

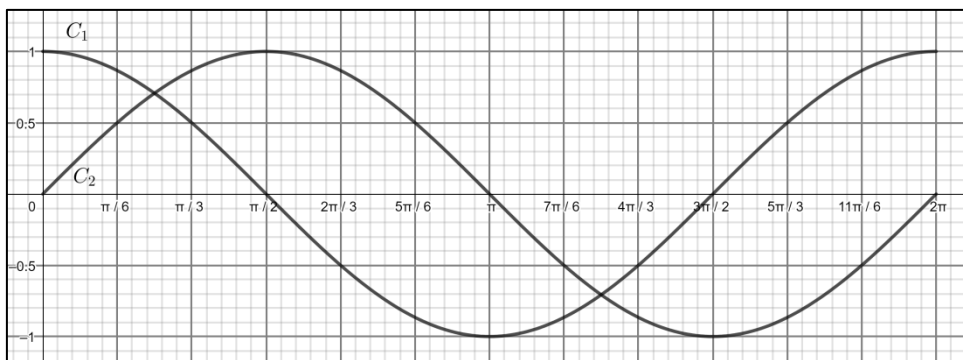
3.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu(2x)$, $x \in \mathbb{R}$.

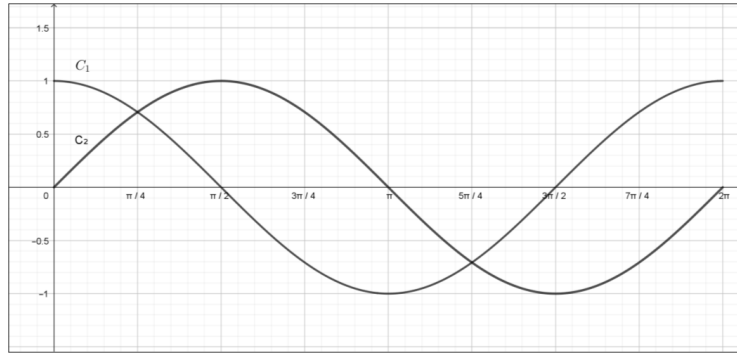
 - Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .
 - Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3 \cdot \eta\mu\chi$.

 - Να βρείτε την περίοδο T της f .
 - Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .
 - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο $[0, 2\pi]$.
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \cdot \eta\mu\chi$.

 - Να βρείτε την περίοδο T της f .
 - Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .
 - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο $[0, 2\pi]$.
- Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει τις γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 δύο συναρτήσεων στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

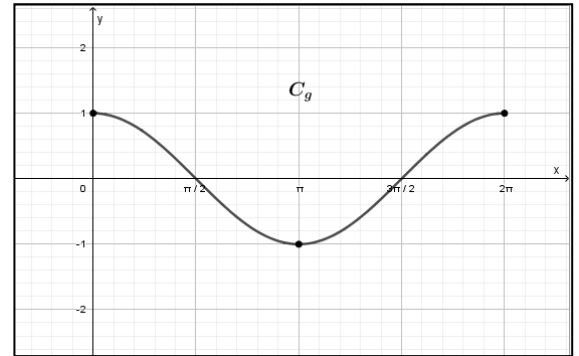


- Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων $f(x) = \sigma\upsilon\nu\chi$ και $g(x) = \eta\mu\chi$, ποια από τις C_1 , C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = \sigma\upsilon\nu\chi$ και ποια της $g(x) = \eta\mu\chi$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 - Με την βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις τιμές $g\left(\frac{\pi}{6}\right)$ και $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.
- Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 στο διάστημα $[0, 2\pi]$.



- α) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων $f(x) = \text{συν}x$ και $g(x) = \eta\mu x$, ποια από τις C_1, C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = \text{συν}x$ και ποια της $g(x) = \eta\mu x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β) Με την βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής των C_1, C_2 στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

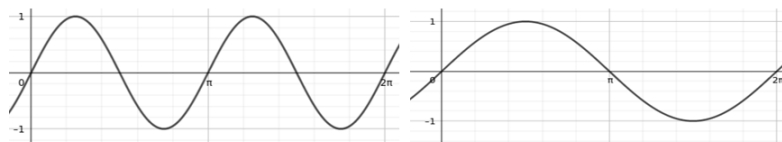
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \text{συν}x - 1, x \in [0, 2\pi]$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \text{συν}x, x \in [0, 2\pi]$



- α) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f καθώς επίσης και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.

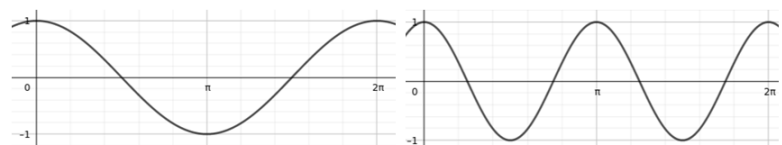
7. Στα παρακάτω 4 σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = \eta\mu x, g(x) = \text{συν}x, h(x) = \eta\mu(2x), \varphi(x) = \text{συν}(2x)$, όχι με αυτήν τη σειρά αναγκαία.

- α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι περίοδοι των παραπάνω συναρτήσεων είναι: $T_f = T_g = 2\pi, T_h = T_\varphi = \pi$.



Σχήμα 1

Σχήμα 2



Σχήμα 3

Σχήμα 4

- β) Να βρείτε ποιο από τα τέσσερα σχήματα αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της $h(x) = \eta\mu(2x)$.

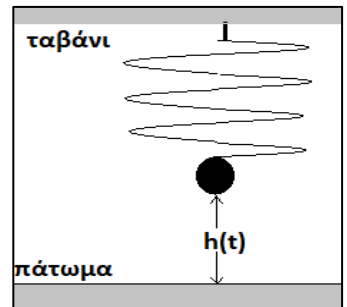
8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$.

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τον παρακάτω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

| | | | | | |
|------|---|-----------------|-------|------------------|--------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | π | $\frac{3\pi}{2}$ | 2π |
| f(x) | | | | | |

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x)$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

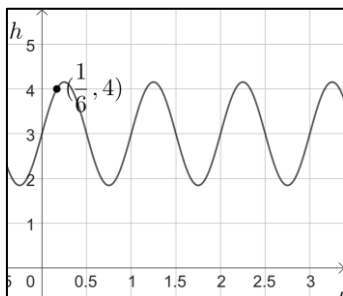
9. Μια μπάλα που κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι ανεβοκατεβαίνει και η απόστασή της h σε μέτρα από το πάτωμα τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση $h(t) = \alpha + 2\eta\mu(\pi t)$, όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα. Αν τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{6}$ η μπάλα απέχει από το πάτωμα 4 μέτρα, τότε:



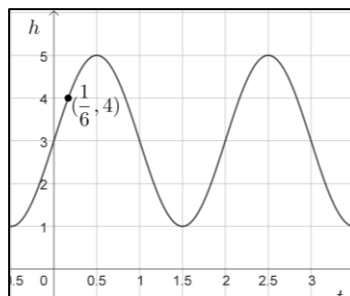
α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ και ότι η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T = 2$.

β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί στη συνάρτηση h ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

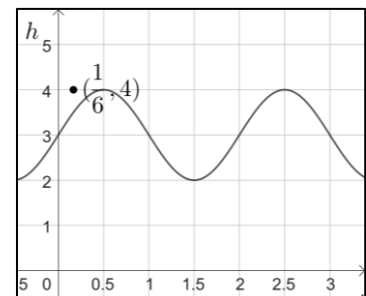
A.



B.



Γ.



γ) Με βάση τη γραφική παράσταση που επιλέξατε στο ερώτημα β), ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη απόσταση της μπάλας από το έδαφος; Πόση είναι η συνολική απόσταση που διανύει η μπάλα κατά τη διάρκεια μιας ταλάντωσης;

10. Στο σχήμα έχει σχεδιασθεί στο διάστημα $\left[0, \frac{4\pi}{3}\right]$ η

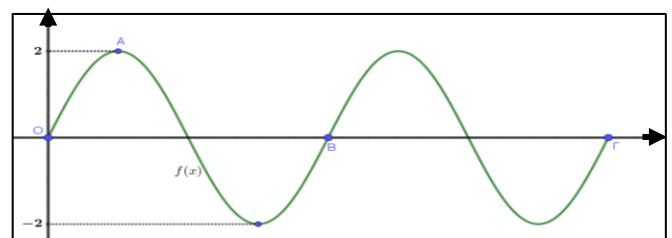
γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$

όπου $\rho > 0$, $\omega > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι τα σημεία A,

B, Γ έχουν τις εξής συντεταγμένες:

$$A\left(\frac{\pi}{6}, 2\right), B\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right), \Gamma\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right).$$

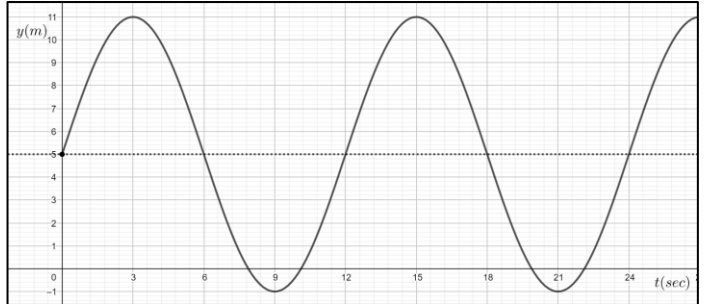
α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2 \cdot \eta\mu(3x)$.



β) Να βρείτε τους αριθμούς $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

γ) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το σχήμα, στο οποίο να σχεδιάσετε και την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}\right]$.

11. Η απόσταση y , σε μέτρα, της άκρης του φτερού ενός νερόμυλου από την επιφάνεια του νερού, δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου t , σε δευτερόλεπτα, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων.



α) Με βάση το σχήμα να βρείτε:

i. την περίοδο T της συνάρτησης.

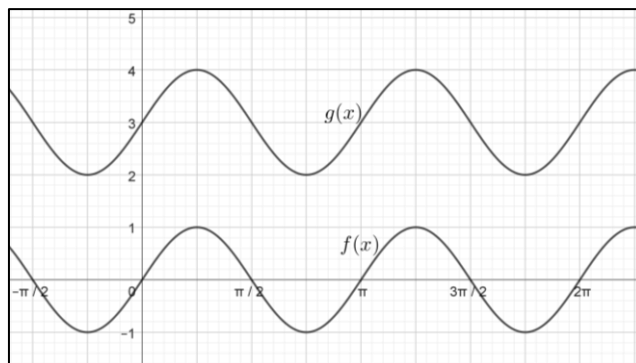
ii. Ποια χρονική στιγμή $t \in [0, 12]$ η άκρη του φτερού έχει την μεγαλύτερη απόσταση από την επιφάνεια του νερού και ποια είναι η απόσταση αυτή.

iii. Ποια χρονική $t \in [0, 12]$ η άκρη του φτερού βρίσκεται 1 μέτρο κάτω από την επιφάνεια του νερού.

β) Να βρείτε τη διάμετρο του νερόμυλου.

γ) Αν η συνάρτηση είναι της μορφής $y = \rho \eta\mu(\omega t) + 5$, $\rho, \omega > 0$, να βρείτε τους αριθμούς ω και ρ .

12. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \eta\mu(\omega x)$ και της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = \eta\mu(\omega x) + c$ με $\omega, c \in \mathbb{R}$.



α) Να βρείτε:

i. την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή, καθώς και την περίοδο T της συνάρτησης f ,

ii. την τιμή της παραμέτρου ω ,

β) Αν $\omega = 2$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g προκύπτει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f , τότε:

i. να προσδιορίσετε το είδος της μετατόπισης με την οποία προκύπτει η γραφική παράσταση της g από τη γραφική παράσταση της f ,

ii. να βρείτε την τιμή της παραμέτρου c και τον τύπο της συνάρτησης g .

13. Το βάθος y , σε μέτρα, του νερού σε ένα λιμάνι επηρεάζεται από το φαινόμενο της παλίρροιας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (εντός 24 ωρών) και δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες) από τη σχέση: $y = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4$, με $0 \leq t \leq 24$.

α) i. Να αιτιολογήσετε γιατί η περίοδος της συνάρτησης είναι $T = 12$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|----|
| t | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 |
| y | | | | | |

iii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $y = 2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4$, με $0 \leq t \leq 24$.

β) i. Ποιο θα είναι το βάθος του νερού στις 12 το μεσημέρι, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = 12$;

ii. Ένα μεγάλο πλοίο χρειάζεται τουλάχιστον 4 μέτρα βάθος νερού για να δέσει στο λιμάνι. Στη διάρκεια ποιού χρονικού διαστήματος από τις 12 το μεσημέρι και μετά θα μπορεί να δέσει με ασφάλεια;

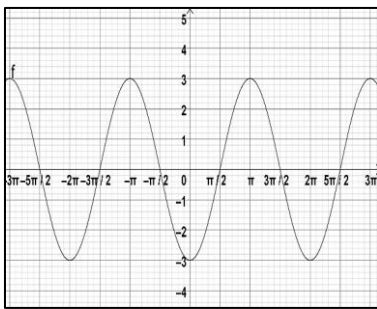
14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

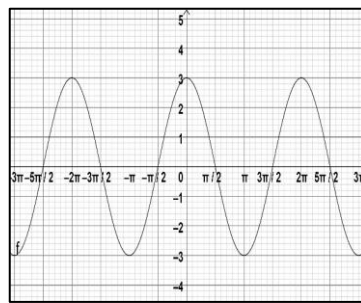
β) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .

γ) Από τις παρακάτω τέσσερις γραφικές παραστάσεις μία μόνο αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της f , να επιλέξετε αυτή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu x$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

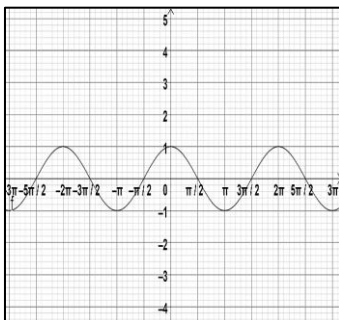
A.



B.



Γ.



Δ.

