1.5 Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

1. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(-4,3)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 1.

2. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δυο διανύσματα για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(11,2)$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(-5,-10)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}=(3,-4)$ και να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\beta}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ και $|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|$.

3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,-2)$ και $\vec{\beta}=(2,3)$.

α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

β) Αν $\vec{u}=(4,-1)$ να βρείτε την τιμή του $\kappa\in R$ ώστε το διάνυσμα $\vec{u}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{v}=(1,\kappa)$.

γ) Για $\kappa=4$ να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}$ του προηγούμενου ερωτήματος.

4. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$ και $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

α) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$ συναρτήσει του διανύσματος $\vec{\beta}$.

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα.

5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,1)$ και $\vec{\beta}=(-8,-4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{\beta}|=4|\vec{\alpha}|$.

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}<0$.

6. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=(2,1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(3,-1)$.

α) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma}=(1,-2)$.

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την ΑΓ.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

7. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,2)$, $\vec{\beta}=(-2,1)$.

Να υπολογίσετε:

α) το διάνυσμα $\vec{v}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$,

β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$,

γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}$,

8. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy, με μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$, $y'y$ τα $\vec{i}$, $\vec{j}$ αντίστοιχα, τα σημεία Α και Β έχουν διανύσματα θέσεως $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}+2\vec{j}$ και $\overrightarrow{OB}=6\vec{i}-\vec{j}$. Έστω Μ ένα σημείο τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{5}\left(2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}-3\vec{j}$, **ii.** $\overrightarrow{OM}=\vec{j}$.

β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OM}$.

9. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1,3)$, $\vec{\beta}=\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ και $\vec{v}=\left(x^2,x-1\right)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$.

β) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{u}=(3,4)$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα.

γ) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά;

10. Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(3,4)$ και $\Gamma(5,-2)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή.

β) Αν Μ είναι το μέσο του ΒΓ, να βρείτε τα μέτρα των $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

γ) Να γραφεί το $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AM}$.

11. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}|=4$, $|\vec{\beta}|=5$, $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{2\pi}{3}$ και $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$.

Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$,

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

12. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(1,1)$, $\vec{w}=(-10,2)$ και τα σημεία $A(-1,2)$, $B(\beta,0)$, $\Gamma(0,\gamma)$. Τα διανύσματα $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα και το διάνυσμα $\vec{w}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και να αποδείξετε ότι $\beta=1$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι $\gamma=\frac{9}{5}$.

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.

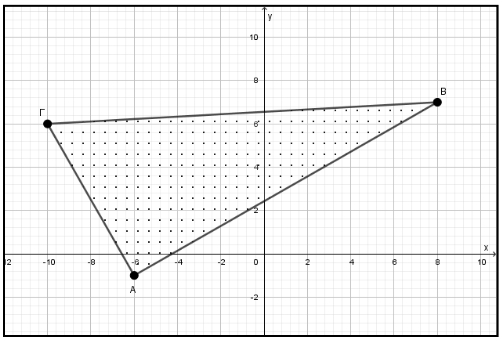
13. Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(6,3)$, $\Delta(1,-2)$, $\Gamma(9,2)$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες $(4,2)$ και το μέσο N του τμήματος $\Gamma\Delta$ έχει συντεταγμένες $(5,0)$,

β) $\overrightarrow{MN}=(1,-2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=(8,4)$,

γ) $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

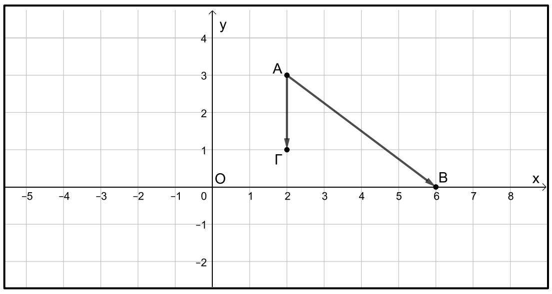
14. Δίνονται τα σημεία $A(-6,-1)$, $B(8,7)$, $\Gamma(-10,6)$, τα οποία ορίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και του αθροίσματος τους $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$.

β) Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο.
Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού.

15. Στο σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ του καρτεσιανού επιπέδου Οxy.



α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}=(4,-3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(0,-2)$.

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

16. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με: $|\vec{\alpha}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{\beta}|=\frac{1}{2}$ και $|3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-\frac{3}{8}$.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

17. Δίνονται τα σημεία $A(-2,3)$, $B(0,8)$, $\Gamma(5,3)$ και $\Delta(10,5)$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

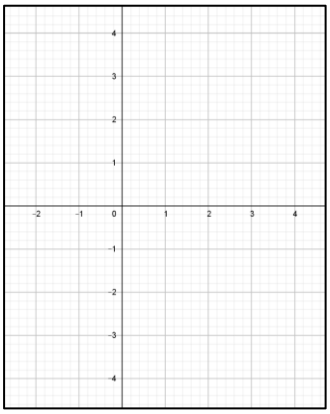
β) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ με τον άξονα $x'x$.

18. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-1)$ και $\vec{\beta}=(-3,2)$.

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\left(2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)$.

β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma}=\left(x,y\right)$ όταν $\vec{\gamma}\perp\vec{\alpha}$ και $\left|\vec{\gamma}\right|=\sqrt{5}$.

19. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v}=\left(3,0\right)$ και $\vec{w}=\left(-3,4\right)$.



α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα.

β) **i.** Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$.

ii. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας θ που σχηματίζουν τα διανύσματα.

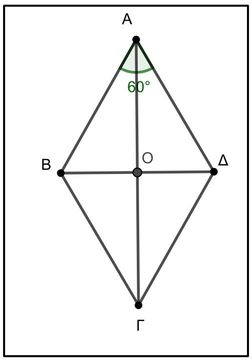
20. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $A\left(-2,5\right)$, $B\left(7,8\right)$, $\Gamma\left(1,-4\right)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.

γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$.

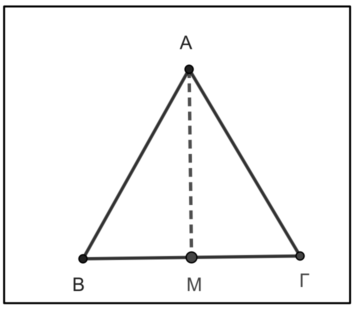
21. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο, πλευρά 4 και $\hat{A}=60^{o}$. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :



α) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$, **β)** $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$, **γ)** $\overrightarrow{O\Delta}\cdot\overrightarrow{AO}$,

δ) $\overrightarrow{O\Delta}\cdot\overrightarrow{OB}$, **ε)** $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

22. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 10 και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.



α) Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

i. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)$ **ii.** $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B\Gamma}\right)$ **iii.** $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{\Gamma A}\right)$

iv. $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{\Gamma M}\right)$ **v.** $\left(\overrightarrow{\Gamma M},\overrightarrow{\Gamma B}\right)$

β) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

i. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$ **ii.** $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}$ **iii.** $\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}$

23. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $\left|\vec{\alpha}\right|=2$, $\left|\vec{\beta}\right|=4$, $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ και το $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=4$.

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$.

γ) Να βρείτε τη $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}}\right)$.

24. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,3)$, $\vec{\beta} = (3,-1)$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

β) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

25. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (2,1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (3,-1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} = (1,-2)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{B\Gamma}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{B\Gamma}|$.

26. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,2)$ και $\vec{\beta} = (2,3)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.

27. Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ τέτοια ώστε $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 4$, $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

β) Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\left(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right) \cdot \left(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}\right) = 15$.

28. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$, $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$ και τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

α) Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

β) Να βρείτε το $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$.

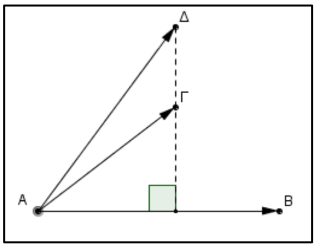
γ) Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|$, $|\vec{\delta}|$.

δ) Να βρείτε τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\gamma}, \vec{\delta}}\right)$.

29. **α)** Αν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{A\Delta}$ είναι τρία διανύσματα, τότε οι ποσότητες $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$:

i. είναι αριθμοί ή διανύσματα; **ii.** μπορούν να συγκριθούν;

β) Για τα διανύσματα του σχήματος να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

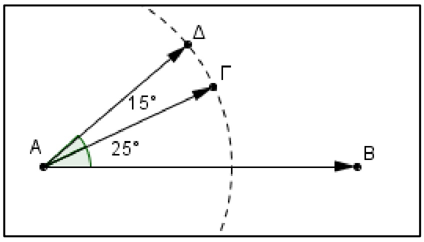


i. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} > \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$

ii. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} < \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$

iii. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$

γ) Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος (η διακεκομμένη γραμμή είναι τμήμα κύκλου με κέντρο Α. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:



i. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} > \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$

ii. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} < \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$

iii. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$

Σε όλα τα ερωτήματα, να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

30. **α)** Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Να αποδείξετε ότι:

i. $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \nearrow\nearrow \vec{\beta}$,

ii. $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = \big||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\big| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \nearrow\swarrow \vec{\beta}$.

β) Θεωρούμε τρία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν ότι: $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $|\vec{\gamma}|=1$.

Να αποδείξετε ότι:

i. $\vec{\alpha} \nearrow\nearrow \vec{\gamma}$ **ii.** $\vec{\alpha} \nearrow\swarrow \vec{\beta}$ **iii.** $\vec{\alpha}=\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}=-2\vec{\alpha}$

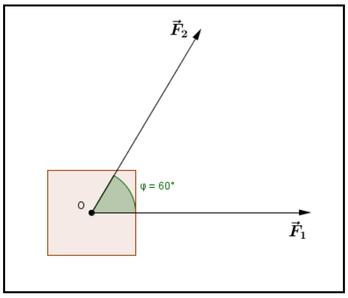
31. **α)** Να αποδειχθεί ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει: $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2$ (1).

β) Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ με $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$.

i. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

ii. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας (1).

γ) Ένα σώμα σύρεται πάνω σε λείο επίπεδο από δύο ανθρώπους, οι οποίοι εξασκούν πάνω σε αυτό δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα 10 N (Newton) και η γωνία που σχηματίζουν είναι 60^{o}. Να σχεδιάσετε την συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ και να βρείτε το μέτρο της.



32. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ με $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα.

α) Να δείξετε ότι:

i. $\left|\overrightarrow{ΟΓ}\right|^2 = |\vec{α}|^2 + 2\vec{α}\cdot\vec{β} + |\vec{β}|^2$.

ii. $\left|\overrightarrow{ΑΒ}\right|^2 = |\vec{α}|^2 - 2\vec{α}\cdot\vec{β} + |\vec{β}|^2$.

β) Αν $\left|\overrightarrow{ΟΓ}\right| = \left|\overrightarrow{ΑΒ}\right|$, να δείξετε ότι το $ΟΑΓΒ$ είναι ορθογώνιο.

33. Δίνονται τα σημεία $Α(0,-1)$, $Β(λ,1)$, $Γ(λ-2, λ-3)$, όπου $λ \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $λ \in \mathbb{R}$ ώστε :

i. τα σημεία Α, Β και Γ να είναι κορυφές τριγώνου.

ii. το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με $\hat{Α} = 90^o$.

β) Για $λ = -2$, να βρείτε:

i. το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{ΑΒ}\cdot\overrightarrow{ΑΓ}$.

ii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.