να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Για $\lambda = -1$:

- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της.
- γ) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x$.