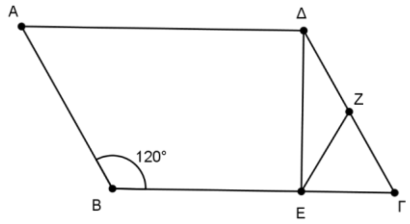
1. **ΘΕΜΑ_2_37017**

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{B} = 120°$ και $ΔΕ \perp ΒΓ$. Έστω ΕΖ η διάμεσος του τριγώνου ΔΕΓ.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{Γ}$ του παραλληλογράμμου.

β) Αν Κ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, να αποδείξετε ότι $ΕΖ = ΑΚ$.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $Ε\hat{Z}Γ$.

2. **ΘΕΜΑ_2_37016**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε $ΑΓ < ΑΒ$. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $ΑΔ = ΑΓ$ και στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $ΑΕ = ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα ΔΓ και ΕΓ είναι κάθετα μεταξύ τους,

β) η γωνία $Ε\hat{A}Γ$ είναι διπλάσια της γωνίας $Α\hat{Δ}Γ$.

3. **ΘΕΜΑ_2_37007**

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = 60°$. Φέρουμε τα ύψη ΑΕ και ΒΖ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ που αντιστοιχούν στην ευθεία ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΓΖ = \frac{ΑΔ}{2}$,

β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ίσο με το τρίγωνο ΒΓΖ,

γ) το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι ορθογώνιο.

4. **ΘΕΜΑ_2_37006**

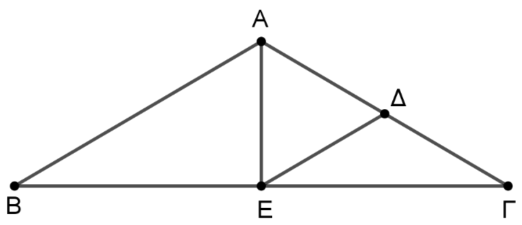
Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$ και $\hat{B} > \hat{Γ}$ φέρουμε το ύψος του ΑΔ και την διάμεσο ΑΜ στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) οι γωνίες $\hat{B}$ και $Γ\hat{A}Δ$ είναι ίσες,

β) $Α\hat{M}Δ = 2\hat{Γ}$.

5. **ΘΕΜΑ_2_36224**

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και γωνία $\hat{B}$ ίση με $30°$. Θεωρούμε Δ και Ε τα μέσα των ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

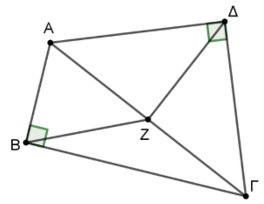


α) το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του,

β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.

6. ΘΕΜΑ_2_36355

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=90°$ και Ζ το μέσο του ΑΓ. Με υποτείνουσα το ΑΓ κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ με $\hat{\Delta}=90°$ και $\Delta A=\Delta\Gamma$.

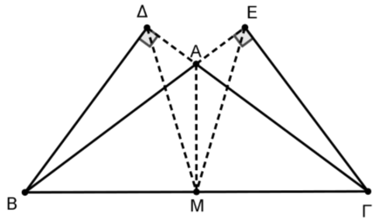


α) Να αποδείξετε ότι $BZ=\Delta Z$.

β) Αν είναι $A\hat{\Gamma}B=30°$, τότε να υπολογίσετε τις γωνίες $B\hat{A}\Delta$ και $B\hat{\Gamma}\Delta$.

7. ΘΕΜΑ_2_36350

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB=A\Gamma)$. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ προς το Α φέρνουμε τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta=\Gamma E$.

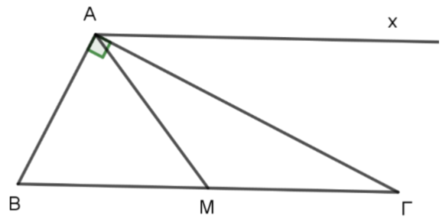
β) Αν το σημείο Μ είναι το μέσο της ΒΓ, τότε να αποδείξετε ότι:

i. $M\Delta=ME$,

ii. η ΜΑ διχοτομεί τη γωνία $\Delta\hat{M}E$.

8. ΘΕΜΑ_2_36328

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρουμε ημιευθεία Αx παράλληλη στη ΒΓ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΜ με το σημείο Γ). Να αποδείξετε ότι:

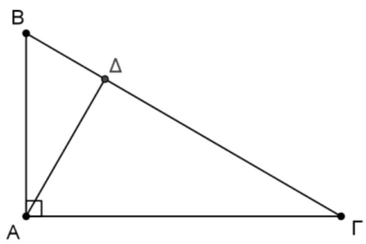


α) $M\hat{A}\Gamma=M\hat{\Gamma}A$,

β) η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}x$.

9. ΘΕΜΑ_2_36171

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή, $2\hat{\Gamma}=\hat{B}$ και το ύψος του ΑΔ.



α) Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να υπολογιστεί η γωνία $B\hat{A}\Delta$.

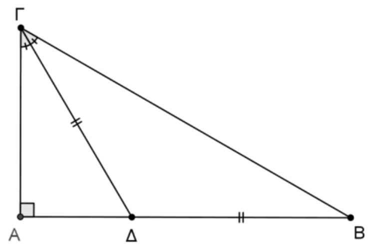
γ) Να αποδείξετε ότι $B\Delta=\dfrac{AB}{2}$.

10. ΘΕΜΑ_2_36116

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90°\right)$ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, τέτοιο ώστε ΓΔ = ΔΒ = 2cm . Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B}=30°$,

β) ΑΒ = 3 cm.

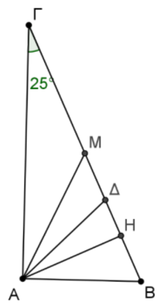


11. ΘΕΜΑ_2_36111

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90°$ και $\hat{\Gamma}=25°$. Δίνονται επίσης η διάμεσος ΑΜ, το ύψος ΑΗ από την κορυφή Α και η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{M}B$, $H\hat{A}B$, $A\hat{\Delta}B$.

β) Να αποδείξετε ότι $M\hat{A}\Delta=\Delta\hat{A}H=20°$.



12. ΘΕΜΑ_2_36109

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A}+\hat{\Gamma}=120°$ και $\hat{A}=3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

β) Αν η πλευρά ΒΓ = 2 cm να βρείτε το μήκος της ΑΒ.

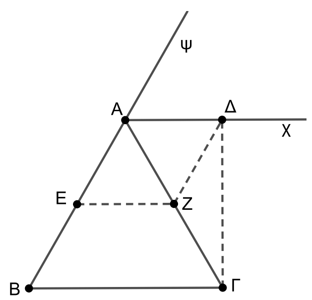
13. ΘΕΜΑ_2_36103

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Αx της γωνίας $\hat{A}$ και από το σημείο Γ την κάθετο ΓΔ στην Αx. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) ΕΖ = ΑΕ = ΑΖ,

β) η γωνία $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ίση με $30°$,

γ) το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ρόμβος.



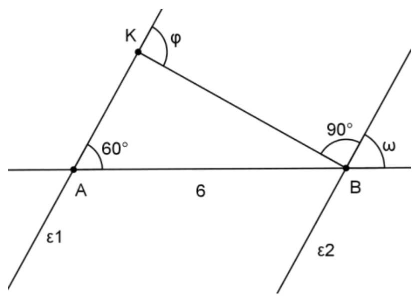
14. ΘΕΜΑ_2_36097

Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ε_1 , ε_2 είναι παράλληλες και ΑΒ = 6 .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\varphi}$ και $\hat{\omega}$.

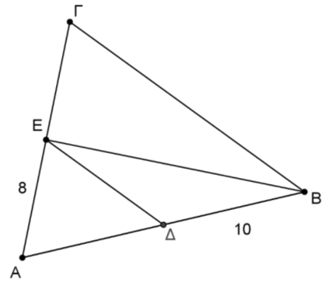
β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΑΒΚ ως προς τις γωνίες του.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΚ, αιτιολογώντας την απάντησή σας.



15. ΘΕΜΑ_2_36093

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $ΑΔ = ΕΔ = ΔΒ$ με $ΑΕ = 8$ και $ΔΒ = 10$.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο, **ii.** $ΒΓ = 20$.

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

16. ΘΕΜΑ_2_36086

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{Α} = 90°\right)$ με γωνία $\hat{Β} = 2\hat{Γ}$ και το μέσο Μ της πλευράς του ΒΓ.

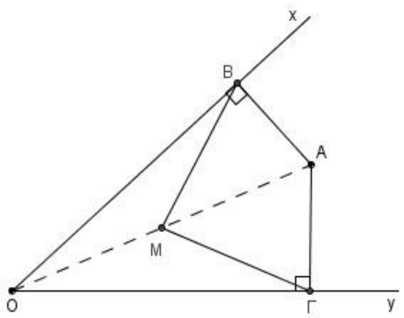
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $Α\hat{Μ}Γ$.

17. ΘΕΜΑ_2_34515

Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο Α στο εσωτερικό της. Από το Α φέρνουμε τις κάθετες ΑΒ, ΑΓ προς τις πλευρές Οx, Οy της γωνίας αντίστοιχα, και ονομάζουμε Μ το μέσο του ΟΑ. Να αποδείξετε ότι:



α) το τρίγωνο ΒΜΑ είναι ισοσκελές,

β) το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές,

γ) $Β\hat{Μ}Α = 2x\hat{O}Α$.

18. ΘΕΜΑ_2_34495

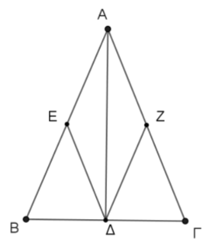
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και γωνία $\hat{Γ} = 30°$. Θεωρούμε το ύψος του ΑΔ και το μέσο Ζ της πλευράς ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι $ΔΖ = \frac{ΑΓ}{2}$.

β) Προεκτείνουμε το ύψος ΑΔ (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα ΔΕ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισόπλευρο.

19. ΘΕΜΑ_2_34492

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$, το ύψος του ΑΔ και τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

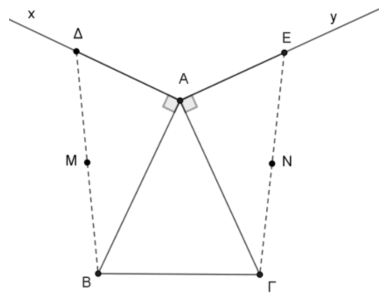


α) τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΖ είναι ίσα,

β) το τετράπλευρο ΑΖΔΕ είναι ρόμβος.

20. ΘΕΜΑ_2_34420

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$. Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Αx και Αy τέτοιες ώστε $Αx \perp ΑΒ$ και $Αy \perp ΑΓ$, όπως στο σχήμα που ακολουθεί. Στις Αx και Αy θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε ΑΔ = ΑΕ .

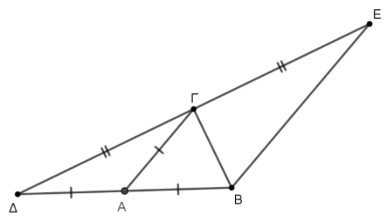


α) Να αποδείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ .

β) Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των τμημάτων ΒΔ και ΓΕ αντίστοιχα , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές

21. ΘΕΜΑ_2_34411

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$. Στην προέκταση της ΒΑ (προς το μέρος της κορυφής Α) παίρνουμε σημείο Δ ώστε ΑΒ = ΑΔ και στην προέκταση της ΔΓ (προς το μέρος της κορυφής Γ) παίρνουμε σημείο Ε ώστε ΔΓ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

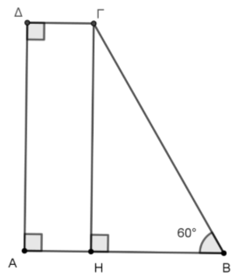


α) το τρίγωνο ΔΓΒ είναι ορθογώνιο,

β) $ΑΓ // ΒΕ$ και $ΑΓ = \frac{ΒΕ}{2}$.

22. ΘΕΜΑ_2_34408

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90°$, $ΑΒ > ΓΔ$, $ΒΓ = 4ΔΓ$, $\hat{Β} = 60°$ και $ΓΗ \perp ΑΒ$. Να αποδείξετε ότι:

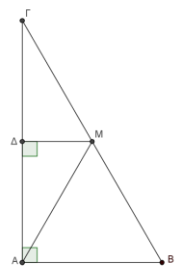


α) $ΗΒ = 2ΔΓ$,

β) το τετράπλευρο ΑΗΓΔ είναι ορθογώνιο με $ΑΗ = \frac{1}{2}ΗΒ$.

23. ΘΕΜΑ_2_34406

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{Α} = 90°)$ με ΒΓ = 8 cm . Έστω ΑΜ είναι διάμεσος του τριγώνου και $ΜΔ \perp ΑΓ$. Αν η γωνία $Α\hat{Μ}Γ$ είναι ίση με $120°$, τότε:

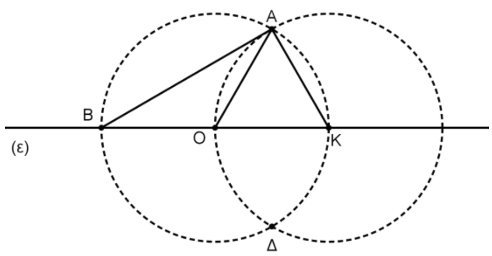


α) Να δείξετε ότι ΑΒ = 4 cm .

β) Να βρείτε το μήκος της ΜΔ.

24. ΘΕΜΑ_2_34314

Θεωρούμε δυο ίσους κύκλους $(Ο,ρ)$ και $(Κ,ρ)$ τεμνόμενους στα σημεία Α και Δ, με τα κέντρα τους Ο και Κ να βρίσκονται σε ευθεία $(ε)$ που τέμνει τον κύκλο $(Ο,ρ)$ σε σημείο Β, και τη διάκεντρό τους ΟΚ να είναι ίση με ρ.



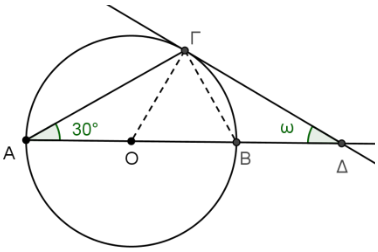
α) Να αποδείξετε ότι:

i. το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο,

ii. το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ορθογώνιο.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{B}K$.

25. ΘΕΜΑ_2_34313



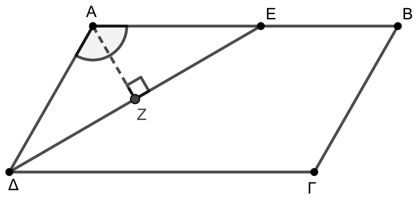
Δίνεται κύκλος (O,R) διαμέτρου ΑΒ, και χορδή του ΑΓ τέτοια ώστε $B\hat{A}\Gamma = 30°$. Στο σημείο Γ του κύκλου φέρουμε εφαπτομένη, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου ΑΒ (προς το Β) σε σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας του $\Gamma\hat{O}\Delta$.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{\omega}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $O\Delta = 2R$.

26. ΘΕΜΑ_2_14876

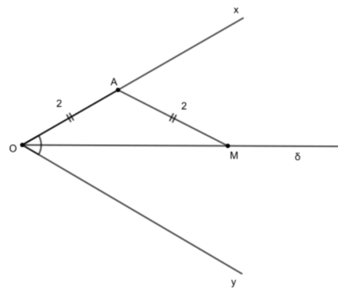


Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία $\hat{A} = 120°$ και $AB = 2A\Delta$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε, και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα ΑΖ στη ΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) $A\hat{\Delta}E = 30°$.

β) $AZ = \dfrac{AB}{4}$.

27. ΘΕΜΑ_2_13653



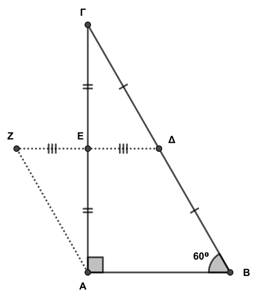
Σχεδιάζουμε γωνία $x\hat{O}y = 60°$ και παίρνουμε σημείο Α επί της πλευράς Οx, τέτοιο ώστε $AO = 2$. Φέρουμε τη διχοτόμο Οδ της γωνίας $x\hat{O}y$ και θεωρούμε σημείο Μ στην Οδ, τέτοιο ώστε $AM = AO$. Να υπολογίσετε:

α) τη γωνία $\delta\hat{O}y$,

β) τις γωνίες του τριγώνου ΑΟΜ,

γ) το μήκος του ύψους ΑΒ που αντιστοιχεί στη βάση ΟΜ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΟΜ.

28. ΘΕΜΑ_2_13837



Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$ και $\hat{B} = 60°$. Θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε που είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ = ΔΕ.

α) Να αποδείξετε ότι ΓΔ = ΑΖ .

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΖΑΒ είναι ισοσκελές.

29. ΘΕΜΑ_2_13831

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει $\hat{A} = 90°$.

α) Να σχεδιάσετε ένα τέτοιο τρίγωνο αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ΑΒ > ΑΓ .
Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου και γιατί;

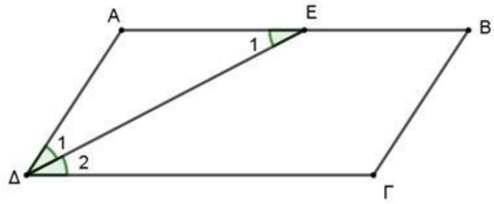
β) Αν για το τρίγωνο που σας ζητήθηκε να σχεδιάσετε στο **α)** ερώτημα γνωρίζετε επιπλέον ότι η μια από τις οξείες γωνίες του είναι ίση με $30°$, τότε να απαντήσετε στα παρακάτω:

i. Πόσες μοίρες θα είναι η γωνία $\hat{B}$ και πόσες η γωνία $\hat{\Gamma}$;

ii. Ποια πλευρά του τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας;

30. ΘΕΜΑ_3_12165

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = 120°$ και η διχοτόμος της γωνίας Δ που τέμνει την ΑΒ στο μέσο της Ε.



α) Να αποδείξετε ότι ΑΒ = 2ΑΔ **.**

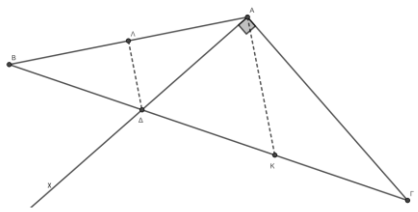
β) Αν το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από το σημείο Ε στην ΓΔ την τέμνει στο Η, τότε να αποδείξετε ότι $\frac{\Delta E}{HE} = 2$.

γ) Αν Μ το μέσο της ΓΔ , τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΑΔ είναι ισόπλευρο.

δ) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{A}\Gamma = 90°$.

31. ΘΕΜΑ_4_37156

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΒΑΓ με $\hat{A} = 120°$. Φέρουμε ημιευθεία Αx κάθετη στην ΑΓ στο Α, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο Δ . Έστω Λ το μέσο του ΑΒ και Κ το μέσο του ΔΓ . Να αποδείξετε ότι:



α) το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές,

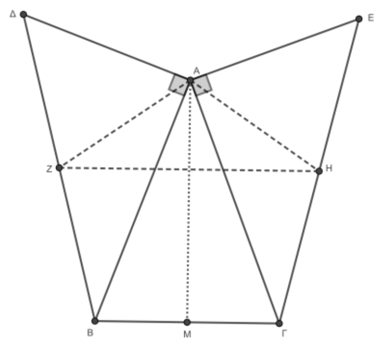
β) $\Delta\Gamma = 2B\Delta$,

γ) $\Lambda\Delta // AK$,

δ) $AK = 2\Lambda\Delta$.

32. ΘΕΜΑ_4_37142

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ . Φέρνουμε τμήμα ΑΔ κάθετο στην ΑΒ και τμήμα ΑΕ κάθετο στην ΑΓ με $A\Delta = AE$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ, Η και Μ των ΔΒ, ΕΓ και ΒΓ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι:

- **i.** τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ είναι ίσα,
- **ii.** το τρίγωνο ΖΑΗ είναι ισοσκελές,
- **iii.** η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ΖΗ .

β) Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έγραψε τα εξής:

« 1. *ΑΔ = ΑΕ από υπόθεση*

2. ΑΒ = ΑΓ πλευρές ισοσκελούς τριγώνου

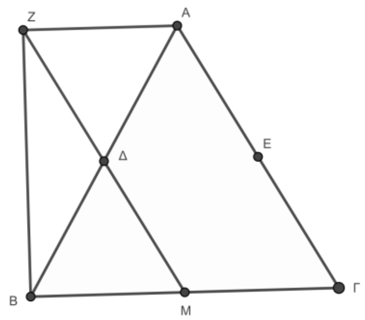
3. $\Delta\hat{A}B = E\hat{A}\Gamma$ *ως κατακορυφήν*

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μια προς μια και την περιεχόμενη γωνία ίση».

Ο καθηγητής είπε ότι αυτή η λύση περιέχει λάθος. Μπορείς να το εντοπίσεις;

33. ΘΕΜΑ_4_37140

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε και Μ των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στην προέκταση του ΜΔ (προς το Δ) θεωρούμε τμήμα $\Delta Z = \Delta M$. Να αποδείξετε ότι:



α) τα τρίγωνα ΑΖΜ και ΒΜΔ είναι ίσα,

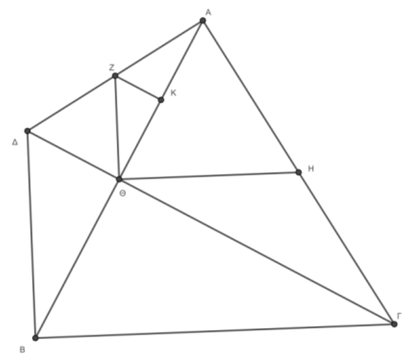
β) το τετράπλευρο ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο,

γ) τα τμήματα ΖΕ και ΑΔ τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται,

δ) η ΒΖ είναι κάθετη στη ΖΑ .

34. ΘΕΜΑ_4_37138

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Με βάση την ΑΒ κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΒ, εκτός του τριγώνου ΑΒΓ, με γωνία $\hat{\Delta} = 120°$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Η των πλευρών ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.



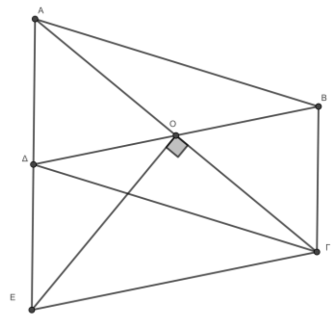
α) Να αποδείξετε ότι η ΔΓ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ.

β) Αν η ΔΓ τέμνει την ΑΒ στο Θ, να αποδείξετε ότι η γωνία $Z\hat{\Theta}H$ είναι ορθή.

γ) Αν η ΖΚ είναι η κάθετη στην ΑΒ από το σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι $ZK = \dfrac{A\Delta}{4}$.

35. ΘΕΜΑ_4_37136

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην ΑΓ στο κέντρο του Ο, αυτή τέμνει την προέκταση της ΑΔ σε σημείο Ε τέτοιο ώστε $\Delta E = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:



α) το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές,

β) το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι παραλληλόγραμμο,

γ) το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές.

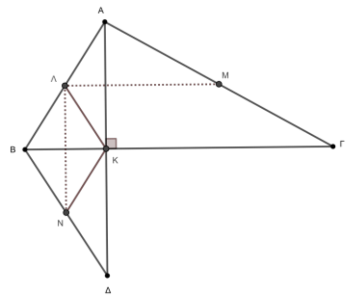
36. ΘΕΜΑ_4_37132

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση του ύψους του ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε ΑΚ = ΚΔ. Έστω Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές,

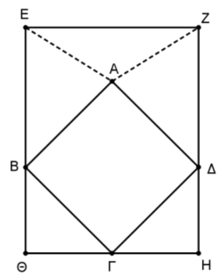
β) το τετράπλευρο ΒΛΚΝ είναι ρόμβος,

γ) $ΛΜ \perp ΛΝ$.



37. ΘΕΜΑ_4_37126

Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο ΕΖΗΘ παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου. Ένας παίκτης τοποθετεί μια μπάλα στο σημείο Α το οποίο ανήκει στη μεσοκάθετη της ΘΗ και απέχει από αυτή απόσταση ίση με ΘΗ. Όταν ο παίκτης χτυπήσει τη μπάλα αυτή ακολουθεί τη διαδρομή $Α \to Β \longrightarrow Γ \longrightarrow Δ \longrightarrow Α$ χτυπώντας στους τοίχους του μπιλιάρδου ΕΘ, ΘΗ, ΖΗ διαδοχικά. Για τη διαδρομή αυτή ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ. η γωνία $Α\hat{Β}Ε$) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ η γωνία $Θ\hat{Β}Γ$) και η κάθε μια απ’ αυτές είναι $45°$.



α) Να αποδείξετε ότι:

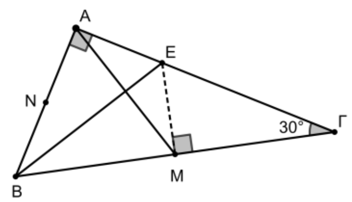
i. η διαδρομή ΑΒΓΔ της μπάλας είναι τετράγωνο,

ii. το σημείο Α ισαπέχει από τα τις κορυφές Ε και Ζ του μπιλιάρδου.

β) Αν η ΑΖ είναι διπλάσια από την απόσταση του Α από τον τοίχο ΕΖ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΖ.

38. ΘΕΜΑ_4_37104

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{Α}=90°\right)$ και $\hat{Γ}=30°$ με Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Β}$,

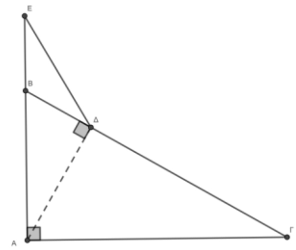
ii. $ΑΕ=\frac{ΓΕ}{2}$,

iii. η ΒΕ είναι μεσοκάθετος της διαμέσου ΑΜ .

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνει την ΒΕ στο Η, να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Η και Ν είναι συνευθειακά.

39. ΘΕΜΑ_4_37100

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία $\hat{A}$ ορθή και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην προέκταση της ΑΒ τέτοιο ώστε ΒΕ = ΒΔ.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ .

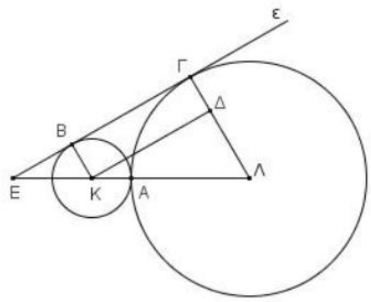
β) Να αποδείξετε ότι:

i. $BE = \dfrac{AB}{2}$,

ii. $AE = \Gamma\Delta$.

40. ΘΕΜΑ_4_37088

Οι κύκλοι (K,ρ) και $(\Lambda,3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Μία ευθεία (ε) εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου ΚΛ (προς το Κ) στο σημείο Ε. Φέρουμε από το σημείο Κ παράλληλο τμήμα στην (ε) που τέμνει το τμήμα ΛΓ στο Δ.



Να αποδείξετε ότι:

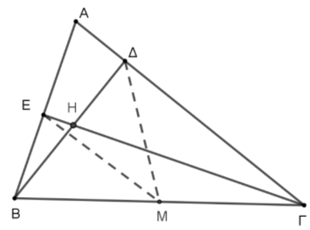
α) το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι ορθογώνιο,

β) η γωνία ΔΚΛ είναι 30°,

γ) το τμήμα ΕΛ = 6ρ , όπου ρ η ακτίνα του κύκλου (K,ρ).

41. ΘΕΜΑ_4_37085

Στο διπλανό σχήμα δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που τέμνονται στο σημείο Η και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.



α) Να αποδείξετε ότι:

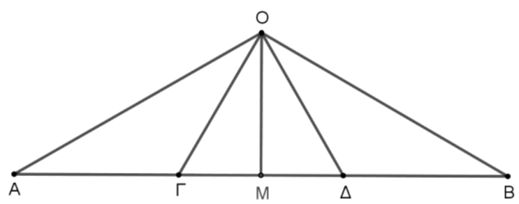
i. ΜΔ = ΜΕ ,

ii. η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα τη ΒΓ και ότι $A\hat{H}\Delta = \hat{\Gamma}$, όπου $\hat{\Gamma}$ η γωνία του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΗ .

42. ΘΕΜΑ_4_37075

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ, Δ ώστε να ισχύει $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta B$. Επίσης θεωρούμε σημείο Ο εκτός του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ έτσι ώστε να ισχύουν $O\Gamma = A\Gamma$ και $O\Delta = \Delta B$.



α) Να αποδείξετε ότι:

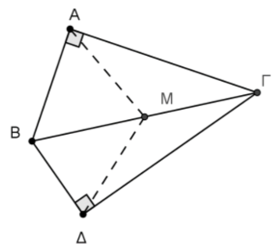
i. η γωνία $\Gamma\hat{O}\Delta$ είναι $60°$,

ii. οι γωνίες $O\hat{A}\Gamma$, $O\hat{B}\Delta$ είναι ίσες και κάθε μία ίση με $30°$.

β) Αν Μ το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, να αποδείξετε ότι $2OM = OA$.

43. ΘΕΜΑ_4_34330

Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma\ (\hat{A}=90°)$ και $\Delta B\Gamma\ (\hat{\Delta}=90°)$ με τις κορυφές τους Α και Δ εκατέρωθεν της ΒΓ και το μέσο Μ της ΒΓ.



Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές,

β) $A\hat{M}\Delta = 2A\hat{\Gamma}\Delta$,

γ) τα Α, Β, Δ και Γ είναι σημεία ενός κύκλου, τον οποίο και να κατασκευάσετε.

44. ΘΕΜΑ_4_34334

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma\left(\hat{B}<\hat{\Gamma}\right)$ θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Έστω Η η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

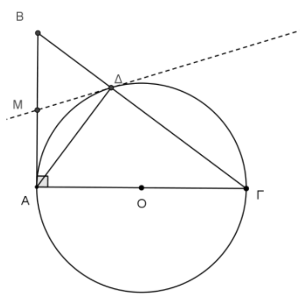
α) $HE = E\Gamma$ και $HZ = Z\Gamma$,

β) το τετράπλευρο ΔΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο,

γ) $Z\hat{\Delta}E = Z\hat{H}E$.

45. ΘΕΜΑ_4_34329

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma\ (\hat{A}=90°)$. Με διάμετρο την κάθετη πλευρά του ΑΓ φέρουμε κύκλο κέντρου Ο, ο οποίος τέμνει την πλευρά ΒΓ του τριγώνου σε σημείο Δ. Έστω ότι η εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά ΑΒ σε σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι:



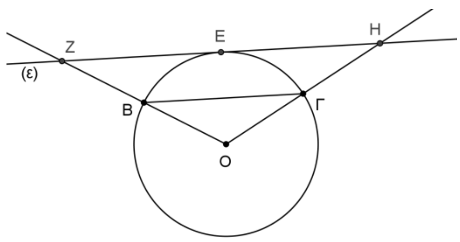
α) $\Gamma\hat{A}\Delta = \hat{B}$,

β) $M\hat{\Delta}B = 90° - \hat{\Gamma}$ και το τρίγωνο ΔΜΒ είναι ισοσκελές,

γ) το Μ είναι το μέσο του ΑΒ.

46. ΘΕΜΑ_4_34318

Θεωρούμε κύκλο (O,ρ) και Ε το μέσο του τόξου του ΒΓ. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο στο Ε. Οι προεκτάσεις των ΟΒ, ΟΓ (προς το Β και το Γ αντίστοιχα) τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι: **i.** $B\Gamma\, //\, (\varepsilon)$, **ii.** $OZ = OH$

β) Αν το σημείο Β είναι το μέσο του ΟΖ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΟΗ.

47. ΘΕΜΑ_4_1737

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90°\right)$ και το ύψος του ΑΗ. Ονομάζουμε Δ και Ε τα συμμετρικά σημεία του Η ως προς τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Αν Μ είναι το σημείο τομής του τμήματος ΗΔ με την πλευρά ΑΒ και Ν είναι το σημείο τομής του ΗΕ με την πλευρά ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) ΑΗ = ΑΔ = ΑΕ ,

β) Η γωνία $E\hat{H}\Delta$ είναι ορθή ,

γ) Τα σημεία Α, Ε και Δ είναι συνευθειακά και $MN=\dfrac{\Delta E}{2}$.

48. ΘΕΜΑ_4_14886

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90°\right)$, τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών του και το ύψος του ΑΚ. Αν Θ είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΔΕ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ορθογώνιο,

ii. $A\Theta=\Theta E=\dfrac{B\Gamma}{4}$.

β) Αν επιπλέον είναι $\hat{\Gamma}=30°$, τότε:

i. να βρείτε τη γωνία $A\hat{Z}B$,

ii. να αποδείξετε ότι $BK=\dfrac{B\Gamma}{4}$.

49. ΘΕΜΑ_4_14881

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και ΑΜ η διάμεσός του. Από το Μ φέρουμε ΜΚ κάθετη στην ΑΒ και ΜΛ κάθετη στην ΑΓ. Αν Ν, Ρ είναι τα μέσα των ΒΜ και ΓΜ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

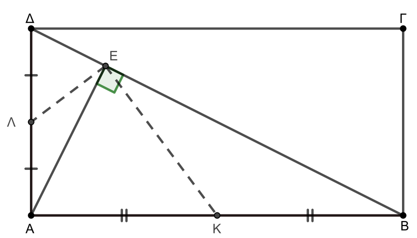
α) $N\hat{K}M=N\hat{M}K$,

β) Η ΜΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $N\hat{M}A$,

γ) $AM=KN+\Lambda P$.

50. ΘΕΜΑ_4_14879

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από την κορυφή Α φέρουμε ΑΕ κάθετη στη ΒΔ. Έστω Κ, Λ τα μέσα των ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα.



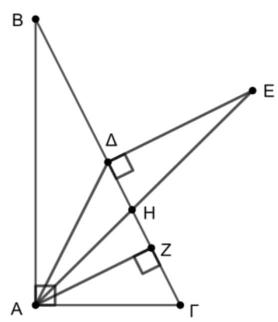
α) Να αποδείξετε ότι :

i. $K\hat{E}\Lambda=30°$,

ii. $K\Lambda=\dfrac{A\Gamma}{2}$.

β) Αν $B\hat{A}\Gamma = 30°$, να αποδείξετε ότι $K\Lambda = B\Gamma$.

51. ΘΕΜΑ_4_13672



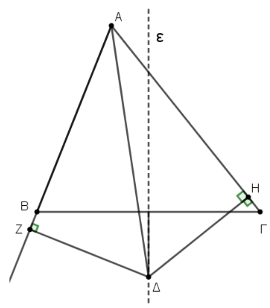
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$ και $AB > A\Gamma$. Από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε κάθετη στη ΒΓ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η οποία τέμνει τη διχοτόμο ΑΗ της γωνίας $\hat{A}$ στο σημείο Ε. Έστω ΑΖ το ύψος στην υποτείνουσα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\hat{A}Z = \Delta\hat{A}B$,

β) $A\Delta = \Delta E$,

γ) $Z\hat{A}\Delta = \hat{\Gamma} - \hat{B}$.

52. ΘΕΜΑ_4_13522



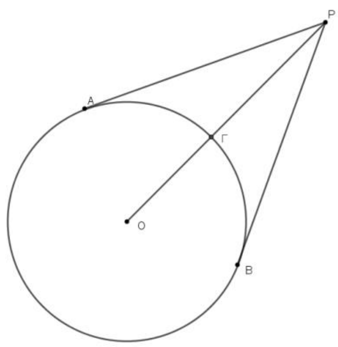
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ . Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει την μεσοκάθετο (ε) της ΒΓ στο Δ. Από το Δ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΔΖ και ΔΗ προς τις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΔ .

β) Να αποδείξετε ότι $BZ = H\Gamma$.

γ) Αν η γωνία $\hat{A} = 60°$ και Μ το μέσο της ΑΔ , να αποδείξετε ότι $HM = Z\Delta$.

53. ΘΕΜΑ_4_13520



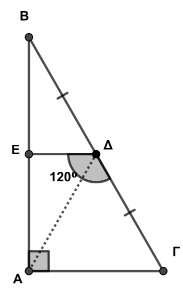
Δίνεται κύκλος (O, ρ) και σημείο Ρ εκτός του κύκλου. Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Η ΡΟ τέμνει το μικρότερο του ημικυκλίου τόξο ΑΒ στο Γ και $A\hat{P}B = 60°$. Να αποδείξετε ότι:

α) $OP = 2\rho$,

β) $A\hat{\Gamma}B = 120°$.

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι ρόμβος. Συμφωνείτε μαζί του; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

54. ΘΕΜΑ_4_13855



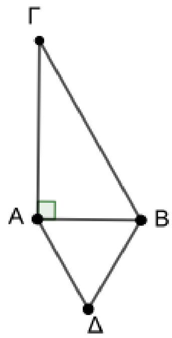
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$. Από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΑΓ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι $E\hat{\Delta}\Gamma = 120°$, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνία $\Delta\hat{\Gamma}A$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο.

γ) Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma Z = A\Gamma$ και την πλευρά ΒΓ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma H = \frac{B\Gamma}{2}$. Να αποδείξετε ότι $A\hat{H}Z = 90°$.

55. ΘΕΜΑ_4_13853



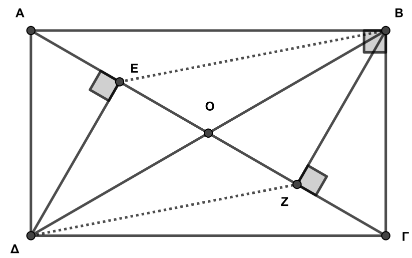
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90°$. Επίσης οι ΑΔ και ΒΓ είναι παράλληλες και το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ ,

β) Αν η περίμετρος του ΑΒΔ είναι 12 να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας του ΑΒΓ ,

γ) Αν το σημείο Κ είναι σημείο της υποτείνουσας τέτοιο ώστε το ΑΔΒΚ να είναι παραλληλόγραμμο, τότε να βρείτε τη θέση του σημείου Κ. Τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το ΑΔΒΚ; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

56. ΘΕΜΑ_4_13852



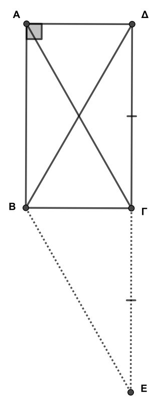
Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ > ΑΔ και με κέντρο Ο . Αν ΒΖ και ΔΕ είναι οι αποστάσεις των κορυφών Β και Δ από τη διαγώνιο ΑΓ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Αν $\Delta\hat{A}E = 60°$ και $OE = 5$, να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΔ.

57. ΘΕΜΑ_4_13851



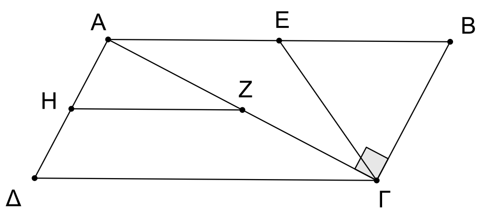
Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΔΓ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma E = \Delta\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

γ) Αν $\Delta\hat{B}E = 120°$ να αποδείξετε ότι $B\Delta = 2A\Delta$.

58. ΘΕΜΑ_4_13540



Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε η διαγώνιός του ΑΓ να είναι κάθετη στη ΒΓ. Θεωρούμε τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

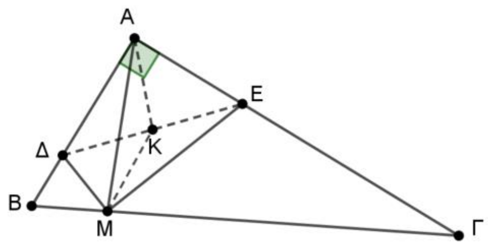
i. $ΓΕ = ΖΗ$,

ii. Η $ΓΑ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Δ\hat{Γ}Ε$.

β) Αν $ΔΗ = \frac{ΑΒ}{4}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισόπλευρο.

59. ΘΕΜΑ_4_1812

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ. Φέρουμε τις διχοτόμους γωνιών $Β\hat{Μ}Α$ και $Α\hat{Μ}Γ$ οι οποίες τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι, η γωνία $Δ\hat{Μ}Ε$ είναι ορθή.

β) Αν Κ το μέσο του ΔΕ, να αποδείξετε ότι $ΜΚ = ΚΑ$.

60. ΘΕΜΑ_4_1895

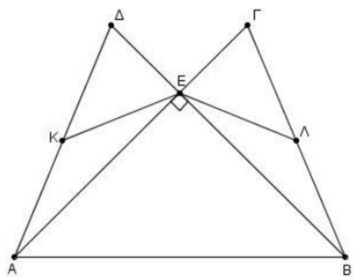
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΒ $(ΑΓ = ΓΒ)$. Φέρουμε τα ύψη του ΑΚ και ΓΛ. Αν Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές,

β) η ΚΛ είναι διχοτόμος της γωνίας $Β\hat{Κ}Ε$.

61. ΘΕΜΑ_4_1876

Δίνονται δύο ίσα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και ΑΒΔ $(ΒΑ = ΒΔ)$, τέτοια ώστε οι πλευρές τους ΑΓ και ΒΔ να τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



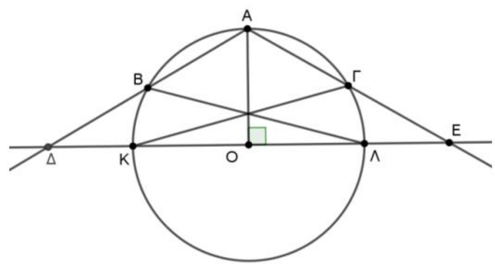
α) $ΕΔ = ΕΓ$,

β) $ΔΓ // ΑΒ$,

γ) το τρίγωνο ΕΚΛ είναι ισοσκελές και $ΚΛ // ΑΒ$.

62. ΘΕΜΑ_4_1874

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο ΚΛ. Έστω Α σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα ΟΑ να είναι κάθετη στην ΚΛ. Φέρουμε τις χορδές $ΑΒ = ΑΓ = ρ$. Έστω Δ και Ε τα σημεία τομής των προεκτάσεων των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου ΚΛ. Να αποδείξετε ότι:



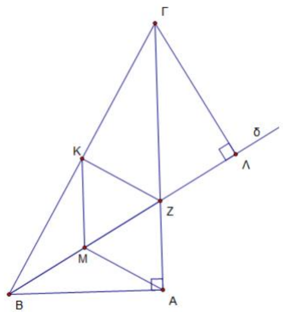
α) η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι $120°$,

β) τα σημεία B και Γ είναι μέσα των $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα,

γ) $K\Gamma = \Lambda B$.

63. ΘΕΜΑ_4_1872

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90°$ και $\hat{B} = 60°$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την $A\Gamma$ στο Z. Τα σημεία M και K είναι τα μέσα των BZ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Αν το τμήμα $\Gamma\Lambda$ είναι κάθετο στη διχοτόμο $B\delta$, να αποδείξετε ότι:



α) το τρίγωνο $BZ\Gamma$ είναι ισοσκελές,

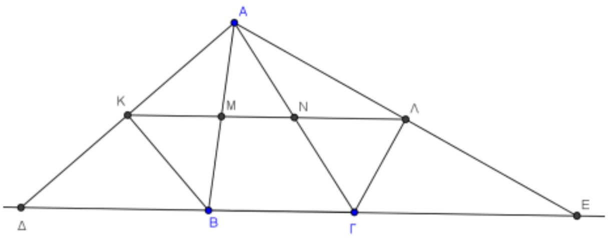
β) το τετράπλευρο $AMKZ$ είναι ρόμβος,

γ) $\Gamma Z = 2ZA$,

δ) $B\Lambda = A\Gamma$.

64. ΘΕΜΑ_4_1824

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = AB$ ενώ στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Gamma E = \Gamma A$. Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνουν τις $A\Delta$ και AE στα σημεία K και Λ αντίστοιχα, και η $K\Lambda$ τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία M και N αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



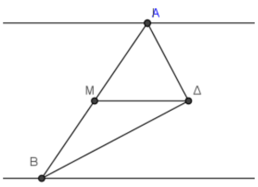
α) τα σημεία K και Λ είναι μέσα των $A\Delta$ και AE αντίστοιχα,

β) τα τρίγωνα KMA και $AN\Lambda$ είναι ισοσκελή,

γ) $K\Lambda = \dfrac{AB + A\Gamma + B\Gamma}{2}$.

65. ΘΕΜΑ_4_1811

Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες (ε) και (ζ) και μία τρίτη που τις τέμνει στα σημεία A και B αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Δ. Αν M είναι το μέσον του AB, να αποδείξετε ότι:



α) η γωνία $B\hat{\Delta}A$ είναι ορθή,

β) $B\hat{M}\Delta = 2M\hat{\Delta}A$,

γ) $M\Delta \,//\, (\varepsilon)$.

66. ΘΕΜΑ_4_1808

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$ και $Δ$, $Ε$ τα μέσα των πλευρών του $ΑΒ$ αντίστοιχα. Στην προέκταση της $ΔΕ$ (προς το Ε) θεωρούμε σημείο $Λ$ ώστε $ΕΛ = ΑΕ$ και στην προέκταση της $ΕΔ$ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο $Κ$ τέτοιο ώστε $ΔΚ = ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΚΔ = ΛΕ$,

β) τα τρίγωνα $ΑΚΒ$ και $ΑΛΓ$ είναι ορθογώνια,

γ) τα τρίγωνα $ΑΚΒ$ και $ΑΛΓ$ είναι ίσα.

67. ΘΕΜΑ_4_1806

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με τη γωνία $\hat{Α}$ ορθή. Φέρουμε τη διάμεσο του $ΑΜ$ και σε τυχαίο σημείο $Κ$ αυτής φέρουμε κάθετη στην $ΑΜ$ η οποία τέμνει τις $ΑΒ$ και $ΑΓ$ στα σημεία $Δ$ και $Ε$ αντίστοιχα. Αν $Η$ είναι το μέσο του $ΔΕ$ να αποδείξετε ότι:

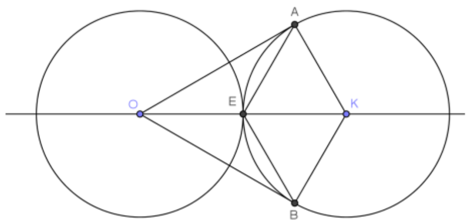
α) $\hat{Β} = Β\hat{Α}Μ$,

β) $Α\hat{Δ}Η = Δ\hat{Α}Η$,

γ) η ευθεία $ΑΗ$ τέμνει κάθετα τη $ΒΓ$.

68. ΘΕΜΑ_4_1796

Δύο ίσοι κύκλοι $(Ο,ρ)$ και $(Κ,ρ)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο $Ε$. Αν $ΟΑ$ και $ΟΒ$ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο $Ο$ στον κύκλο $(Κ,ρ)$, να αποδείξετε ότι:



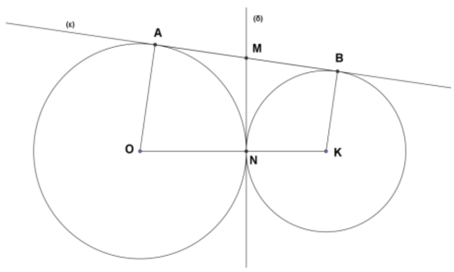
α) $ΑΕ = ΒΕ$,

β) $Α\hat{Ο}Κ = 30°$,

γ) το τετράπλευρο $ΑΚΒΕ$ είναι ρόμβος.

69. ΘΕΜΑ_4_1771

Δύο κύκλοι $(Ο,ρ_1)$, $(Ο,ρ_2)$ εφάπτονται εξωτερικά στο Ν. Μια ευθεία $(ε)$ εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο $Ν$ τέμνει την $(ε)$ στο $Μ$. Να αποδείξετε ότι:



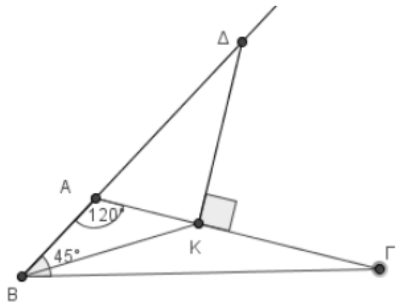
α) το $Μ$ είναι μέσον του $ΑΒ$,

β) $Ο\hat{Μ}Κ = 90°$,

γ) $Α\hat{Ν}Β = 90°$.

70. ΘΕΜΑ_4_1761

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία $\hat{A}$ ίση με $120°$ και γωνία $\hat{B}$ είναι ίση με $45°$. Στην προέκταση της ΒΑ προς το Α, παίρνουμε τμήμα $ΑΔ = 2ΑΒ$. Από το Δ φέρνουμε την κάθετη στην ΑΓ που την τέμνει στο σημείο Κ.



Να αποδείξετε ότι:

α) η γωνία $A\hat{Δ}K$ είναι ίση με $30°$,

β) το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές,

γ) αν Ζ το μέσο της ΔΑ, τότε $Z\hat{K}B = 90°$.

δ) το σημείο Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΔ.

71. ΘΕΜΑ_4_1759

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία $\hat{A}$ αμβλεία, ισχύει ότι $ΑΒ = 2ΑΔ$. Τα σημεία Ε και Ζ, είναι μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Από το Δ φέρουμε τη ΔΗ κάθετη στην προέκταση της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

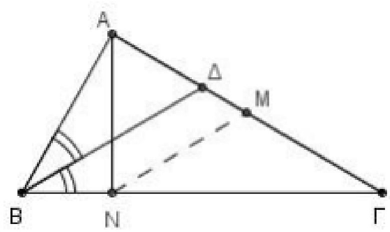
α) το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ρόμβος,

β) το τρίγωνο ΕΖΗ είναι ισοσκελές,

γ) το τμήμα ΗΕ, είναι διχοτόμος της γωνίας $Z\hat{H}Γ$.

72. ΘΕΜΑ_4_1738

Δίνεται τρίγωνο με $\hat{B} = 2\hat{Γ}$ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. Από το μέσο Μ της ΑΓ φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο ΒΔ που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ν. Να αποδείξετε ότι:



α) το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές,

β) το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ισοσκελές,

γ) $AN \perp BΓ$.