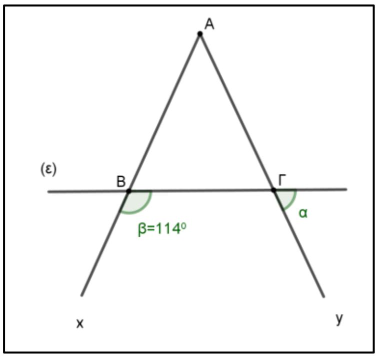
4.6 Άθροισμα γωνιών τριγώνου

1. Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ημιευθείες Αx και Αy τέμνονται από την ευθεία (ε) στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Έστω ότι οι γωνίες $\hat{\beta}$ και $\hat{\alpha}$ είναι παραπληρωματικές με $\hat{\beta} = 114^o$.

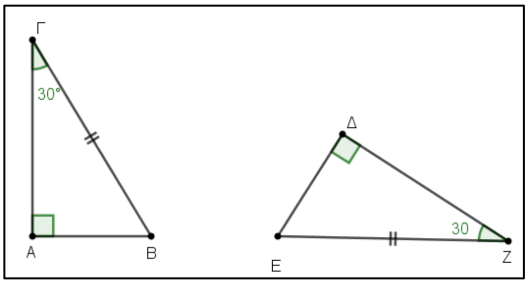


α) Να αιτιολογήσετε γιατί είναι $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B = 66^o$.

β) Τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$.

2. Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με $B\Gamma = EZ$ και $\hat{\Gamma} = \hat{Z} = 30^o$.

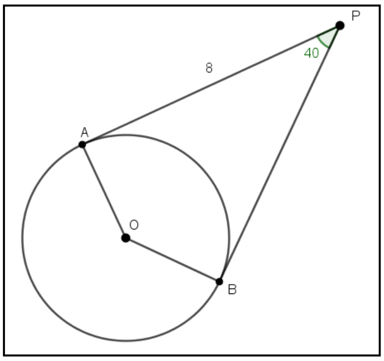


α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{E}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

γ) Αν είναι $AB = 5$, τότε να βρείτε το μήκος της ΔΕ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας ρ. Από σημείο Ρ εκτός του κύκλου φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν είναι $PA = 8$ και $A\hat{P}B = 40^o$, τότε να υπολογίσετε:

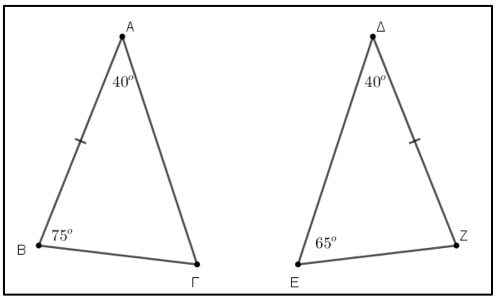


α) το εφαπτόμενο τμήμα ΡΒ,

β) την $A\hat{P}O$,

γ) την $P\hat{O}B$.

4. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΖΕ με $AB = \Delta Z$, $\hat{B} = 75^o$, $\hat{A} = 40^o$, $\hat{\Delta} = 40^o$ και $\hat{E} = 65^o$.

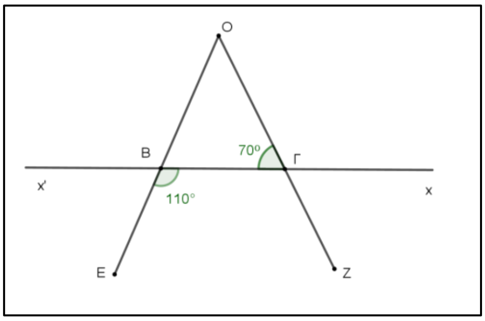


α) Να αποδείξετε ότι $\hat{Z} = 75^o$.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΖΕ είναι ίσα.

γ) Αν $A\Gamma = 8$, να υπολογίσετε την ΔΕ.

5. Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα ΟΕ και ΟΖ τέμνονται από την ευθεία $x'x$ στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Αν είναι $E\hat{B}\Gamma = 110^o$ και $O\hat{\Gamma}B = 70^o$ τότε:

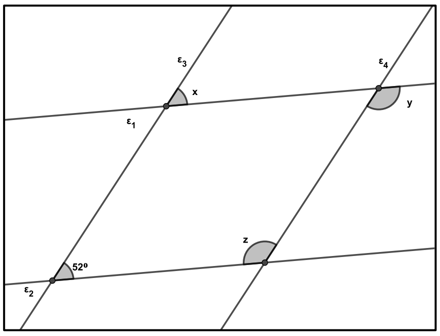


α) Να αιτιολογήσετε γιατί είναι $O\hat{B}\Gamma = 70^{o}$.

β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΟΒΓ ως προς τις πλευρές του. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{O}\Gamma$ του τριγώνου ΟΒΓ.

6. Στο παρακάτω σχήμα ισχύει $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 // \varepsilon_4$.

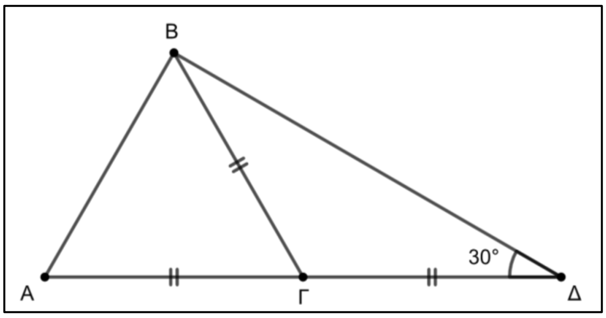


α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{x}$ δικαιολογώντας την απάντησή σας.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{z}$ δικαιολογώντας την απάντησή σας.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{y}$ δικαιολογώντας την απάντησή σας.

7. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι $A\Gamma = \Gamma B = \Gamma\Delta$ και $\hat{\Delta} = 30^{o}$.

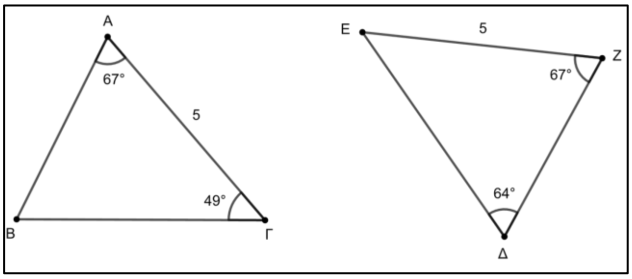


α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{B}\Gamma = 30^{o}$ και $\Delta\hat{\Gamma}B = 120^{o}$.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{\Gamma}A$.

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

8. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ του σχήματος με $A\Gamma = 5$, $\hat{A} = 67^{o}$, $\hat{\Gamma} = 49^{o}$, $EZ = 5$, $\hat{\Delta} = 64^{o}$ και $\hat{Z} = 67^{o}$.



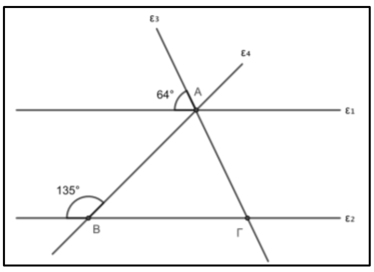
α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = 64^{o}$ και $E = 49^{o}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

γ) Να αντιγράψετε και να συμπληρώσετε στην κόλλα σας τις δύο επόμενες ισότητες, οι οποίες προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα της ισότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ, και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας:

$B\Gamma = ...$, $AB = ...$.

9. Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 οι οποίες τέμνονται από τις ευθείες ε_3 και ε_4 στα σημεία Α, Β και Γ όπως φαίνεται στο σχήμα.

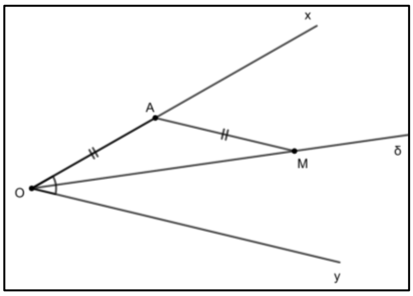


α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma\hat{B}A = 45^{o}$ και $A\hat{\Gamma}B = 64^{o}$.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$.

γ) Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

10. Σχεδιάζουμε γωνία $x\hat{O}y = 40^o$ και παίρνουμε τυχαίο σημείο Α πάνω στην πλευρά Οx. Φέρουμε τη διχοτόμο Οδ της γωνίας $x\hat{O}y$ και θεωρούμε σημείο Μ στην Οδ, τέτοιο ώστε ΑΟ = ΑΜ.

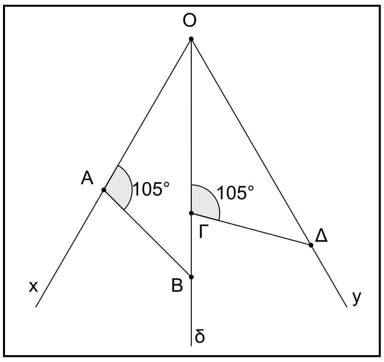


α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\delta\hat{O}y$.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΟΜ.

γ) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΑΟΜ ως προς τις γωνίες του και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

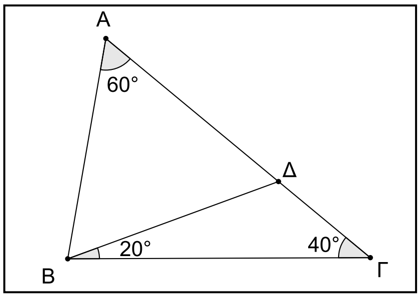
11. Στο σχήμα, η γωνία $x\hat{O}y$ είναι 60^o. Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$ και ισχύει ΟΑ = ΟΓ. Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:



α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΟΑΒ ,

β) να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ και να αιτιολογήσετε γιατί είναι ΑΒ = ΓΔ.

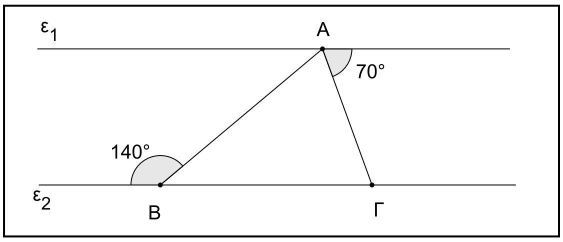
12. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 60^o$ και $\hat{\Gamma} = 40^o$. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ, ώστε $\Gamma\hat{B}\Delta = 20^o$.



α) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{\Delta}B$.

β) Τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΒΔ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

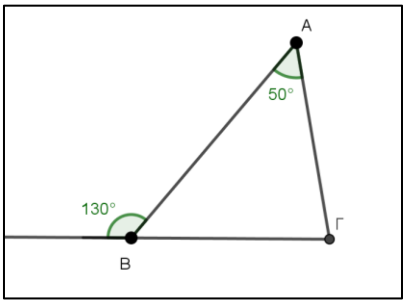
13. Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ε_1 διέρχεται από την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ και είναι παράλληλη στην ευθεία ε_2 που ορίζεται από τις κορυφές Β και Γ.



α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

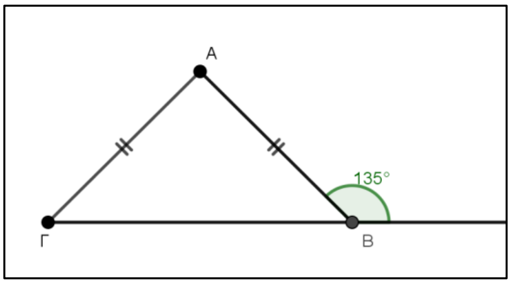
14. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 130^o$ και $\hat{A} = 50^o$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσκελές και να γράψετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του και ποια είναι η βάση του.

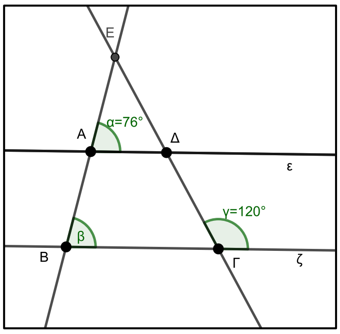
15. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος, δίνεται ότι $AB = A\Gamma$ και $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 135^o$.



α) Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές καθώς και το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

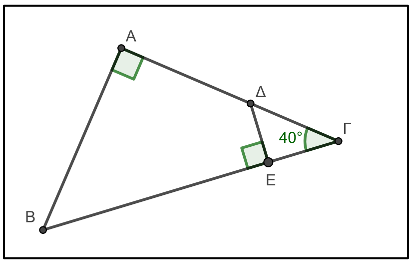
16. Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες ε και ζ είναι παράλληλες με $\hat{\alpha} = 76^o$ και $\hat{\gamma} = 120^o$. Να βρείτε:



α) Πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{\beta}$, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

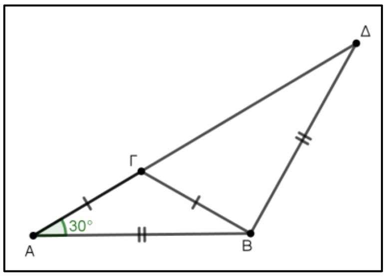
β) Πόσες μοίρες είναι η γωνία $B\hat{E}\Gamma$, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

17. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ και $\hat{\Gamma} = 40^o$. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΓ, φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στη ΒΓ. Να υπολογίσετε :



α) τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ,
β) τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΔΕΒ.

18. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΒΑΔ με $BA = B\Delta$. Έστω Γ ένα εσωτερικό σημείο της ΑΔ τέτοιο ώστε $\Gamma A = \Gamma B$. Αν η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΒΑΔ είναι ίση με 30^o.

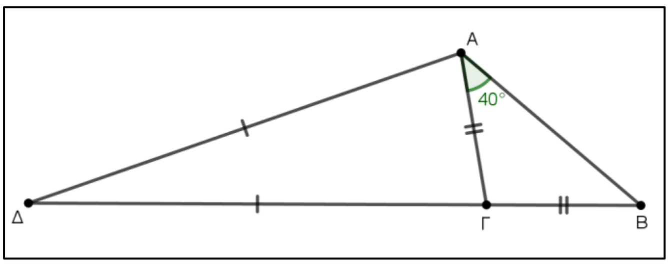


α) Να υπολογίσετε:

i. τις γωνίες του τριγώνου ΓΑΒ ,
ii. τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΔ.

β) Ποια είναι η σχέση της γωνίας $A\hat{B}\Delta$ με τη γωνία $\hat{A}$;

19. Δίνονται ισοσκελές τρίγωνο ΔΑΓ με $\Delta A = \Delta\Gamma$. Στην προέκταση της ΔΓ προς το μέρος του Γ θεωρούμε



σημείο Β τέτοιο ώστε $\Gamma B = \Gamma A$. Αν $\Gamma\hat{A}B = 40^o$, να υπολογίσετε:

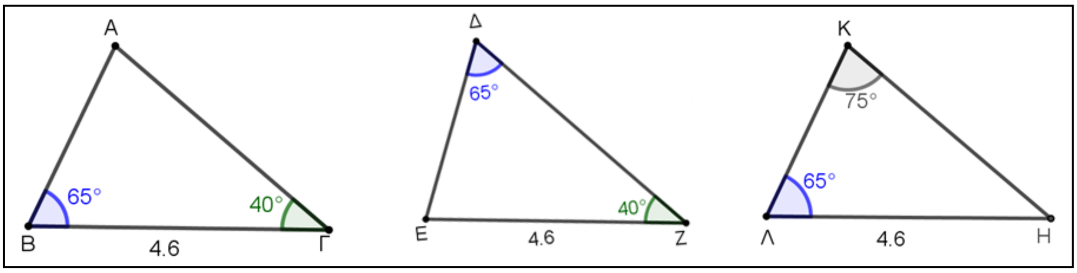
α) τις γωνίες του τριγώνου ΓΑΒ.

β) τις γωνίες του τριγώνου ΔΑΓ.

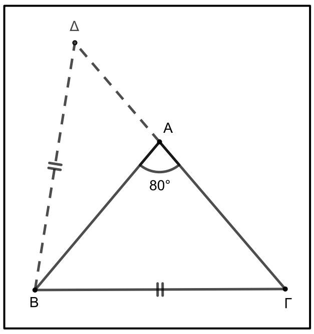
20. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ και ΚΛΗ στα οποία είναι σημειωμένες δύο γωνίες τους και επιπλέον οι πλευρές ΒΓ, ΕΖ και ΛΗ είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή $B\Gamma = EZ = \Lambda H = 4,6$.

α) Να υπολογίσετε τις τρίτες γωνίες τους $\hat{A}$, $\hat{E}$ και $\hat{H}$ αντίστοιχα των τριών τριγώνων.

β) Δύο από τα τρίγωνα του παρακάτω σχήματος είναι ίσα μεταξύ τους.
Να γράψετε ποια είναι αυτά δικαιολογώντας την απάντησή σας.



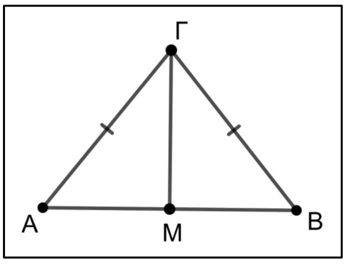
21. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ με γωνία $\hat{A} = 80^o$. Έστω Δ σημείο στην προέκταση της πλευράς ΑΓ προς το μέρος του Α, τέτοιο ώστε $B\Delta = B\Gamma$.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Gamma\hat{B}\Delta$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{A}$.

22. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $A\Gamma = B\Gamma$ και η γωνία $\Gamma\hat{A}B$ είναι η ίση με 55^o.

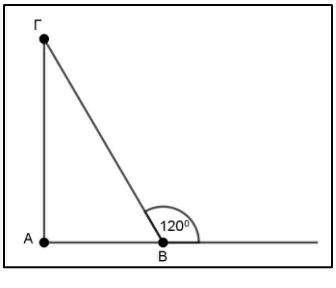


α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Gamma\hat{B}A$.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{\Gamma}B$.

γ) Αν επιπλέον το ΓΜ είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{\Gamma}M$.

23. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η εξωτερική γωνία της Β ισούται με 120^o.



α) Να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Αν η γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου είναι ίση με 30^o να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

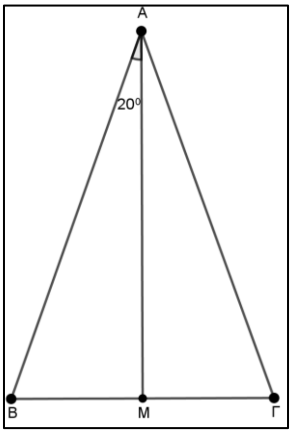
24. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$ και η ΑΜ είναι διχοτόμος του τριγώνου.

α) Αν η $ΑΓ = 5$, να υπολογίσετε το μήκος της ΑΒ.

β) Αν η γωνία $Β\hat{Α}Μ$ είναι ίση με 20^o, να υπολογίσετε:

i. πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{Α}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

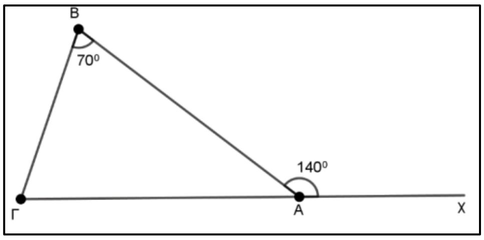
ii. πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.



25. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η εξωτερική γωνία της $\hat{Α}$, είναι ίση με 140^o. Επίσης η γωνία του $\hat{Β}$ ισούται με 70^o.

α) Να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{Α}$ του τριγώνου.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



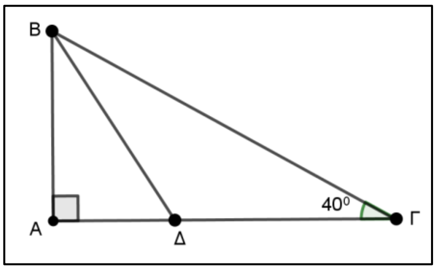
26. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α} = 90^o$ και $\hat{Γ} = 40^o$, η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Β}$.

Αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας να υπολογίσετε:

α) πόσες μοίρες είναι η γωνία $Α\hat{Β}Γ$,

β) πόσες μοίρες είναι η γωνία $Α\hat{Β}Δ$,

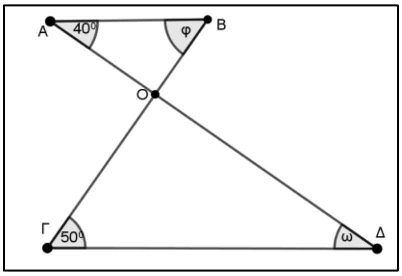
γ) πόσες μοίρες είναι η γωνία $Β\hat{Δ}Α$,



27. Δίνονται τα παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ του παρακάτω σχήματος. Αν τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο Ο, τότε:

α) Να υπολογίσετε σε μοίρες τις γωνίες ω και φ.

β) Να δικαιολογήσετε γιατί το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ.

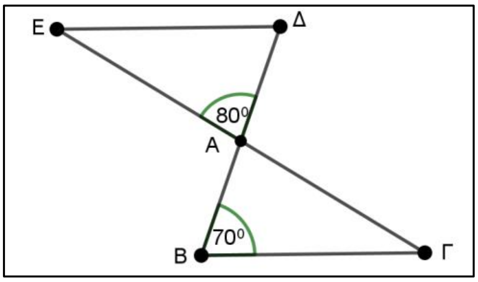


28. Στο παρακάτω σχήμα το Α είναι μέσο των ευθυγράμμων τμημάτων ΒΔ και ΓΕ. Αν η γωνία $Α\hat{Β}Γ$ ισούται με 70^o και η γωνία $Δ\hat{Α}Ε$ ισούται με 80^o τότε:

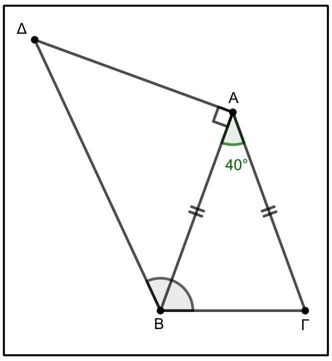
α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{Α}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{Γ}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.



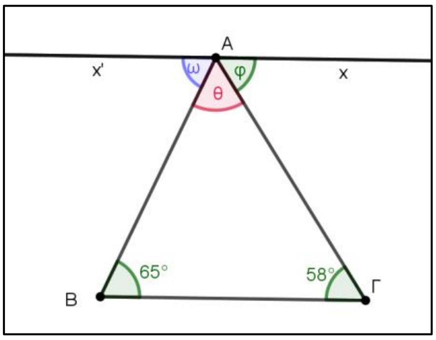
29. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 40^o$.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Με πλευρά την ΑΒ και εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΒΑΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να δικαιολογήσετε γιατί η γωνία $\Delta\hat{B}\Gamma$ είναι ίση με 115^o.

30. Στο σχήμα που ακολουθεί, η $x'x$ διέρχεται από την κορυφή Α και είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ. Αν ξέρετε ότι για τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 65^o$ και $\hat{\Gamma} = 58^o$.



α) Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας :

i. Είναι κάποια από τις σημειωμένες γωνίες $\hat{\omega}$, $\hat{\varphi}$ ή $\hat{\theta}$ ίση με 65^o;

ii. Είναι κάποια από τις σημειωμένες γωνίες $\hat{\omega}$, $\hat{\varphi}$ ή $\hat{\theta}$ ίση με 58^o;

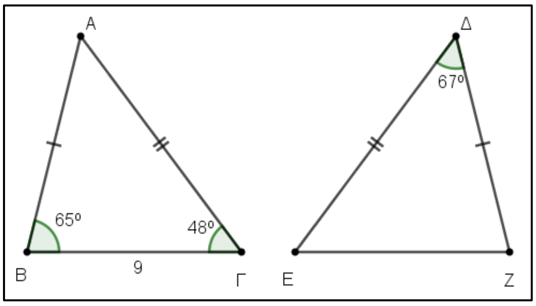
β) Να γράψετε πόσες μοίρες είναι καθεμία από τις γωνίες $\hat{\omega}$, $\hat{\varphi}$ και $\hat{\theta}$.

31. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 80^o$. Έστω ΒΔ το ύψος του τριγώνου από την κορυφή Β. Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ,

β) τη γωνία $\Delta\hat{B}\Gamma$.

32. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΖΕ με $AB = \Delta Z$, $A\Gamma = \Delta E$, $\hat{B} = 65^o$, $\hat{\Gamma} = 48^o$, $\hat{\Delta} = 67^o$.

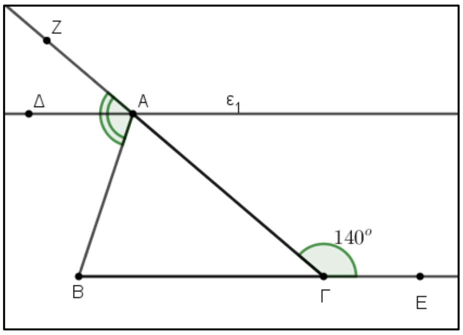


α) Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 67^o$.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΖΕ είναι ίσα.

γ) Αν $B\Gamma = 9$, να υπολογίσετε την πλευρά ΕΖ.

33. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε_1 παράλληλη προς τη ΒΓ που διέρχεται από το Α. Αν $A\hat{\Gamma}E = 140^o$ και $B\hat{A}Z = 110^o$, τότε:



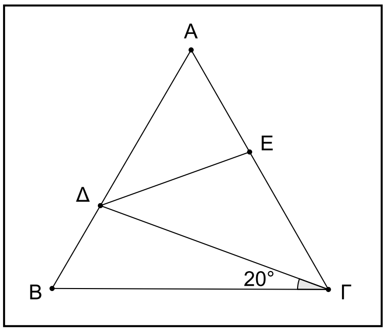
α) i. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ

ii. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να χαρακτηρίσετε το τρίγωνο ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{A}\Delta$.

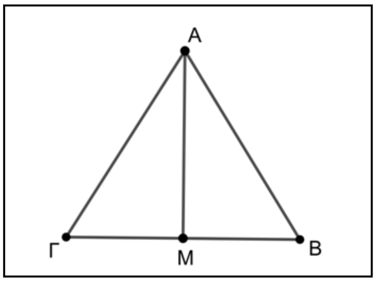
34. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς ΑΒ ώστε $\mathrm{B\hat{\Gamma}\Delta}=20^{o}$.



α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma}=80^{o}$.

β) Αν η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι $\mathrm{E\hat{\Delta}\Gamma}=\mathrm{E\hat{\Gamma}\Delta}$.

35. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$ και η γωνία $\mathrm{B\hat{A}M}$ είναι ίση με 32^{o}.



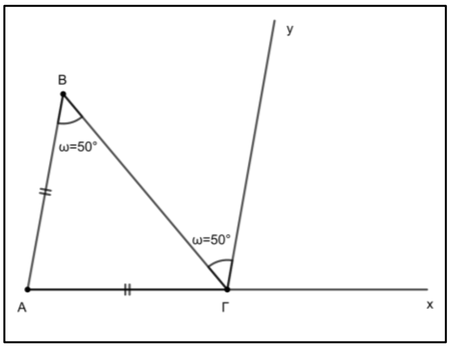
α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$.

β) Να υπολογίσετε, σε μοίρες, το άθροισμα των γωνιών $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Σε ποια ή ποιες από τις δύο παρακάτω περιπτώσεις **i.** και **ii.** το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$;

i. Αν $\hat{\mathrm{B}}=58^{o}$, **ii.** Αν $\hat{\mathrm{B}}=64^{o}$.

36. Το τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$. Θεωρούμε ημιευθεία Γy εσωτερική της γωνίας $\mathrm{B\hat{\Gamma}x}$ τέτοια ώστε να σχηματίζει γωνία $\hat{\omega}=50^{o}$ με την πλευρά ΓΒ.

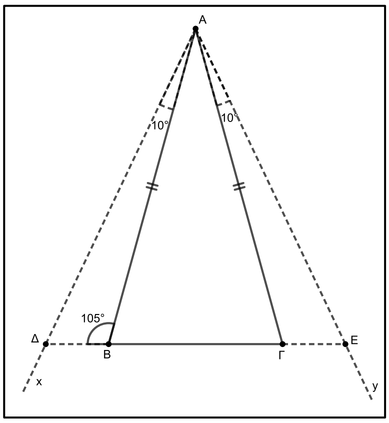


α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\mathrm{x\hat{\Gamma}y}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ημιευθεία Γy είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ.

37. Έστω το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}\right)$ με $\hat{\mathrm{B}}_{\varepsilon\xi}=105^{o}$.



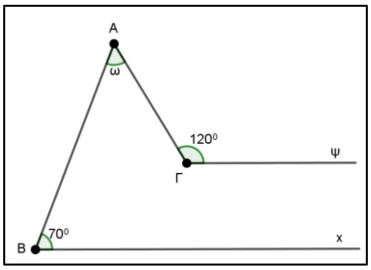
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Φέρουμε τις ημιευθείες Αx και Βy τέτοιες ώστε $\mathrm{x\hat{A}B}=\mathrm{y\hat{A}\Gamma}=10^{o}$, οι οποίες τέμνουν τις προεκτάσεις της ΒΓ, προς το Β και προς το Γ, στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, όπως στο σχήμα.

i. Να υπολογίσετε τις γωνίες τις γωνίες $\mathrm{A\hat{\Delta}B}$ και $\mathrm{A\hat{E}\Gamma}$.

ii. Δικαιολογήστε γιατί το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

38. Στο σχήμα, οι ημιευθείες Βx και Γψ είναι παράλληλες. Επιπλέον η γωνία $A\hat{B}x$ ισούται με 70^o και η γωνία $A\hat{\Gamma}\psi$ ισούται με 120^o. Αν η προέκταση της Γψ προς το Γ, τέμνει την ΑΒ στο Δ και η προέκταση της ΑΓ προς το Γ τέμνει την Βx στο Ε να υπολογίσετε με πόσες μοίρες ισούται:

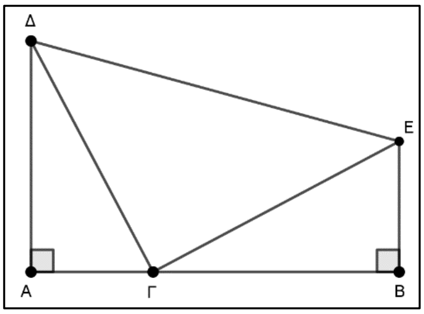


α) η γωνία $\Gamma\hat{E}x$,

β) η γωνία $\hat{\omega}$,

γ) η γωνία $\Gamma\hat{\Delta}B$.

39. Στο σχήμα, οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι ορθές και επιπλέον $A\Delta = B\Gamma$ και $A\Gamma = BE$.

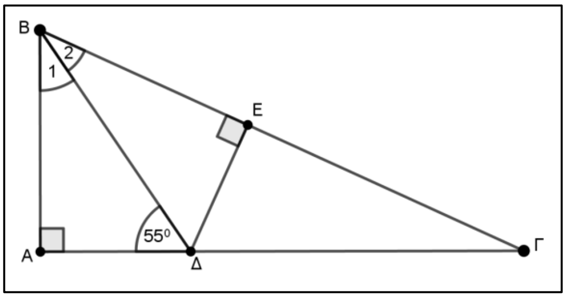


α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές.

γ) Αν $E\hat{\Gamma}B = 40^o$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

40. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^o\right)$. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ, ώστε η γωνία $A\hat{\Delta}B$ να ισούται με 55^o. Από το Δ φέρνουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ.

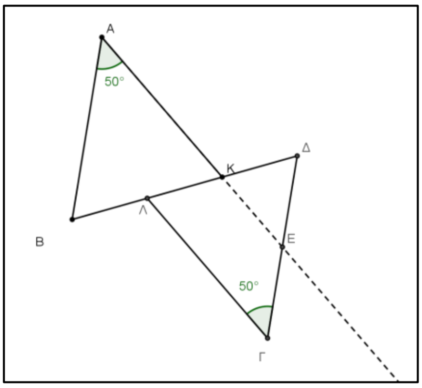


α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}_1$.

β) Να αποδείξετε ότι $AB = BE$.

γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΓΔΕ.

41. Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ είναι ισοσκελή και ίσα με $AB = \Gamma\Delta = AK = \Gamma\Lambda$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 50^o$.



α) Να αποδείξετε ότι $AB // \Gamma\Delta$.

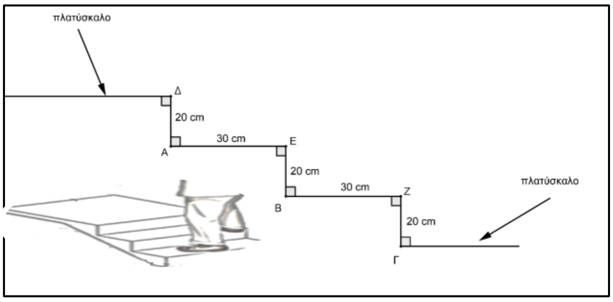
β) Αν η προέκταση της ΑΚ (προς το Κ) τέμνει την ΓΔ σε σημείο Ε, να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΚΔΕ ως προς τις πλευρές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Τι θα αλλάζατε ή θα τροποποιούσατε στα δεδομένα ώστε το τρίγωνο ΚΔΕ να είναι ισόπλευρο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

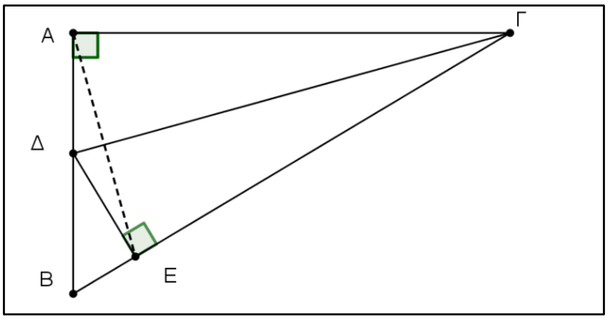
42. Το παρακάτω σχήμα αναπαριστάνει την πλάγια όψη τμήματος σκάλας. Λαμβάνοντας υπόψη τις πληροφορίες του σχήματος, δηλαδή $\Delta A = EB = Z\Gamma = 20\,\text{cm}$, $AE = BZ = 20\,\text{cm}$ και οι γωνίες $\hat{\Delta} = \hat{A} = \hat{E} = \hat{B} = \hat{Z} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$, να αποδείξετε ότι:

α) τα σημεία Α και Γ απέχουν το ίδιο από το σημείο Β.

β) τα σημεία Α, Β και Γ βρίσκονται στην ίδια ευθεία.



43. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$ και η διχοτόμος της γωνίας του $\hat{\Gamma}$, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Από το Δ φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ.

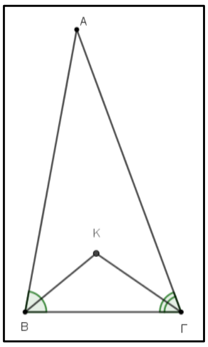


α) i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΕΓΔ είναι ίσα.

ii. Να γράψετε τις ισότητες πλευρών και γωνιών που προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΕΓΔ. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να αποδείξετε ότι η ΓΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΕ.

44. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο Κ.



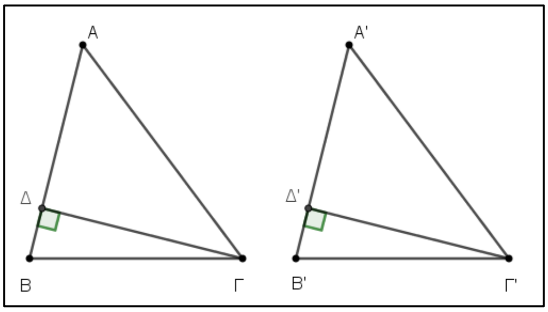
α) Αν $\hat{B} = 80^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 70^\circ$,

i. να δείξετε ότι $\hat{A} = 30^\circ$,

ii. να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου ΒΚΓ.

β) Αν το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές $\left(BK = \Gamma K\right)$, τι τρίγωνο θα ήταν το ΑΒΓ, ως προς τις πλευρές του;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

45. Δίνονται τα οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και $Α'Β'Γ'$ με ίσα ύψη $ΓΔ = Γ'Δ'$ και $\hat{Β} = \hat{Β}'$.



α) Να αποδείξετε ότι $ΒΓ = Β'Γ'$.

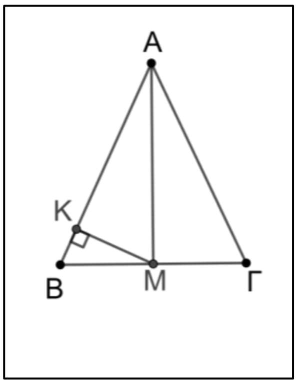
β) Αν επιπλέον $\hat{Α} = \hat{Α}'$, να αποδείξετε:

i. $\hat{Γ} = \hat{Γ}'$,

ii. τα τρίγωνα ΑΒΓ και $Α'Β'Γ'$ είναι ίσα.

γ) Αν επιπλέον στο τρίγωνο ΑΒΓ το ίχνος Δ του ύψους του ΓΔ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, ποιο είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

46. Θεωρούμε το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Επίσης η ΜΚ είναι κάθετη στην ΑΒ.



α) Να αιτιολογήσετε ότι η $\hat{Β}$ είναι συμπληρωματική της $Β\hat{Μ}Κ$.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΜ στην περίπτωση $Β\hat{Μ}Κ = 20^\circ$.

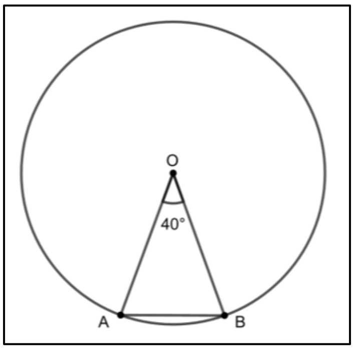
γ) Ποια γωνία του τριγώνου ΑΒΜ του σχήματος είναι ίση με τη γωνία $Β\hat{Μ}Κ$; Να δικαιολογήσετε την απάντηση που δώσατε.

47. Σε τρίγωνο ΑΒΓ γνωρίζουμε ότι: $\hat{Α}_{εξ} = 130^\circ$ και $\hat{Β} = 60^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{Α}$ και $\hat{Γ}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Έστω ΒΕ και ΓΖ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ αντίστοιχα που τέμνονται στο σημείο Ο. Να υπολογίσετε τη γωνία $Β\hat{Ο}Γ$.

48. Σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R θεωρούμε σημεία Α και Β ώστε $Α\hat{Ο}Β = 40^\circ$.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{Α}$ και $\hat{Β}$ του τριγώνου ΟΑΒ.

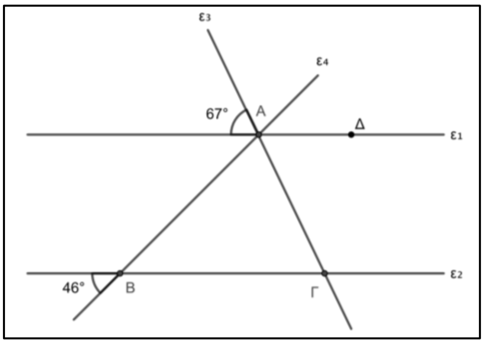
β) Προεκτείνουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ κατά τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα έτσι ώστε $ΑΓ = ΟΑ$ και $ΒΔ = ΟΒ$.

i. Να υπολογίσετε τις γωνίες $Ο\hat{Γ}Δ$ και $Ο\hat{Δ}Γ$.

ii. Να αποδείξετε ότι $AB // \Gamma\Delta$.

γ) Αν προεκτείνουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ κατά τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα έτσι ώστε $A\Gamma = 2OA$ και $B\Delta = 2OB$, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $AB // \Gamma\Delta$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

49. Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 οι οποίες τέμνονται από τις ευθείες ε_3 και ε_4 στα σημεία Α, Β και Γ όπως φαίνεται στο σχήμα.



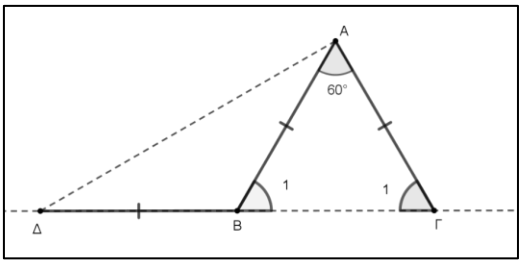
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) **i.** Να υπολογίσετε τη γωνία $\Gamma\hat{A}\Delta$.

ii. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Delta$». Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

50. Στο παρακάτω σχήμα, τα σημεία Δ, Β και Γ βρίσκονται στην ίδια ευθεία, τα τμήματα ΒΔ, ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα και $B\hat{A}\Gamma = 60^o$.



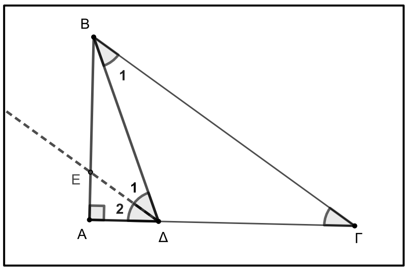
Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = 60^o$ και $A\hat{B}\Delta = 120^o$.

β) το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ορθογώνιο.

γ) το τμήμα ΑΒ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΔΑΓ.

51. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ $\left(\hat{A} = 90^o\right)$ και η διχοτόμος της γωνίας του $A\hat{\Delta}B$ η οποία τέμνει την ΑΒ σε σημείο Ε. Στην προέκταση της ΑΔ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε $\Delta\Gamma = \Delta B$.



α) Να αποδείξετε ότι:

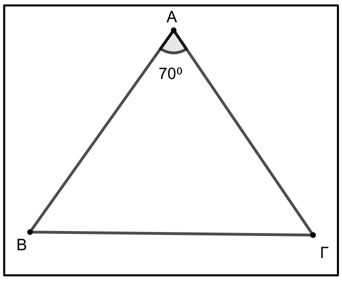
i. $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}$,

ii. $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}$,

iii. Η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Delta}B$ είναι παράλληλη στο τμήμα ΒΓ.

β) Αν $A\hat{\Delta}B = 70^o$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

52. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(AB = A\Gamma\right)$ με γωνία κορυφής $\hat{A} = 70^o$.



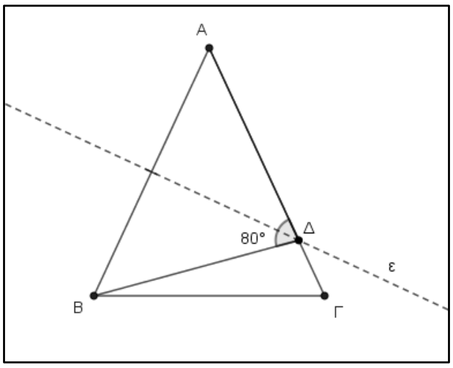
α) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι οι άλλες δυο γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσες με 55^o. Είναι ο ισχυρισμός του σωστός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Αν Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i. το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές με $A\hat{E}Z = A\hat{Z}E = 55^o$,

ii. η πλευρά ΕΖ του τριγώνου ΑΕΖ είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

53. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η μεσοκάθετος (ε) της πλευράς του ΑΒ τέμνει την πλευρά του ΑΓ σε εσωτερικό της σημείο Δ. Αν η γωνία $A\hat{\Delta}B$ είναι ίση με 80^o, τότε να αποδείξετε ότι:

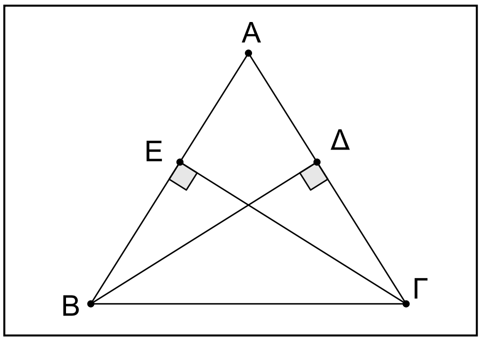


α) i. το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές με $\Delta A = \Delta B$,

ii. $\hat{A} = 50^o$,

β) αν είναι $\Delta\hat{B}\Gamma = 15^o$, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

54. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ.

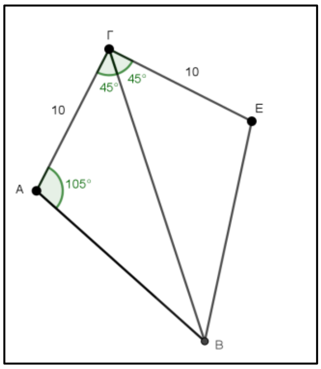


α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα.

β) Να δικαιολογήσετε γιατί $B\Delta = \Gamma E$.

γ) Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ του τριγώνου είναι και διάμεσοι, να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 60^o$.

55. Στο σχήμα τα τμήματα ΓΑ και ΓΕ είναι ίσα με 10 και η γωνία $\hat{A}$ είναι ίση με 105^o. Επιπλέον δίνεται ότι: $A\hat{\Gamma}B = B\hat{\Gamma}E = 45^o$.

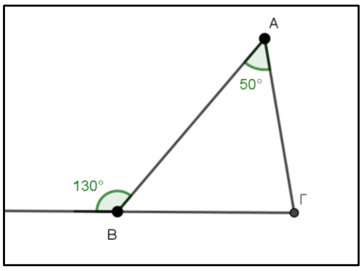


α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΒ και ΕΓΒ είναι ίσα.

β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $A\hat{B}E$.

γ) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΕ.

56. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 135^o$ και $\hat{A} = 50^o$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

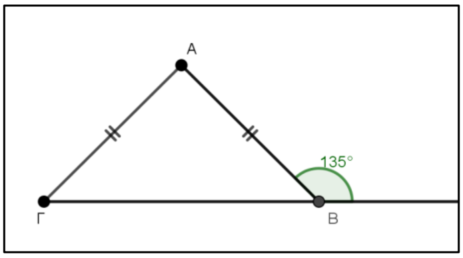
β) Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσκελές και να γράψετε ποια είναι η βάση του.

γ) Αν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ και το τμήμα ΜΔ είναι παράλληλο στη ΒΓ, τότε :

i. Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου ΓΜΔ.

ii. Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ΓΜΔ ως προς τις πλευρές του;

57. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}_{εξ}=135^o$, όπως φαίνεται στο σχήμα .



α) Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

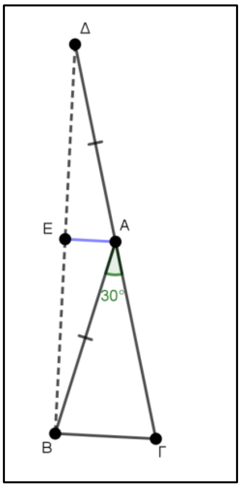
β) Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

γ) Να σχεδιάσετε το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ και να χαρακτηρίσετε το είδος του τριγώνου ΑΔΓ:

i. ως προς τις γωνίες του,

ii. ως προς τις πλευρές του.

58. Στο σχήμα που ακολουθεί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ=ΑΓ$ και $\hat{A}=30^o$.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Προεκτείνουμε την ΓΑ προς το μέρος του Α και παίρνουμε τμήμα $ΑΔ=ΑΒ$. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας συμπληρωμένη την πρόταση που ακολουθεί και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

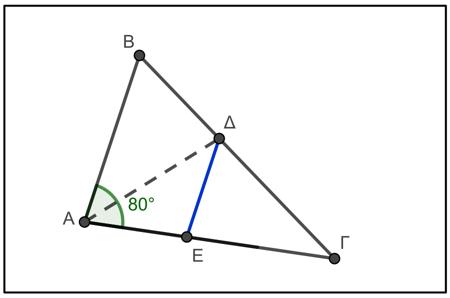
«Στο τρίγωνο ΓΒΔ το τμήμα ΒΑ είναι …………….. που αντιστοιχεί στην πλευρά ΔΓ».

γ) Αν το τμήμα ΑΕ είναι παράλληλο προς την πλευρά ΒΓ και τέμνει τη ΔΒ στο Ε, τότε:

i. Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες $B\hat{A}E$ και $E\hat{A}\Delta$.

ii. Να δικαιολογήσετε γιατί το ΑΕ είναι κάθετο στο τμήμα ΔΒ.

59. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται ότι $\hat{A}=80^o$ και $\hat{B}=20^o+\hat{\Gamma}$. Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$.



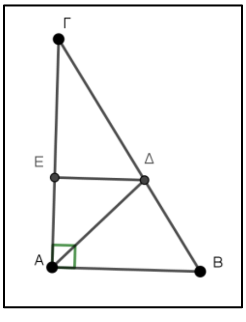
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου.

β) Αν η παράλληλη στην ΑΒ από το σημείο Δ τέμνει την ΑΓ στο Ε, τότε:

i. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.

ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

60. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^o\right)$ και η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Ε.

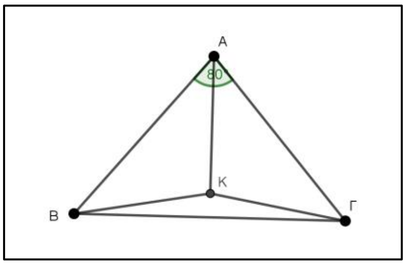


α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ορθογώνιο.

β) Να υπολογίσετε την $A\hat{\Delta}E$.

γ) Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20^o μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{\Delta}\Gamma$.

61. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος έχουμε $ΑΒ = ΑΓ$ και $\hat{Α} = 80^o$. Το σημείο Κ είναι πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{Α}$ και τέτοιο ώστε $ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ$.

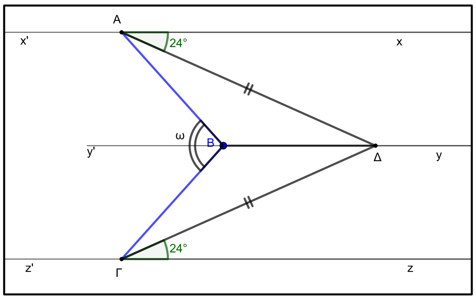


α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ είναι ίσα.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $Α\hat{Β}Κ$ και $Α\hat{Γ}Κ$.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $Β\hat{Κ}Γ$.

62. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες $x'x$, $y'y$ και $z'z$ είναι παράλληλες. Για τις γωνίες $x\hat{Α}Δ$ και $z\hat{Γ}Δ$ ισχύει ότι $x\hat{Α}Δ = z\hat{Γ}Δ = 24^o$. Τα τμήματα ΑΔ και ΓΔ είναι ίσα.



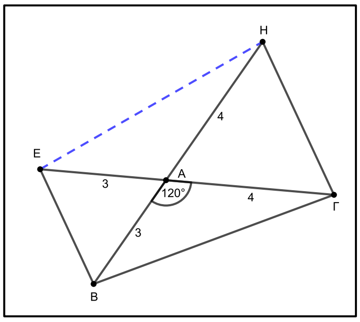
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ είναι ίσα.

β) Αν τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ είναι ισοσκελή με βάσεις ΑΔ και ΓΔ αντίστοιχα, να υπολογίσετε:

i. τις γωνίες των τριγώνων ΑΒΔ και ΓΒΔ ,

ii. τη γωνία $\hat{ω}$.

63. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α} = 120^o$, $ΑΒ = 3$ και $ΑΓ = 4$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το μέρος του Α, κατά τμήμα $ΑΗ = 4$ και την πλευρά ΓΑ προς το μέρος του Α, κατά τμήμα $ΑΕ = 3$, όπως στο παρακάτω σχήμα.

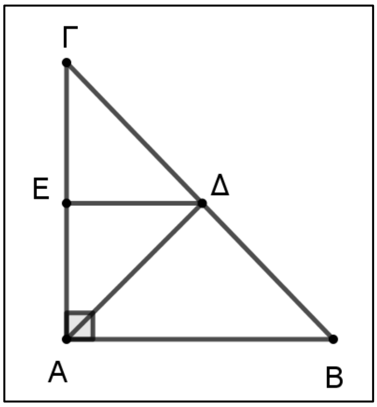


α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΗ και ΑΒΕ είναι ισόπλευρα.

β) Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΕΗ είναι ίσο με το αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ.

γ) Το τμήμα ΒΕ είναι παράλληλο στο τμήμα ΓΗ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

64. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{Α} = 90^o \text{ και } ΑΒ = ΑΓ\right)$ και ΑΔ η διάμεσός του. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

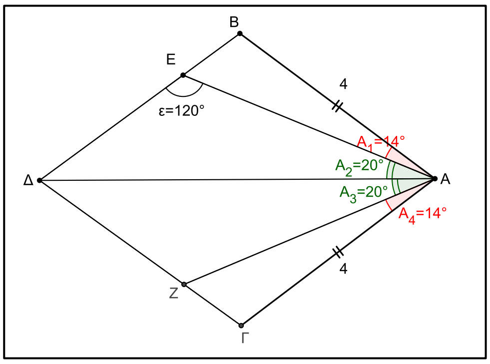


α) το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο,

β) $ΔΕ = ΕΓ$,

γ) το σημείο Ε είναι μέσο της πλευράς ΑΓ.

65. Στο σχήμα είναι $\hat{A}_1 = \hat{A}_4 = 14^o$, $\hat{A}_2 = \hat{A}_3 = 20^o$ και $AB = A\Gamma = 4$.



α) Να αποδείξετε ότι:

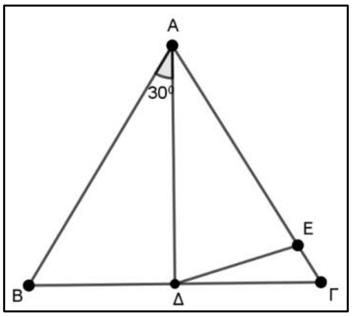
i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα,

ii. Οι γωνίες $B\hat{\Delta}A$ και $\Gamma\hat{\Delta}A$ είναι ίσες.

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta E = \Delta Z$.

γ) Αν για τη γωνία $\hat{\varepsilon}$ ισχύει ότι $\hat{\varepsilon} = 120^o$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$.

66. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και η διάμεσός του ΑΔ τέτοια, ώστε $B\hat{A}\Delta = 30^o$. Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΓ τέτοιο, ώστε $A\Delta = AE$.

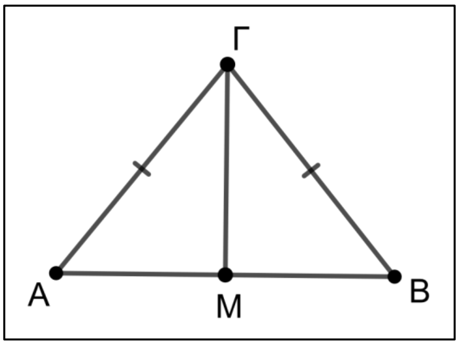


α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma$.

β) Να αιτιολογήσετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{\Delta}\Gamma$.

67. Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $A\Gamma = B\Gamma$, η ΓΜ είναι διάμεσος της ΑΒ, το $BM = 3$ και η γωνία $A\hat{\Gamma}M$ είναι ίση με 33^o.

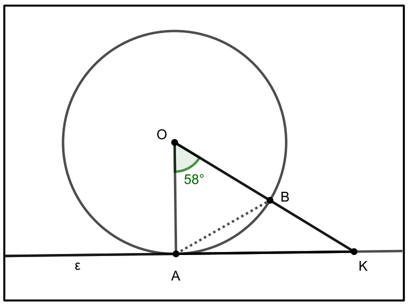


α) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΒ.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Αν δεν σας δίνεται ότι $A\hat{\Gamma}M = 33^o$ αλλά, αντί για αυτό, έχετε ότι $A\Gamma = 6$, τότε να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

68. Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Η ευθεία ε είναι η εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο Α, και η προέκταση της ακτίνας ΟΒ τέμνει την ευθεία ε στο Κ.



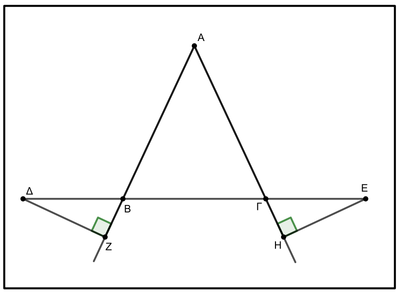
α) Αν η γωνία $\hat{O}$ είναι 58^o:

i. Να υπολογίσετε τη γωνία $O\hat{B}A$.

ii. Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΚ.

β) Πόσες μοίρες έπρεπε να είχαμε σχεδιάσει τη γωνία $\hat{O}$ ώστε η χορδή ΑΒ να είναι ίση με την ακτίνα ρ;

69. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και σημεία Δ και Ε στις προεκτάσεις της ΒΓ προς το Β και το Γ, τέτοια ώστε $ΒΔ = ΓΕ$. Έστω ότι $ΔΖ \perp ΑΒ$ και $ΕΗ \perp ΑΓ$.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΒΖ = ΓΗ$,

ii. το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.

β) Αν $\hat{Α} = 50^{o}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΖΗ.

70. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ προεκτείνουμε την ΒΓ προς το μέρος του Β και προς το μέρος του Γ κατά ίσα τμήματα ΒΔ και ΓΕ αντίστοιχα.

α) Αν $\hat{Β}_{εξ} = 130^{o}$, τότε:

i. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ,

ii. Να αποδείξετε ότι $ΑΔ = ΑΕ$.

β) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των σημείων Β και Γ από τις ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα, είναι ίσες.