

3.2 Η Παραβολή

1. Δίνεται το σημείο $E(2,0)$, η ευθεία $(\delta_1): x = -2$ και τυχαίο σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου.
 - α) i. Να βρείτε την απόσταση (ME) του σημείου $M(x,y)$ από το $E(2,0)$ ως συνάρτηση των x, y .
 - ii. Να βρείτε την απόσταση $d(M,\delta)$ του σημείου M από την ευθεία δ ως συνάρτηση των x, y .
 - β) Αν ισχύει $(ME) = d(M,\delta)$ να δείξετε ότι το σημείο M ανήκει στην παραβολή $y^2 = 8x$.

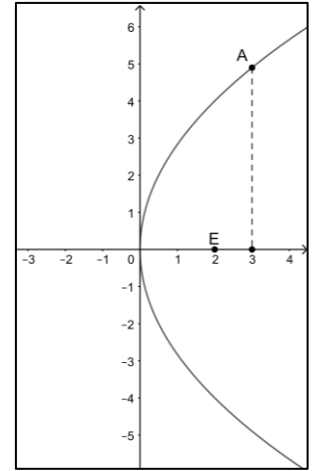
2. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{2}x^2$ (1).
 - α) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.
 - β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο $A(2,2)$.
 - γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή (1), την εστία, τη διευθετούσα και την εφαπτομένη της παραβολής.

3. Δίνεται η εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).
 - α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :
«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται Η εστία της E , έχει συντεταγμένες $E(\dots,\dots)$ και η διευθετούσα έχει εξίσωση
 - β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που εφάπτεται στην παραπάνω καμπύλη στο σημείο $A(-1,2)$.
 - γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής της ευθείας (ε) με τον άξονα $x'x$ είναι σημείο της διευθετούσας της παραβολής.

4. Δίνεται η παραβολή (C) με εξίσωση $y^2 = x$ (1).
 - α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας (δ) .
 - β) Να αποδείξετε ότι το $A(1,-1)$ είναι σημείο της παραβολής.
 - γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής στο σημείο της $A(1,-1)$.

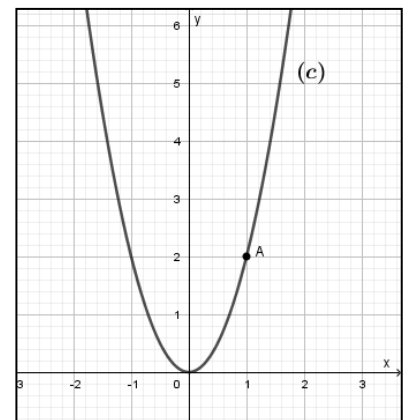
5. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 12y$.
 - α) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(0,3)$ και να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν τεταγμένη 3.
 - β) Να αποδείξετε ότι εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) της παραβολής στα σημεία $A(6,3)$ και $B(-6,3)$, αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις $y = x - 3$ και $y = -x - 3$.
 - γ) Να βρείτε το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2) .

6. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον $x'x$, κορυφή $O(0,0)$ και εστία $E(2,0)$, όπως στο σχήμα. Το σημείο A της παραβολής έχει τετμημένη 3 και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Oxy .



- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 8x$ και ότι $A(3, 2\sqrt{6})$.
- β) Να σχεδιάσετε τη διευθετούσα (δ) της παραβολής και να γράψετε την εξίσωσή της.
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της παραβολής στο σημείο A .
7. Δίνεται η παραβολή $(C): y^2 = 8x$.
- α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.
- β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $(\frac{1}{8}, 1)$ είναι παράλληλη στην ευθεία (ϵ): $8x - 2y + 3 = 0$.
8. Δίνεται η παραβολή (C) με εξίσωση $y^2 = 4x$.
- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας (δ) της (C) .
- β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της (C) στο σημείο της $M(4,4)$.
- γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή (C) , τη διευθετούσα (δ) και την ευθεία (ϵ).

9. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας παραβολής (c) , που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.



- α) Να βρείτε την εξίσωση, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.
- β) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς τον άξονα της παραβολής.
- γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της παραβολής στο σημείο $A'(-1,2)$.
- ii. Να βρείτε το σημείο τομής της (ϵ) με τον άξονα $y'y$ και στη συνέχεια να την σχεδιάσετε.

10. Δίνεται η παραβολή $(C): y^2 = \alpha \cdot x$ η οποία διέρχεται από το σημείο $M(16, \alpha + 4)$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$.

- β) Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα (δ) της παραβολής.
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε_1) της παραβολής (C) η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία (ε_2): $-x + 2y + 4 = 0$.
- δ) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου (C_1) με κέντρο την κορυφή της παραβολής (C) ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία (ε_1) του ερωτήματος γ).

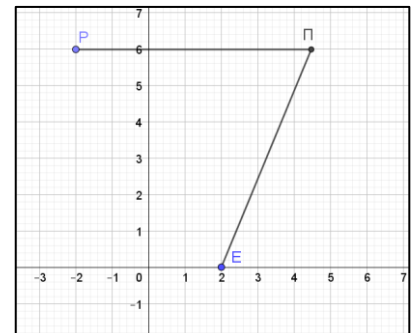
11. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και $M(x_0, y_0)$, $y_0 > 0$, ένα σημείο της.

- α) Αν A είναι η προβολή του M στη διευθετούσα της παραβολής,
- Να εκφράσετε τις συντεταγμένες των σημείων M και A συναρτήσει της τεταγμένης y_0 του σημείου M .
 - Αν E είναι η εστία της παραβολής, να βρείτε το σημείο M για το οποίο ισχύει $(MAE) = \frac{5}{8}$ τ.μ.
- β) Αν $M\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ και (ε) η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο M , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AMEM'$ είναι ρόμβος, όπου E είναι η εστία της παραβολής και M' το σημείο που η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$.

12. Δίνεται η παραβολή (C): $y^2 = 3x$ και η ευθεία (ε): $3x + 4y + 10 = 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία και να τις σχεδιάσετε.
- β) Έστω $M(x_0, y_0)$ ένα σημείο της παραβολής. Να αποδείξετε ότι η απόστασή του $d(M, \varepsilon)$ από την ευθεία είναι $d(M, \varepsilon) = \frac{(y_0 + 2)^2 + 6}{5}$.
- γ) Να βρείτε το σημείο της παραβολής που είναι το πιο κοντινό στην ευθεία.
- δ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο που βρήκατε στο ερώτημα γ) είναι παράλληλη στην ευθεία (ε).

13. Στο διπλανό ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, το 1ο τεταρτημόριο αντιστοιχεί σε μια θαλάσσια περιοχή και τα υπόλοιπα τεταρτημόρια σε στεριά. Οι ημιάξονες Ox , Oy οριοθετούν ένα λιμάνι. Ένα πλοίο ρυμουλκείται στο λιμάνι, δεμένο με δύο συρματόσχοινα στο ίδιο σημείο $\Pi(\kappa, \lambda)$ του πλοίου. Το ένα από τα δύο ρυμουλκά είναι σταθερό στο σημείο $E(2, 0)$ και το άλλο κινείται ώστε η θέση να περιγράφεται από το σημείο $P(-2, \lambda)$. Η ρυμούλκηση γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε χρονική στιγμή της ρυμούλκησης να ισχύει $(PE) = (PP)$.



- α) Να αποδείξετε ότι το σημείο $P(-2, \lambda)$ κινείται σε σταθερή ευθεία (δ) της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
- β) Να αιτιολογήσετε γιατί κάθε χρονική στιγμή της ρυμούλκησης είναι $PP \perp (\delta)$.
- γ) Να αποδείξετε ότι η πορεία του $\Pi(\kappa, \lambda)$ είναι παραβολή (C) της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

δ) Αν $y^2 = 8x$ η εξίσωση της παραβολής (C) να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή η μεσοκάθετος του EP εφάπτεται της παραβολής (C) στο σημείο Π.

14. Δίνονται τα σημεία $M(-2, 2)$, $E\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ και η ευθεία (ζ) με εξίσωση $y = \frac{1}{2}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ_1) που διέρχεται από το σημείο M και σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$.

β) Να βρείτε την εξίσωση, που εκφράζει το σύνολο των σημείων του επιπέδου, που απέχουν ίση απόσταση από το σημείο E και την ευθεία (ζ).

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (η) της καμπύλης (C): $x^2 + 2y = 0$, που είναι παράλληλη στην ευθεία (ϵ_1), με εξίσωση $y = x + 4$.

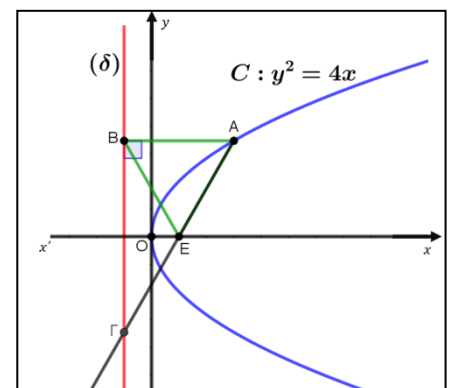
ii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της καμπύλης (C) και των ευθειών (ϵ_1) και (η). Με τη βοήθεια του σχήματος (ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο) να αποδείξετε ότι η ελάχιστη απόσταση των σημείων της (C) από την ευθεία (ϵ_1) είναι $\frac{7\sqrt{2}}{4}$.

15. Ένα σημείο $A(x_A, y_A)$ της παραβολής (C): $y^2 = 4x$ με $x_A > 0, y_A > 0$, έχει την εξής ιδιότητα: η ημιευθεία AE τέμνει την διευθετούσα (δ) στο σημείο Γ, έτσι όμως ώστε η εστία E της παραβολής (C), να είναι το μέσο του τμήματος AG. Επίσης, από το σημείο A φέρνουμε κάθετη στην διευθετούσα (δ) και έστω B το σημείο τομής, όπως δείχνει το σχήμα.

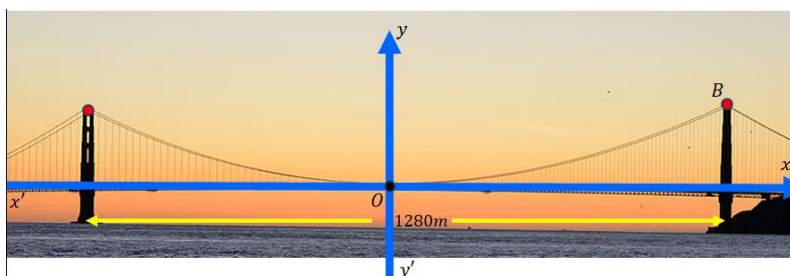
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABE είναι ισόπλευρο.

β) Να αποδείξετε ότι $x_A = 3, y_A = 2\sqrt{3}$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου ABΓ.

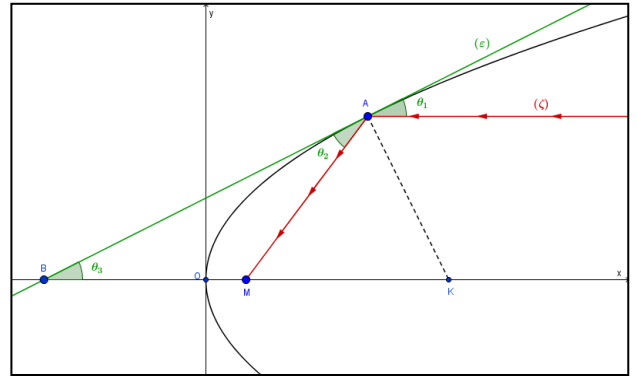


16. Στην Golden Gate γέφυρα του San Francisco, το κεντρικό καλώδιο θεωρούμε προσεγγιστικά ότι αποτελεί τμήμα παραβολής. Οι δύο βασικοί πυλώνες απέχουν μεταξύ τους 1.280 m, ενώ το ύψος του κάθε πυλώνα σε σχέση με το οδόστρωμα της γέφυρας είναι 160 m. Γνωρίζουμε ότι το κατώτερο σημείο του παραβολικού καλωδίου αγγίζει τη γέφυρα στο μέσο της απόστασης των δύο πυλώνων. Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων, όπως στο σχήμα.



- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής του κεντρικού καλωδίου σ' αυτό το σύστημα των αξόνων είναι $x^2 = 2560y$.
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας (δ) της παραβολής.
- γ) Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο B(640,160) τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι $EΔ = EB$.

17. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 4x$, η εφαπτομένη της (ε) στο σημείο A(4,4) και η AK κάθετη στην (ε). Μία φωτεινή ακτίνα (ζ), ακολουθώντας πορεία παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής, προσπίπτουσα στο σημείο A και ανακλώμενη πάνω στην καμπύλη (που αντιστοιχεί σε παραβολικό κάτοπτρο) διέρχεται από το σημείο M. Αν γνωρίζετε ότι η γωνία θ_1 που σχηματίζει η προσπίπτουσα φωτεινή ακτίνα (ζ) με την (ε) και η γωνία θ_2 που σχηματίζει η ανακλώμενη φωτεινή ακτίνα AM με την (ε) είναι ίσες, τότε:



- α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και το σημείο B στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x'x.
- γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές.
- δ) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ταυτίζεται με την εστία της παραβολής.

18. Δίνεται η παραβολή (C): $y^2 = 4x$ και η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y + \lambda^2 + 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας (δ) της παραβολής (C).
- β) Να αποδείξετε ότι η (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία (ε_λ) που δεν διέρχεται από το $O(0,0)$.
- γ) Να αποδείξετε ότι η διευθετούσα της παραβολής δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών (ε_λ) .
- δ) Έστω $M(\alpha, \beta)$ σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στην παραπάνω διευθετούσα (δ). Αν από το M διέρχεται μόνο μία ευθεία από την οικογένεια ευθειών (ε_λ) , να δείξετε ότι το M ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο την κορυφή της παραβολής (C) και διέρχεται από την εστία της E.

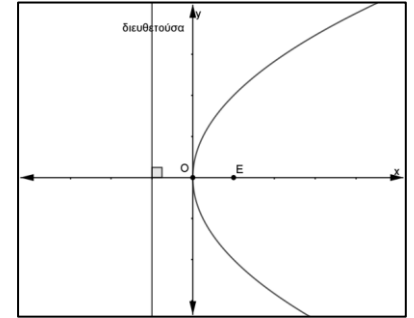
19. Δίνεται η παραβολή (C): $x^2 = 4y$ και η ευθεία (ε): $y = x - 2$.

- α) Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα (δ) της παραβολής.
- β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία. Στη συνέχεια σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις της παραβολής (C) και της ευθείας (ε).
- γ) Αν $M(x, y)$ είναι σημείο της παραβολής, τότε:

i. να αποδείξετε ότι η απόσταση του M από την ευθεία (ε) είναι $d(M,(\varepsilon)) = \frac{\frac{1}{4}x^2 - x + 2}{\sqrt{2}}$,

ii. να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου M από την ευθεία (ε) καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου M της παραβολής που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία .

20. Έστω παραβολή (C) με κορυφή την αρχή των αξόνων O και άξονα συμμετρίας τον $x'x$. Η απόσταση της εστίας E από την διευθετούσα (δ) της παραβολής (C) είναι 4 και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.



α) Να δικαιολογήσετε ότι η εστία της είναι η $E(2,0)$, η διευθετούσα της είναι η $(\delta): x = -2$ και η εξίσωσή της παραβολής είναι $y^2 = 8x$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της $A(2,4)$ είναι η $(\varepsilon): y = x + 2$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην ευθεία (ε) εστο σημείο της $A(2,4)$.

21. Δίνεται η παραβολή (C) που έχει εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

α) Να σχεδιάσετε πρόχειρα την παραπάνω παραβολή και να γράψετε τις συντεταγμένες της εστίας της E και την εξίσωση της ευθείας της διευθετούσας (δ) .

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(0,2)$ και εφάπτονται στην παραβολή που περιγράφει η εξίσωση (1).

22. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$, το σημείο της $M\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ και η ευθεία ε του επιπέδου με εξίσωση $(\varepsilon): \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0$.

α) i. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) δεν έχει κοινά σημεία με την παραβολή και να βρείτε την απόστασή του σημείου M από την (ε) .

ii. Αν η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $(M\Gamma\Delta) = 5 \tau.μ.$

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) που εφάπτεται της παραβολής και είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) .

ii. Ποια είναι η απόσταση των ευθειών (ζ) και (ε) ;

23. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$ και η ευθεία $(\varepsilon): 3x - 4y = \mu, \mu \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του.
- β) Αν η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο σε δύο διαφορετικά σημεία A, B,
- να αποδείξετε ότι $-35 < \mu < 15$,
 - να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία (ε) διέρχεται από το κέντρο του.
 - να βρεθεί σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε, το τρίγωνο ΓAB να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή AB.
24. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A(-2, 2)$, $B(0, -4)$ και την παραβολή $y^2 = 4x$.
- α) Να βρείτε την παράμετρο, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.
- β) Να βρείτε το σημείο M της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην AB.
- γ) Αν $M(1, -2)$ και K είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ευθείας του προηγούμενου ερωτήματος με τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ABMK είναι παραλληλόγραμμο.
25. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η παραβολή $(C): y^2 = 12x$ με εστία E και η εφαπτομένη ευθεία (ε) της (C) στο σημείο της $M(1, 2\sqrt{3})$, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B. Από το σημείο M φέρνουμε ευθεία t' παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, η οποία τέμνει την διευθετούσα (δ) στο σημείο H.
- α) Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση $y = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}$.
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B, H, E.
- γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο MEBH είναι ρόμβος.
- δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) η οποία διχοτομεί την γωνία \widehat{EMt} .

