

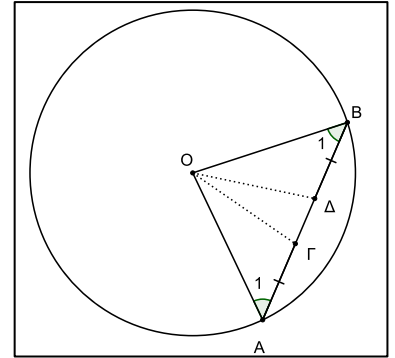
3.2 1ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π – Γ – Π)

1. Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και χορδή του AB . Πάνω στη χορδή AB παίρνουμε σημεία Γ και Δ τέτοια, ώστε $AG = BD$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές και ότι οι γωνίες του \hat{A}_1 και \hat{B}_1 είναι ίσες.

β) Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα OAG και OBD είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Είναι ίσα τα τμήματα OG και OD ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



2. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση την πλευρά $B\Gamma$.

α) Να γράψετε τις ιδιότητες που αφορούν τις πλευρές και τις γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Από τις κορυφές B και Γ φέρνουμε τις διαμέσους BM και ΓN που αντιστοιχούν στις πλευρές του AG και AB αντίστοιχα.

i. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $B\Gamma M$ και $\Gamma B N$ και να αιτιολογήσετε γιατί είναι ίσα.

ii. Να εξηγήσετε γιατί οι διάμεσοι BM και ΓN είναι ίσες.

3. Στο σχήμα, το M είναι ένα τυχαίο σημείο της ημιευθείας Ox και B, Γ είναι σημεία τέτοια, ώστε $B\hat{O}x = \Gamma\hat{O}x$ και $OB = O\Gamma$.

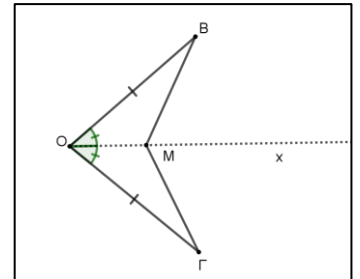
α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα OBM και $O\Gamma M$ και να δικαιολογήσετε ότι είναι ίσα.

β) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις με τις άλλες ίσες γωνίες που προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα της ισότητας των δυο τριγώνων OBM και $O\Gamma M$.

1. Η γωνία $O\hat{B}M$ του τριγώνου OBM είναι ίση με την γωνία του τριγώνου $O\Gamma M$.

2. Η γωνία του τριγώνου OBM είναι ίση με την γωνία $\Gamma\hat{M}O$ του τριγώνου $O\Gamma M$.

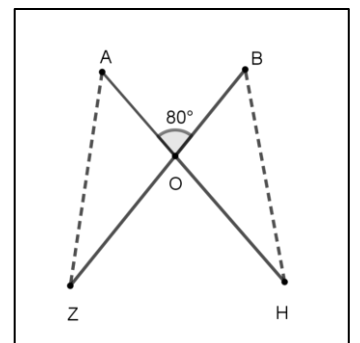
γ) Είναι οι γωνίες $B\hat{M}x$ και $\Gamma\hat{M}x$ είναι ίσες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



4. Στο σχήμα, τα τμήματα AH και BZ είναι ίσα και τέμνονται σε σημείο O έτσι ώστε η γωνία $A\hat{O}B$ να είναι ίση με 80° . Έστω ότι είναι $AH = BZ = 5$ και $OH = OZ = 3$.

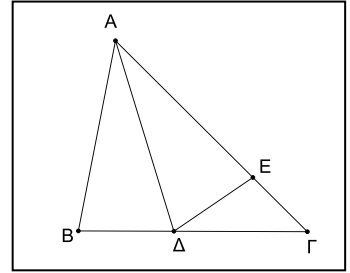
α) Να αποδείξετε ότι $A\hat{O}Z = B\hat{O}H = 100^\circ$.

β) Είναι τα τρίγωνα AOZ και BOH ίσα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 5$ και $A\Gamma = 7$ και η διχοτόμος του $A\Delta$.
Στην πλευρά $A\Gamma$ παίρνουμε σημείο E , ώστε $GE = 2$.

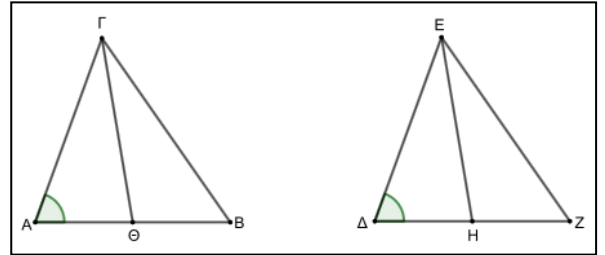
- α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AE .
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AE\Delta$ είναι ίσα.



6. Δίνονται δύο ίσα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔZE για τα οποία ισχύει $AB = \Delta Z = 4\text{cm}$, $A\Gamma = \Delta E$ και $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Έστω Θ το μέσο της AB και H το μέσο της ΔZ .

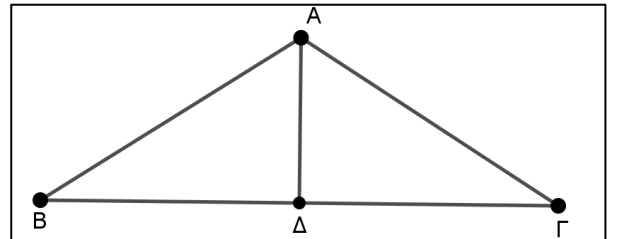
- α) Να υπολογίσετε το μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων $A\Theta$ και ΔH .

- β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma\Theta$ και $\Delta E H$ είναι ίσα.

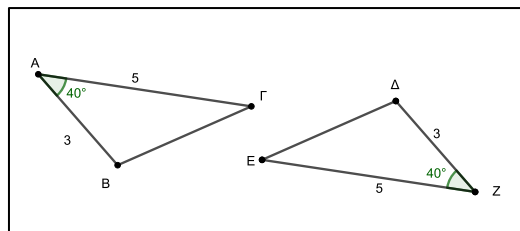


7. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB = A\Gamma$ η γωνία της κορυφής του A είναι ίση με 120° . Αν η $A\Delta$ είναι διχοτόμος του τριγώνου τότε:

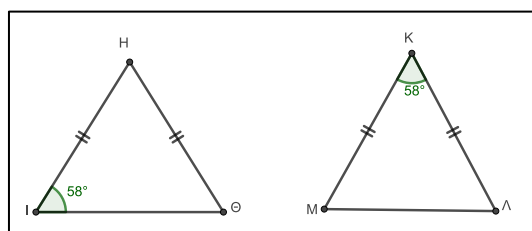
- α) να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι η γωνία $B\hat{A}\Delta$,
β) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα.



8. α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $Z\Delta E$ του παρακάτω σχήματος είναι ίσα.



- β) Ο Φοίβος και η Αθηνά, δύο μαθητές της Α' Λυκείου, μελετούν παρέα Γεωμετρία. Μεταξύ τους γίνεται ο εξής διάλογος, καθώς συγκρίνουν τα τρίγωνα του σχήματος που ακολουθεί:



Φ : Τα δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ίσες μια προς μία, αφού $HI = KM$ και $H\Theta = K\Lambda$, και από μία γωνία ίση, αυτή που σημειώνεται με 58° , οπότε θα είναι μεταξύ τους ίσα.

A : Πράγματι έχουν δυο πλευρές τους ίσες μία προς μία, αλλά η γωνία των 58° είναι σε διαφορετική θέση σε σχέση με τις ίσες πλευρές στα δύο τρίγωνα. Νομίζω ότι μπορώ να αποδείξω ότι τα τρίγωνα $H\Theta I$ και $K\Lambda M$ δεν είναι ίσα.

i. Να εξηγήσετε τι εννοεί η Αθηνά σχετικά με τη διαφορετική θέση της γωνίας των 58° .

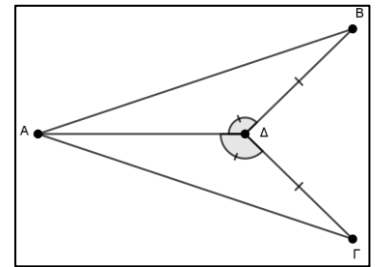
ii. Με ποιόν από τους δύο μαθητές συμφωνείτε; Αν νομίζετε ότι έχει δίκιο ο Φοίβος, δικαιολογήστε γιατί. Αν νομίζετε ότι έχει δίκιο η Αθηνά, βοηθήστε την να ολοκληρώσει την απόδειξή της.

9. Στο σχήμα δίνονται ότι ισχύουν: $\Delta B = \Delta \Gamma$ και $\hat{\Delta} B = \hat{\Delta} \Gamma$.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $\Delta B A$ και $\Delta \Gamma A$.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί $\hat{\Delta} B = \hat{\Delta} \Gamma$.

γ) Φέρνουμε τη $B\Gamma$. Αν η ΔA προεκτεινόμενη προς το Δ , τέμνει την $B\Gamma$ στο E , να αποδείξετε ότι το E είναι το μέσο της $B\Gamma$.



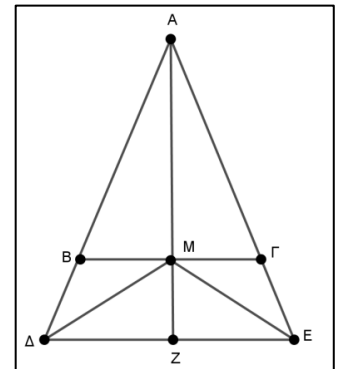
10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M είναι το μέσο της βάσης $B\Gamma$.

Στις προεκτάσεις των πλευρών AB , $A\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $B\Delta$, ΓE αντίστοιχα ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $\Delta A E$ είναι ισοσκελές,

β) τα τρίγωνα $M B \Delta$ και $M \Gamma E$ είναι ίσα,

γ) αν η $A M$ προεκτεινόμενη προς το M , τέμνει την ΔE στο σημείο Z , να αιτιολογήσετε ότι η $A Z$ είναι κάθετη στην ΔE .

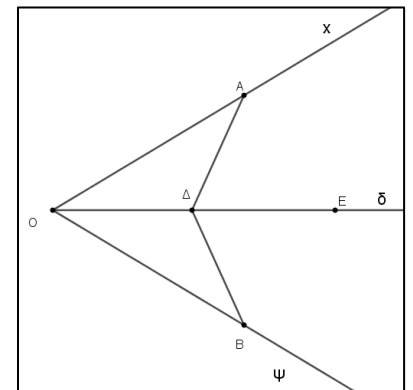


11. Δίνεται η γωνία $x\hat{O}\psi$ και η διχοτόμος της $O\delta$. Πάνω στις Ox και $O\psi$ παίρνουμε σημεία A και B αντίστοιχα, ώστε $OA = OB$. Πάνω στην $O\delta$ θεωρούμε σημεία Δ και E όπως φαίνονται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $O A \Delta$ και $O B \Delta$ είναι ίσα,

β) $A\hat{\Delta} E = B\hat{\Delta} E$.

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι $AE = BE$. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



12. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στις προεκτάσεις των πλευρών του BA προς το A και ΓA προς το A , παίρνουμε σημεία E και Δ αντίστοιχα, ώστε $AE = A\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{\Gamma}\hat{B}\Delta = \hat{B}\hat{\Gamma}E$.

γ) Έστω M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $M\Delta = ME$.

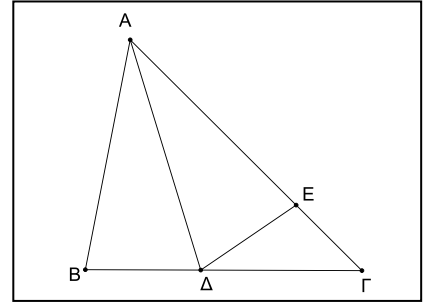
13. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=10$ και $A\Gamma=14$ και η διχοτόμος του $A\Delta$.

Στην πλευρά $A\Gamma$ παίρνουμε σημείο E ώστε $GE=4$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AE\Delta$ είναι ίσα.

β) Να δικαιολογήσετε γιατί είναι ίσα τα τμήματα $B\Delta$, ΔE .

γ) Προεκτείνουμε την $E\Delta$ προς το Δ κατά τμήμα ΔZ , ώστε $\Delta Z = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta}\hat{B}Z = \hat{\Delta}\hat{Z}B$.



14. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και στις ίσες πλευρές του AB , $A\Gamma$ παίρνουμε

αντίστοιχα τα τμήματα $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και $A E = \frac{1}{3}A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

β) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.

γ) Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα.

ii. το τρίγωνο $\Delta E M$ είναι ισοσκελές.

