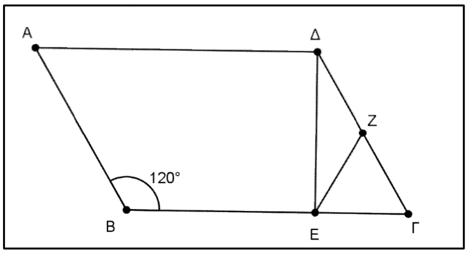
5.9 Μια ιδιότητα του ορθογωνίου τριγώνου

1. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{B} = 120^o$ και $ΔΕ \perp ΒΓ$. Έστω ΕΖ η διάμεσος του τριγώνου ΔΕΓ.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{Γ}$ του παραλληλογράμμου.

β) Αν Κ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, να αποδείξετε ότι $ΕΖ = ΑΚ$.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $Ε\hat{Ζ}Γ$.

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε $ΑΓ < ΑΒ$. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $ΑΔ = ΑΓ$ και στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $ΑΕ = ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα ΔΓ και ΕΓ είναι κάθετα μεταξύ τους,

β) η γωνία $Ε\hat{Α}Γ$ είναι διπλάσια της γωνίας $Α\hat{Δ}Γ$.

3. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = 60^o$. Φέρουμε τα ύψη ΑΕ και ΒΖ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ που αντιστοιχούν στην ευθεία ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΓΖ = \frac{ΑΔ}{2}$,

β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ίσο με το τρίγωνο ΒΓΖ,

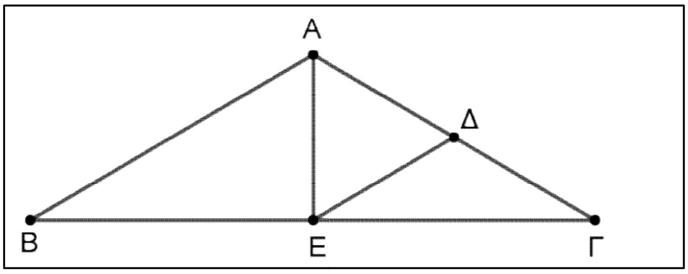
γ) το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι ορθογώνιο.

4. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ και $\hat{B} > \hat{Γ}$ φέρουμε το ύψος του ΑΔ και την διάμεσο ΑΜ στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) οι γωνίες $\hat{B}$ και $Γ\hat{Α}Δ$ είναι ίσες,

β) $Α\hat{Μ}Δ = 2\hat{Γ}$.

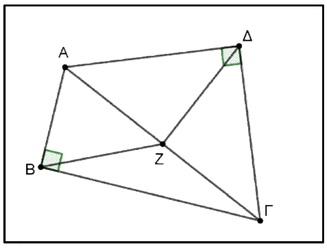
5. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και γωνία $\hat{B}$ ίση με 30^o. Θεωρούμε Δ και Ε τα μέσα των ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του,

β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.

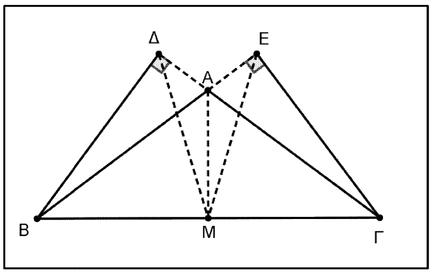
6. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 90^o$ και Ζ το μέσο του ΑΓ. Με υποτείνουσα το ΑΓ κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ με $\hat{Δ} = 90^o$ και $ΔΑ = ΔΓ$.



α) Να αποδείξετε ότι $ΒΖ = ΔΖ$.

β) Αν είναι $A\hat{\Gamma}B = 30^o$, τότε να υπολογίσετε τις γωνίες $B\hat{A}\Delta$ και $B\hat{\Gamma}\Delta$.

7. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ προς το Α φέρνουμε τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.



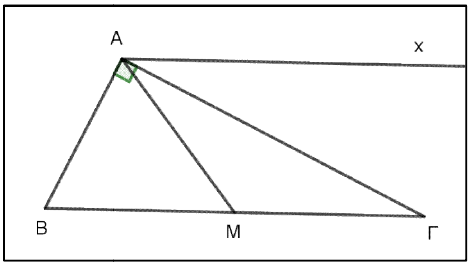
α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

β) Αν το σημείο Μ είναι το μέσο της ΒΓ, τότε να αποδείξετε ότι:

i. $M\Delta = ME$,

ii. η ΜΑ διχοτομεί τη γωνία $\Delta\hat{M}E$.

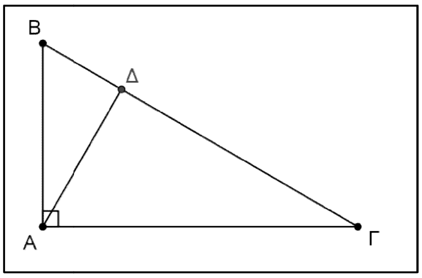
8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρουμε ημιευθεία Αx παράλληλη στη ΒΓ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΜ με το σημείο Γ). Να αποδείξετε ότι:



α) $M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A$,

β) η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}x$.

9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή, $2\hat{\Gamma} = \hat{B}$ και το ύψος του ΑΔ.

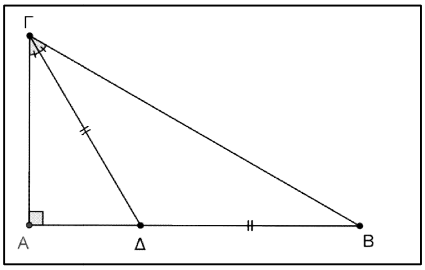


α) Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να υπολογιστεί η γωνία $B\hat{A}\Delta$.

γ) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \dfrac{AB}{2}$.

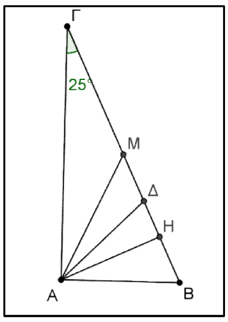
10. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\text{με } \hat{A} = 90^0\right)$ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, τέτοιο ώστε ΓΔ = ΔΒ = 2cm. Να αποδείξετε ότι:



α) $\hat{B} = 30^o$,

β) ΑΒ = 3 cm.

11. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ και $\hat{\Gamma} = 25^o$. Δίνονται επίσης η διάμεσος ΑΜ, το ύψος ΑΗ από την κορυφή Α και η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{M}B$, $H\hat{A}B$, $A\hat{\Delta}B$.

β) Να αποδείξετε ότι $M\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}H = 20^o$.

12. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A}+\hat{\Gamma}=120^o$ και $\hat{A}=3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

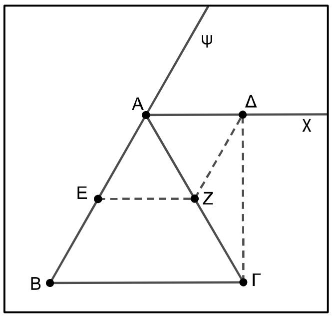
β) Αν η πλευρά ΒΓ = 2 cm να βρείτε το μήκος της ΑΒ.

13. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Αx της γωνίας $\hat{A}$ και από το σημείο Γ την κάθετο ΓΔ στην Αx. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) ΕΖ = ΑΕ = ΑΖ,

β) η γωνία $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ίση με 30^o ,

γ) το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ρόμβος.

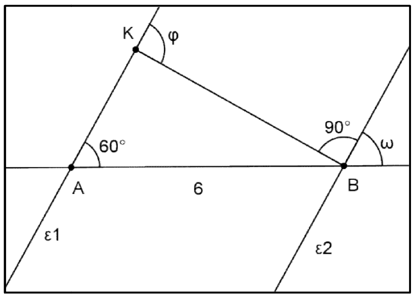


14. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ε_1, ε_2 είναι παράλληλες και ΑΒ = 6 .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\varphi}$ και $\hat{\omega}$.

β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΑΒΚ ως προς τις γωνίες του.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΚ, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

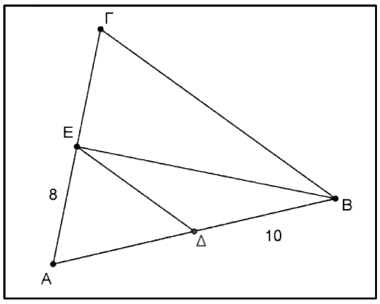


15. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν ΑΔ = ΕΔ = ΔΒ με ΑΕ = 8 και ΔΒ = 10 .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο, **ii.** ΒΓ = 20 .

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.



16. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^0\right)$ με γωνία $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$ και το μέσο Μ της πλευράς του ΒΓ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές.

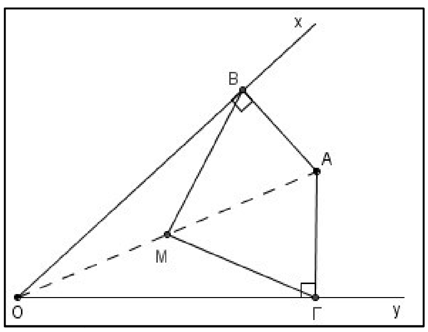
γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{M}\Gamma$.

17. Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο Α στο εσωτερικό της. Από το Α φέρνουμε τις κάθετες ΑΒ, ΑΓ προς τις πλευρές Ox , Oy της γωνίας αντίστοιχα, και ονομάζουμε Μ το μέσο του ΟΑ. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΒΜΑ είναι ισοσκελές,

β) το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές,

γ) $B\hat{M}A=2x\hat{O}A$.



18. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και γωνία $\hat{\Gamma}=30^o$. Θεωρούμε το ύψος του ΑΔ και το μέσο Ζ της πλευράς ΑΓ.

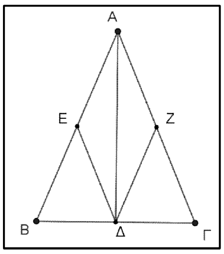
α) Να αποδείξετε ότι $\Delta Z=\frac{A\Gamma}{2}$.

β) Προεκτείνουμε το ύψος ΑΔ (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα ΔΕ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισόπλευρο.

19. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), το ύψος του ΑΔ και τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΖ είναι ίσα,

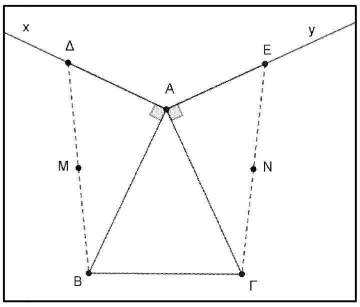
β) το τετράπλευρο ΑΖΔΕ είναι ρόμβος.



20. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB=A\Gamma)$. Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Αx και Αy τέτοιες ώστε $Ax\perp AB$ και $Ay\perp A\Gamma$, όπως στο σχήμα που ακολουθεί. Στις Αx και Αy θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε ΑΔ = ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ.

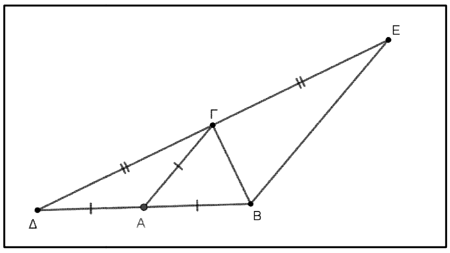
β) Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των τμημάτων ΒΔ και ΓΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές



21. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB=A\Gamma)$. Στην προέκταση της ΒΑ (προς το μέρος της κορυφής Α) παίρνουμε σημείο Δ ώστε ΑΒ = ΑΔ και στην προέκταση της ΔΓ (προς το μέρος της κορυφής Γ) παίρνουμε σημείο Ε ώστε ΔΓ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΔΓΒ είναι ορθογώνιο,

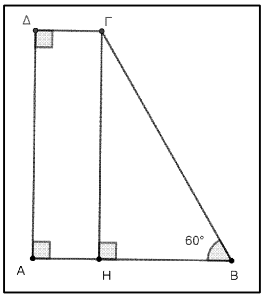
β) $A\Gamma // BE$ και $A\Gamma=\frac{BE}{2}$.



22. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{A}=\hat{\Delta}=90^o$, $AB>\Gamma\Delta$, $B\Gamma=4\Delta\Gamma$, $\hat{B}=60^o$ και $\Gamma H\perp AB$. Να αποδείξετε ότι:

α) $HB=2\Delta\Gamma$,

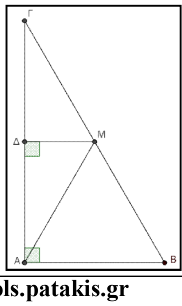
β) το τετράπλευρο ΑΗΓΔ είναι ορθογώνιο με $AH=\frac{1}{2}HB$.



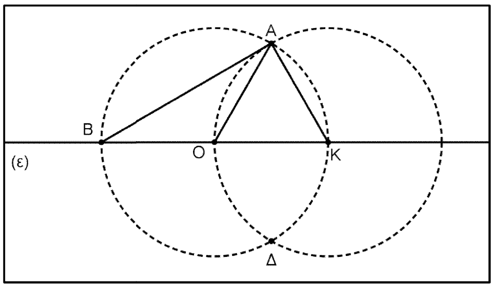
23. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma\left(\hat{A}=90^o\right)$ με ΒΓ = 8 cm. Έστω ΑΜ είναι διάμεσος του τριγώνου και $M\Delta\perp A\Gamma$. Αν η γωνία $A\hat{M}\Gamma$ είναι ίση με 120^o, τότε:

α) Να δείξετε ότι ΑΒ = 4 cm.

β) Να βρείτε το μήκος της ΜΔ.



24. Θεωρούμε δυο ίσους κύκλους (Ο,ρ) και (Κ,ρ) τεμνόμενους στα σημεία Α και Δ, με τα κέντρα τους Ο και Κ να βρίσκονται σε ευθεία (ε) που τέμνει τον κύκλο (Ο,ρ) σε σημείο Β, και τη διάκεντρό τους ΟΚ να είναι ίση με ρ.



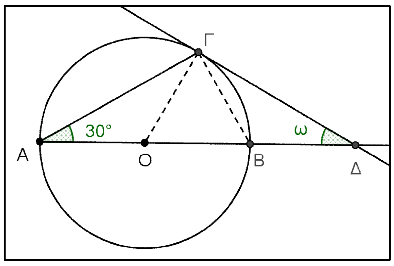
α) Να αποδείξετε ότι:

i. το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο,

ii. το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ορθογώνιο.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\mathrm{A\hat{B}K}$.

25. Δίνεται κύκλος (Ο,R) διαμέτρου ΑΒ, και χορδή του ΑΓ τέτοια ώστε $\mathrm{BA\Gamma} = 30^{\circ}$. Στο σημείο Γ του κύκλου φέρουμε εφαπτομένη, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου ΑΒ (προς το Β) σε σημείο Δ.

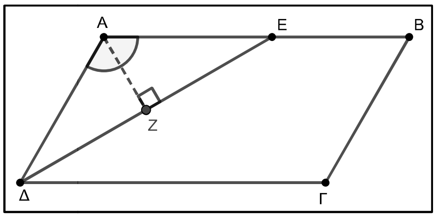


α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας του $\Gamma\hat{O}\Delta$.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{\omega}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{O}\Delta = 2\mathrm{R}$.

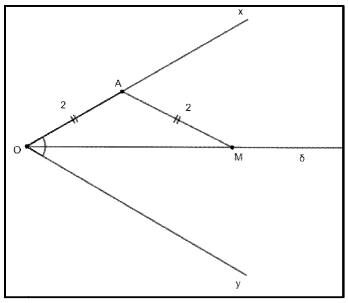
26. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία $\hat{\mathrm{A}} = 120^{\circ}$ και $\mathrm{AB} = 2\mathrm{A}\Delta$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε, και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα ΑΖ στη ΔΕ. Να αποδείξετε ότι:



α) γωνία $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = 30^{\circ}$.

β) $\mathrm{AZ} = \dfrac{\mathrm{AB}}{4}$.

27. Σχεδιάζουμε γωνία $x\hat{O}y = 60^{\circ}$ και παίρνουμε σημείο Α επί της πλευράς Οx, τέτοιο ώστε $\mathrm{AO} = 2$. Φέρουμε τη διχοτόμο Οδ της γωνίας $x\hat{O}y$ και θεωρούμε σημείο Μ στην Οδ, τέτοιο ώστε $\mathrm{AM} = \mathrm{AO}$. Να υπολογίσετε:

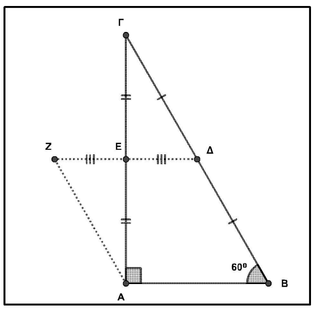


α) τη γωνία $\delta\hat{O}y$,

β) τις γωνίες του τριγώνου ΑΟΜ ,

γ) το μήκος του ύψους ΑΒ που αντιστοιχεί στη βάση ΟΜ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΟΜ .

28. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 90^{\circ}$ και $\hat{\mathrm{B}} = 60^{\circ}$. Θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε που είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ = ΔΕ .



α) Να αποδείξετε ότι ΓΔ = ΑΖ .

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΖΑΒ είναι ισοσκελές.

29. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει $\hat{A} = 90^o$.

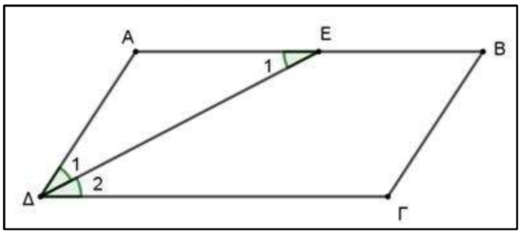
α) Να σχεδιάσετε ένα τέτοιο τρίγωνο αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ΑΒ > ΑΓ . Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου και γιατί;

β) Αν για το τρίγωνο που σας ζητήθηκε να σχεδιάσετε στο α) ερώτημα γνωρίζετε επιπλέον ότι η μια από τις οξείες γωνίες του είναι ίση με 30^o , τότε να απαντήσετε στα παρακάτω:

i. Πόσες μοίρες θα είναι η γωνία $\hat{B}$ και πόσες η γωνία $\hat{\Gamma}$;

ii. Ποια πλευρά του τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας;

30. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = 120^o$ και η διχοτόμος της γωνίας Δ που τέμνει την ΑΒ στο μέσο της Ε.



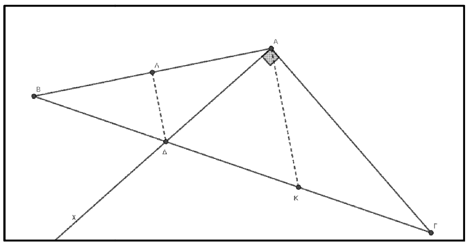
α) Να αποδείξετε ότι ΑΒ = 2ΑΔ **.**

β) Αν το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από το σημείο Ε στην ΓΔ την τέμνει στο Η, τότε να αποδείξετε ότι $\frac{\Delta E}{HE} = 2$.

γ) Αν Μ το μέσο της ΓΔ , τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΑΔ είναι ισόπλευρο.

δ) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{A}\Gamma = 90^o$.

31. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΒΑΓ με $\hat{A} = 120^o$. Φέρουμε ημιευθεία Αx κάθετη στην ΑΓ στο Α, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο Δ . Έστω Λ το μέσο του ΑΒ και Κ το μέσο του ΔΓ . Να αποδείξετε ότι:



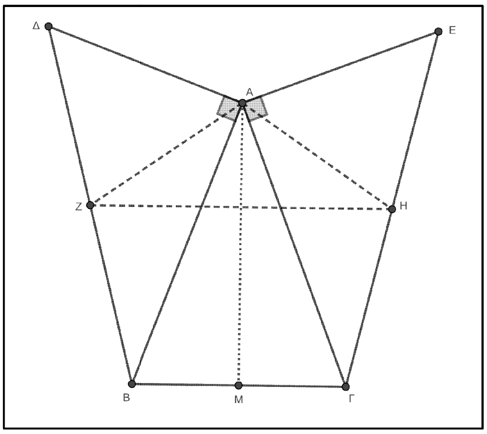
α) το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές,

β) $\Delta\Gamma = 2B\Delta$,

γ) $\Lambda\Delta // AK$,

δ) $AK = 2\Lambda\Delta$.

32. Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ . Φέρνουμε τμήμα ΑΔ κάθετο στην ΑΒ και τμήμα ΑΕ κάθετο στην ΑΓ με $A\Delta = AE$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ, Η και Μ των ΔΒ, ΕΓ και ΒΓ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ είναι ίσα,

ii. το τρίγωνο ΖΑΗ είναι ισοσκελές,

iii. η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ΖΗ .

β) Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έγραψε τα εξής:

« 1. *ΑΔ = ΑΕ από υπόθεση*

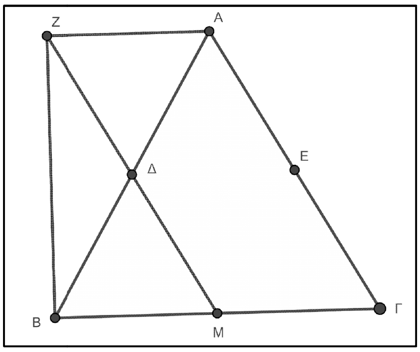
2. ΑΒ = ΑΓ πλευρές ισοσκελούς τριγώνου

3. $\Delta\hat{A}B = E\hat{A}\Gamma$ ως κατακορυφήν

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μια προς μια και την περιεχόμενη γωνία ίση».

Ο καθηγητής είπε ότι αυτή η λύση περιέχει λάθος. Μπορείς να το εντοπίσεις;

33. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε και Μ των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στην προέκταση του ΜΔ (προς το Δ) θεωρούμε τμήμα $\Delta Z = \Delta M$. Να αποδείξετε ότι:



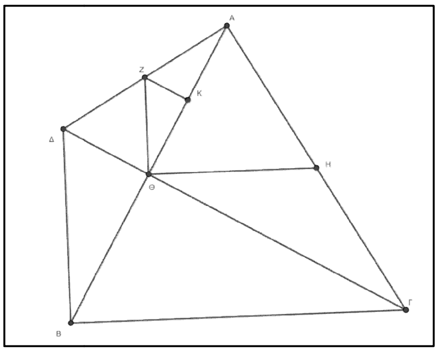
α) τα τρίγωνα ΑΖΜ και ΒΜΔ είναι ίσα,

β) το τετράπλευρο ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο,

γ) τα τμήματα ΖΕ και ΑΔ τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται,

δ) η ΒΖ είναι κάθετη στη ΖΑ .

34. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Με βάση την ΑΒ κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΒ, εκτός του τριγώνου ΑΒΓ, με γωνία $\hat{\Delta} = 120^o$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Η των πλευρών ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

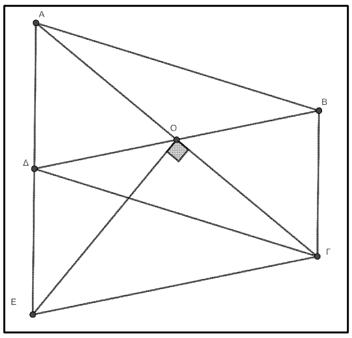


α) Να αποδείξετε ότι η ΔΓ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ.

β) Αν η ΔΓ τέμνει την ΑΒ στο Θ, να αποδείξετε ότι η γωνία $Z\hat{\Theta}H$ είναι ορθή.

γ) Αν η ΖΚ είναι η κάθετη στην ΑΒ από το σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι $ZK = \dfrac{A\Delta}{4}$.

35. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην ΑΓ στο κέντρο του Ο, αυτή τέμνει την προέκταση της ΑΔ σε σημείο Ε τέτοιο ώστε $\Delta E = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

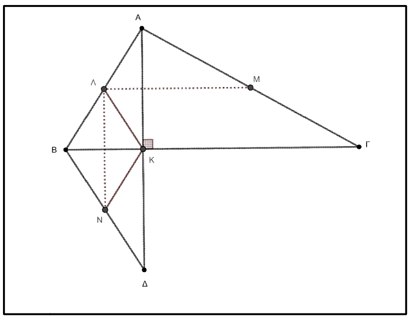


α) το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές,

β) το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι παραλληλόγραμμο,

γ) το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές.

36. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση του ύψους του ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε ΑΚ = ΚΔ. Έστω Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

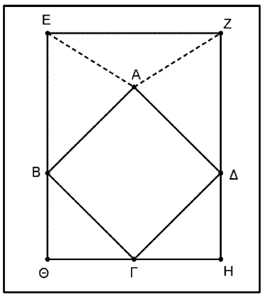


α) το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές,

β) το τετράπλευρο ΒΛΚΝ είναι ρόμβος,

γ) $\Lambda M \perp \Lambda N$.

37. Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο ΕΖΗΘ παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου. Ένας παίκτης τοποθετεί μια μπάλα στο σημείο Α το οποίο ανήκει στη μεσοκάθετη της ΘΗ και απέχει από αυτή απόσταση ίση με ΘΗ. Όταν ο παίκτης χτυπήσει τη μπάλα αυτή ακολουθεί τη διαδρομή $Α \to Β \longrightarrow Γ \longrightarrow Δ \longrightarrow Α$ χτυπώντας στους τοίχους του μπιλιάρδου ΕΘ, ΘΗ, ΖΗ διαδοχικά. Για τη διαδρομή αυτή ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ η γωνία $Α\hat{Β}Ε$) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ η γωνία $Θ\hat{Β}Γ$) και η κάθε μια απ' αυτές είναι 45^{o} .



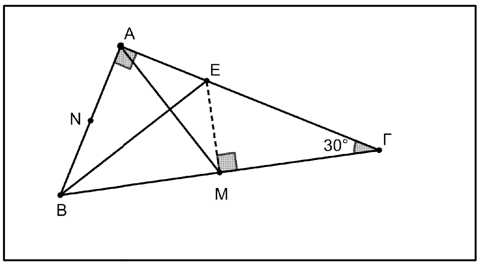
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η διαδρομή ΑΒΓΔ της μπάλας είναι τετράγωνο,

ii. το σημείο Α ισαπέχει από τα τις κορυφές Ε και Ζ του μπιλιάρδου.

β) Αν η ΑΖ είναι διπλάσια από την απόσταση του Α από τον τοίχο ΕΖ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΖ.

38. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ \left(\hat{Α} = 90^{o}\right)$ και $\hat{Γ} = 30^{o}$ με Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.



α) Να αποδείξετε ότι:

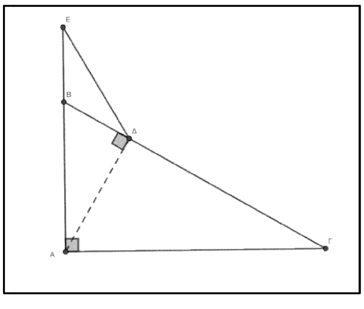
i. η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Β}$,

ii. $ΑΕ = \frac{ΓΕ}{2}$,

iii. η ΒΕ είναι μεσοκάθετος της διαμέσου ΑΜ .

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνει την ΒΕ στο Η, να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Η και Ν είναι συνευθειακά.

39. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία $\hat{Α}$ ορθή και $\hat{Β} = 2\hat{Γ}$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην προέκταση της ΑΒ τέτοιο ώστε ΒΕ = ΒΔ.



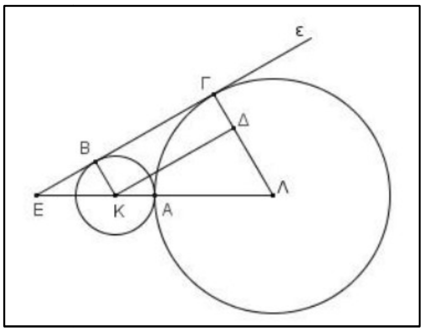
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ .

β) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΒΕ = \frac{ΑΒ}{2}$,

ii. ΑΕ = ΓΔ .

40. Οι κύκλοι (Κ, ρ) και (Λ, 3ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Μία ευθεία (ε) εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου ΚΛ (προς το Κ) στο σημείο Ε. Φέρουμε από το σημείο Κ παράλληλο τμήμα στην (ε) που τέμνει το τμήμα ΛΓ στο Δ.



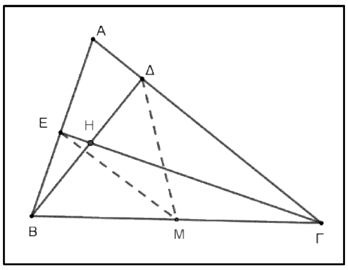
Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι ορθογώνιο,

β) η γωνία ΔΚΛ είναι 30^o,

γ) το τμήμα ΕΛ = 6ρ , όπου ρ η ακτίνα του κύκλου (Κ, ρ).

41. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που τέμνονται στο σημείο Η και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.



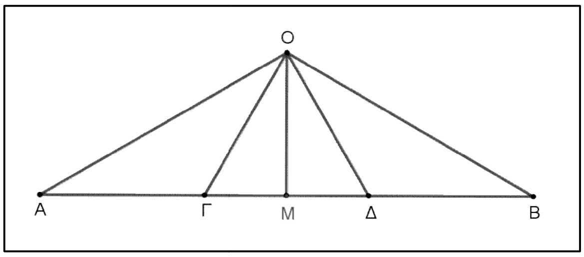
α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΜΔ = ΜΕ ,

ii. η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα τη ΒΓ και ότι $A\hat{H}\Delta = \hat{\Gamma}$, όπου $\hat{\Gamma}$ η γωνία του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΗ .

42. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ, Δ ώστε να ισχύει ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ . Επίσης θεωρούμε σημείο Ο εκτός του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ έτσι ώστε να ισχύουν ΟΓ = ΑΓ και ΟΔ = ΔΒ .



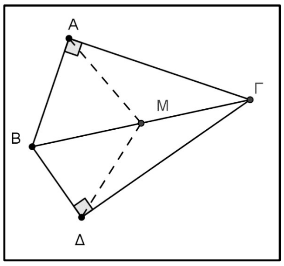
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η γωνία $\Gamma\hat{O}\Delta$ είναι 60^o ,

ii. οι γωνίες $O\hat{A}\Gamma$, $O\hat{B}\Delta$ είναι ίσες και κάθε μία ίση με 30^o .

β) Αν Μ το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, να αποδείξετε ότι 2ΟΜ=ΟΑ.

43. Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma\left(\hat{A}=90^o\right)$ και $\Delta B\Gamma\left(\hat{\Delta}=90^o\right)$ με τις κορυφές τους Α και Δ εκατέρωθεν της ΒΓ και το μέσο Μ της ΒΓ . Να αποδείξετε ότι:



α) το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές,

β) $A\hat{M}\Delta = 2A\hat{\Gamma}\Delta$,

γ) τα Α, Β, Δ και Γ είναι σημεία ενός κύκλου, τον οποίο και να κατασκευάσετε.

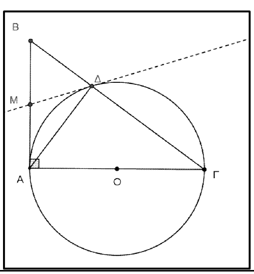
44. Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma\left(\hat{B}<\hat{\Gamma}\right)$ θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Έστω Η η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΗΕ = ΕΓ και ΗΖ = ΖΓ,

β) το τετράπλευρο ΔΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο,

γ) $Z\hat{\Delta}E = Z\hat{H}E$.

45. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma\left(\hat{A}=90^o\right)$. Με διάμετρο την κάθετη πλευρά του ΑΓ φέρουμε κύκλο κέντρου Ο, ο οποίος τέμνει την πλευρά ΒΓ του τριγώνου σε σημείο Δ. Έστω ότι η εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά ΑΒ σε σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι:

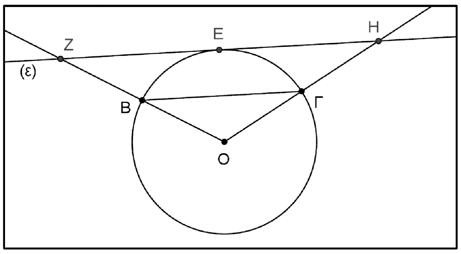


α) $\Gamma\hat{A}\Delta = \hat{B}$,

β) $M\hat{\Delta}B = 90 - \hat{\Gamma}$ και το τρίγωνο ΔΜΒ είναι ισοσκελές,

γ) το Μ είναι το μέσο του ΑΒ .

46. Θεωρούμε κύκλο (Ο, ρ) και Ε το μέσο του τόξου του ΒΓ. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο στο Ε. Οι προεκτάσεις των ΟΒ, ΟΓ (προς το Β και το Γ αντίστοιχα) τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι: **i.** $B\Gamma \parallel (\varepsilon)$, **ii.** $OZ = OH$

β) Αν το σημείο Β είναι το μέσο του ΟΖ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΟΗ.

47. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma \left(\hat{A} = 90^o\right)$ και το ύψος του ΑΗ . Ονομάζουμε Δ και Ε τα συμμετρικά σημεία του Η ως προς τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Αν Μ είναι το σημείο τομής του τμήματος ΗΔ με την πλευρά ΑΒ και Ν είναι το σημείο τομής του ΗΕ με την πλευρά ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) ΑΗ = ΑΔ = ΑΕ ,

β) Η γωνία $E\hat{H}\Delta$ είναι ορθή ,

γ) Τα σημεία Α, Ε και Δ είναι συνευθειακά και $MN = \frac{\Delta E}{2}$.

48. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma \left(\hat{A} = 90^o\right)$, τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών του και το ύψος του ΑΚ. Αν Θ είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΔΕ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ορθογώνιο,

ii. $A\Theta = \Theta E = \frac{B\Gamma}{4}$.

β) Αν επιπλέον είναι $\hat{\Gamma} = 30^o$, τότε:

i. να βρείτε τη γωνία $A\hat{Z}B$,

ii. να αποδείξετε ότι $BK = \frac{B\Gamma}{4}$.

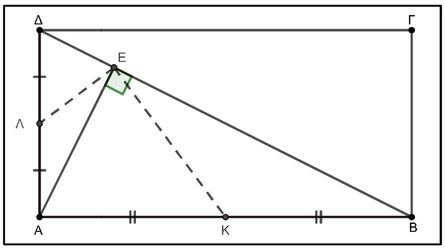
49. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και ΑΜ η διάμεσός του. Από το Μ φέρουμε ΜΚ κάθετη στην ΑΒ και ΜΛ κάθετη στην ΑΓ. Αν Ν, Ρ είναι τα μέσα των ΒΜ και ΓΜ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $N\hat{K}M = N\hat{M}K$,

β) Η ΜΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $N\hat{M}A$.

γ) $AM = KN + \Lambda P$.

50. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από την κορυφή Α φέρουμε ΑΕ κάθετη στη ΒΔ. Έστω Κ, Λ τα μέσα των ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα.



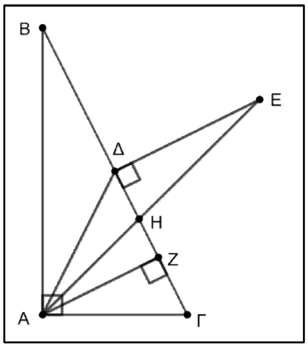
α) Να αποδείξετε ότι :

i. $K\hat{E}\Lambda = 30^{o}$,

ii. $K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$.

β) Αν $B\hat{A}\Gamma = 30^{o}$, να αποδείξετε ότι $K\Lambda = B\Gamma$.

51. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^{o}$ και $AB > A\Gamma$. Από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε κάθετη στη ΒΓ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η οποία τέμνει τη διχοτόμο ΑΗ της γωνίας $\hat{A}$ στο σημείο Ε . Έστω ΑΖ το ύψος στην υποτείνουσα. Να αποδείξετε ότι:

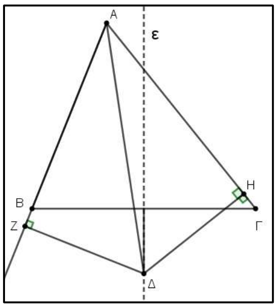


α) $\Gamma\hat{A}Z = \Delta\hat{A}B$,

β) $A\Delta = \Delta E$,

γ) $Z\hat{A}\Delta = \hat{\Gamma} - \hat{B}$.

52. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ . Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει την μεσοκάθετο (ε) της ΒΓ στο Δ . Από το Δ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΔΖ και ΔΗ προς τις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

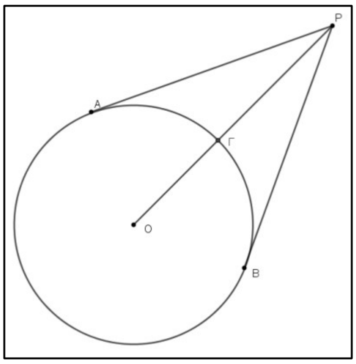


α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΔ .

β) Να αποδείξετε ότι $BZ = H\Gamma$.

γ) Αν η γωνία $\hat{A} = 60^{o}$ και Μ το μέσο της ΑΔ , να αποδείξετε ότι $HM = Z\Delta$.

53. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και σημείο Ρ εκτός του κύκλου. Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Η ΡΟ τέμνει το μικρότερο του ημικυκλίου τόξο ΑΒ στο Γ και $A\hat{P}B = 60^{o}$. Να αποδείξετε ότι:

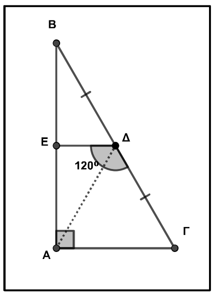


α) $OP = 2\rho$,

β) $A\hat{\Gamma}B = 120^{o}$.

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι ρόμβος. Συμφωνείτε μαζί του; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

54. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^{o}$. Από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΑΓ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι $E\hat{\Delta}\Gamma = 120^{o}$, τότε:

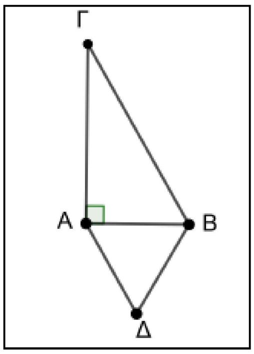


α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνία $\Delta\hat{\Gamma}A$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο.

γ) Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ προς το Γ κατά τμήμα $ΓΖ = ΑΓ$ και την πλευρά ΒΓ προς το Γ κατά τμήμα $ΓΗ = \frac{ΒΓ}{2}$. Να αποδείξετε ότι $Α\hat{Η}Ζ = 90^\circ$.

55. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{Α} = 90^\circ$. Επίσης οι ΑΔ και ΒΓ είναι παράλληλες και το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.

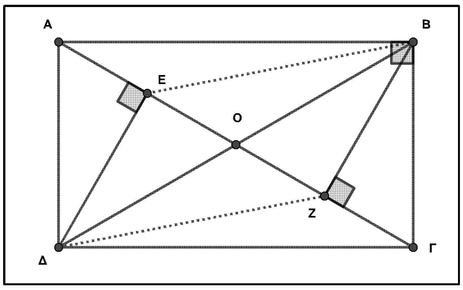


α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ του τριγώνου ΑΒΓ ,

β) Αν η περίμετρος του ΑΒΔ είναι 12 να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας του ΑΒΓ ,

γ) Αν το σημείο Κ είναι σημείο της υποτείνουσας τέτοιο ώστε το ΑΔΒΚ να είναι παραλληλόγραμμο, τότε να βρείτε τη θέση του σημείου Κ. Τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το ΑΔΒΚ; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

56. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ > ΑΔ και με κέντρο Ο . Αν ΒΖ και ΔΕ είναι οι αποστάσεις των κορυφών Β και Δ από τη διαγώνιο ΑΓ, τότε:

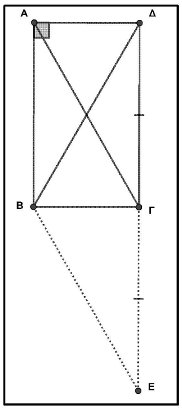


α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Αν $Δ\hat{Α}Ε = 60^\circ$ και $ΟΕ = 5$, να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΔ.

57. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΔΓ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $ΓΕ = ΔΓ$.

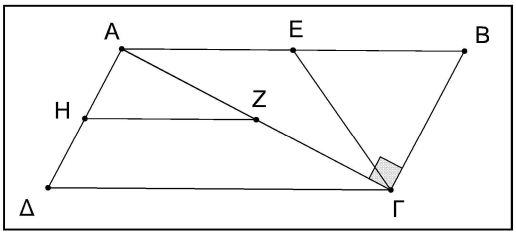


α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

γ) Αν $Δ\hat{Β}Ε = 120^\circ$ να αποδείξετε ότι $ΒΔ = 2ΑΔ$.

58. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε η διαγώνιός του ΑΓ να είναι κάθετη στη ΒΓ. Θεωρούμε τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα.



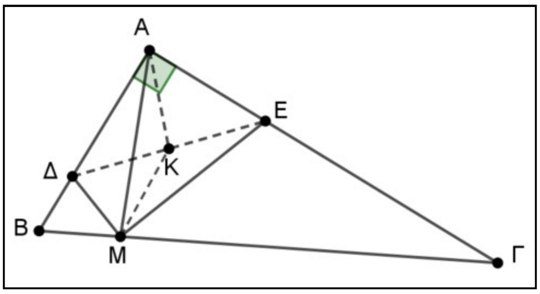
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΓΕ = ΖΗ$,

ii. Η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $Δ\hat{Γ}Ε$.

β) Αν $ΔΗ = \frac{ΑΒ}{4}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισόπλευρο.

59. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ. Φέρουμε τις διχοτόμους γωνιών $\hat{BMA}$ και $\hat{AMΓ}$ οι οποίες τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι, η γωνία $\hat{ΔME}$ είναι ορθή.

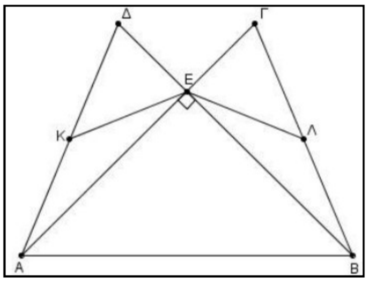
β) Αν Κ το μέσο του ΔΕ, να αποδείξετε ότι ΜΚ = ΚΑ .

60. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΒ (ΑΓ = ΓΒ) . Φέρουμε τα ύψη του ΑΚ και ΓΛ . Αν Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ , να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές,

β) η ΚΛ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{BKE}$.

61. Δίνονται δύο ίσα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ΑΒΔ (ΒΑ = ΒΔ) , τέτοια ώστε οι πλευρές τους ΑΓ και ΒΔ να τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε , όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

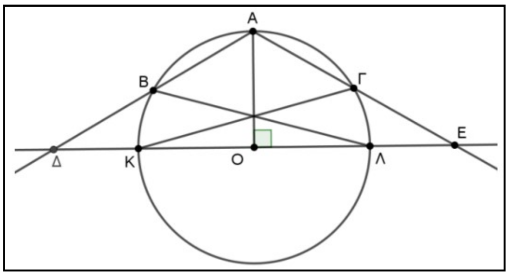


α) ΕΔ = ΕΓ ,

β) ΔΓ // ΑΒ ,

γ) το τρίγωνο ΕΚΛ είναι ισοσκελές και ΚΛ // ΑΒ .

62. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο ΚΛ . Έστω Α σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα ΟΑ να είναι κάθετη στην ΚΛ . Φέρουμε τις χορδές ΑΒ = ΑΓ = ρ . Έστω Δ και Ε τα σημεία τομής των προεκτάσεων των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου ΚΛ . Να αποδείξετε ότι:

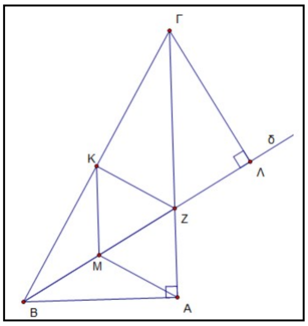


α) η γωνία $\hat{BAΓ}$ είναι 120^{o} ,

β) τα σημεία Β και Γ είναι μέσα των ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα,

γ) ΚΓ = ΛΒ .

63. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^{o}$ και $\hat{B} = 60^{o}$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την ΑΓ στο Ζ . Τα σημεία Μ και Κ είναι τα μέσα των ΒΖ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΓΛ είναι κάθετο στη διχοτόμο Βδ , να αποδείξετε ότι:



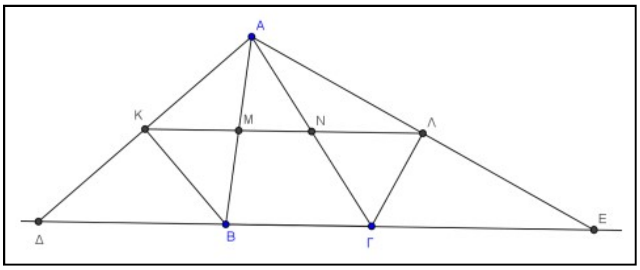
α) το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ισοσκελές,

β) το τετράπλευρο ΑΜΚΖ είναι ρόμβος,

γ) ΓΖ = 2ΖΑ ,

δ) ΒΛ = ΑΓ .

64. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΒΔ = ΑΒ ενώ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΓΕ = ΓΑ . Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$ τέμνουν τις ΑΔ και ΑΕ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα, και η ΚΛ τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, να



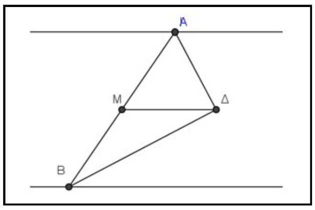
αποδείξετε ότι:

α) τα σημεία Κ και Λ είναι μέσα των ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα,

β) τα τρίγωνα ΚΜΑ και ΑΝΛ είναι ισοσκελή,

γ) $ΚΛ = \frac{ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ}{2}$.

65. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες (ε) και (ζ) και μία τρίτη που τις τέμνει στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Δ . Αν Μ είναι το μέσον του ΑΒ , να αποδείξετε ότι:



α) η γωνία $Β\hat{Δ}Α$ είναι ορθή,

β) $Β\hat{Μ}Δ = 2Μ\hat{Δ}Α$,

γ) ΜΔ // (ε) .

66. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Δ , Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ αντίστοιχα. Στην προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) θεωρούμε σημείο Λ ώστε ΕΛ = ΑΕ και στην προέκταση της ΕΔ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο Κ τέτοιο ώστε ΔΚ = ΑΔ . Να αποδείξετε ότι:

α) ΚΔ = ΛΕ ,

β) τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ορθογώνια,

γ) τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ίσα.

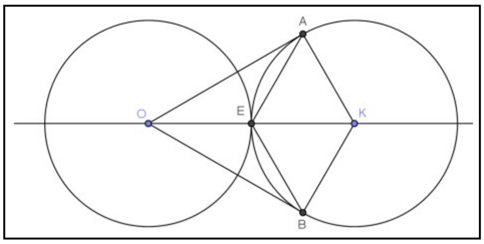
67. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία $\hat{Α}$ ορθή. Φέρουμε τη διάμεσο του ΑΜ και σε τυχαίο σημείο Κ αυτής φέρουμε κάθετη στην ΑΜ η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Αν Η είναι το μέσο του ΔΕ να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{Β} = Β\hat{Α}Μ$,

β) $Α\hat{Δ}Η = Δ\hat{Α}Η$,

γ) η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα τη ΒΓ .

68. Δύο ίσοι κύκλοι (Ο,ρ) και (Κ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ε . Αν ΟΑ και ΟΒ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Ο στον κύκλο (Κ,ρ) , να αποδείξετε ότι:

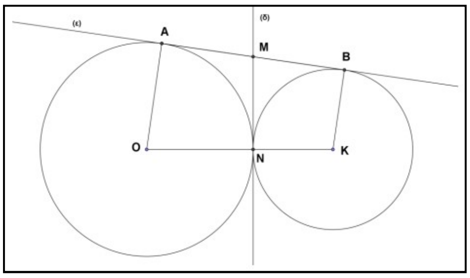


α) ΑΕ = ΒΕ ,

β) $Α\hat{Ο}Κ = 30^o$,

γ) το τετράπλευρο ΑΚΒΕ είναι ρόμβος .

69. Δύο κύκλοι $(Ο,ρ_1)$, $(Ο,ρ_2)$ εφάπτονται εξωτερικά στο Ν . Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία Α , Β αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο Ν τέμνει την (ε) στο Μ . Να αποδείξετε ότι:



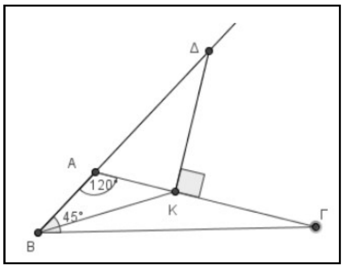
α) το Μ είναι μέσον του ΑΒ ,

β) $Ο\hat{Μ}Κ = 90^o$,

γ) $Α\hat{Ν}Β = 90^o$.

70. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία $\hat{Α}$ ίση με 120^o και γωνία $\hat{Β}$ είναι ίση με 45^o . Στην προέκταση της ΒΑ προς το Α , παίρνουμε τμήμα ΑΔ = 2ΑΒ . Από το Δ φέρνουμε την κάθετη στην ΑΓ που την τέμνει στο σημείο Κ .

Να αποδείξετε ότι:



α) η γωνία $A\hat{\Delta}K$ είναι ίση με 30^o,

β) το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές,

γ) αν Z το μέσο της ΔA, τότε $Z\hat{K}B = 90^o$.

δ) το σημείο K ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος $B\Delta$.

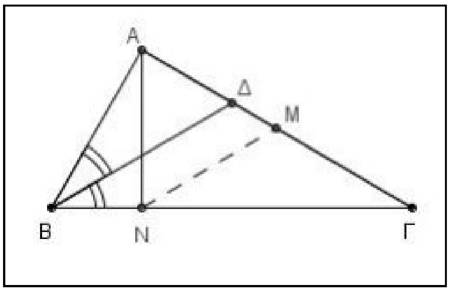
71. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία $\hat{A}$ αμβλεία, ισχύει ότι $AB = 2A\Delta$. Τα σημεία E και Z, είναι μέσα των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Από το Δ φέρουμε τη ΔH κάθετη στην προέκταση της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι ρόμβος,

β) το τρίγωνο EZH είναι ισοσκελές,

γ) το τμήμα HE, είναι διχοτόμος της γωνίας $Z\hat{H}\Gamma$.

72. Δίνεται τρίγωνο με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. Από το μέσο M της $A\Gamma$ φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο $B\Delta$ που τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο N. Να αποδείξετε ότι:



α) το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές,

β) το τρίγωνο $MN\Gamma$ είναι ισοσκελές,

γ) $AN \perp B\Gamma$.