5.2 Παραλληλόγραμμα

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και Μ το μέσο της ΒΓ. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα $ΜΔ = ΜΑ$. Από το Α φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο,

β) $ΒΜ = \frac{ΑΕ}{2}$.

2. Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ν και Κ των ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $ΑΝ = ΚΓ$.

Να αποδείξετε ότι:

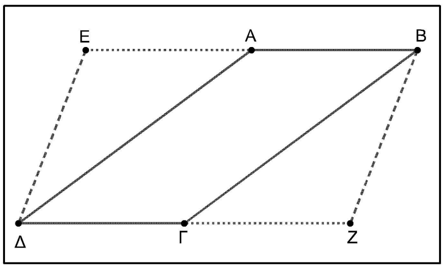
α) τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα ,

β) το τετράπλευρο ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο.

3. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ (προς το Α) και την πλευρά ΔΓ (προς το Γ) κατά τμήματα $ΑΕ = ΑΒ$ και $ΓΖ = ΔΓ$. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα,

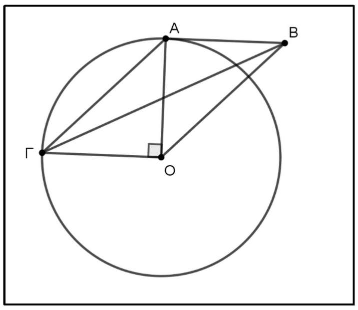
β) το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.



4. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε κάθετες ακτίνες ΟΑ , ΟΓ και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα ΑΒ τέτοιο ώστε $ΑΒ = ΟΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΟ και ΒΓ διχοτομούνται.

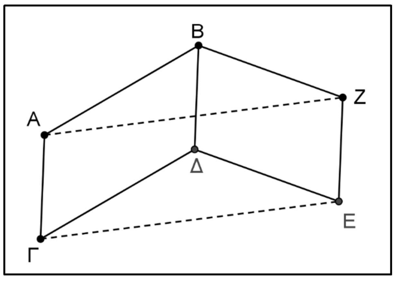
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΟΓ.



5. Δίνονται τα παραλληλόγραμμα ΑΒΔΓ και ΒΔΕΖ. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο,

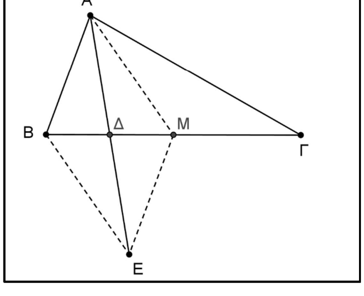
β) $Α\hat{Β}Ζ = Γ\hat{Δ}Ε$.



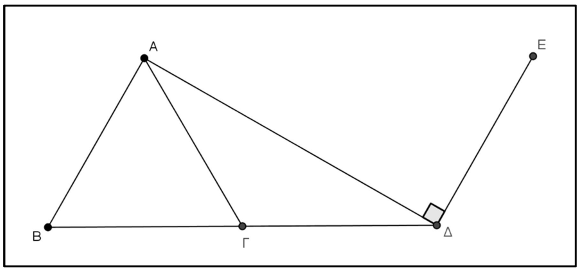
6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει $ΒΓ = 2ΑΒ$ και έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Αν η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΜ και Ε σημείο στην προέκτασή της ώστε $ΑΔ = ΔΕ$. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΒΕΜ είναι παραλληλόγραμμο ,

β) $ΜΕ = ΜΓ$.



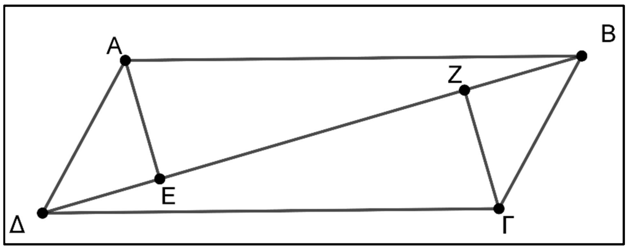
7. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ . Στην προέκταση της ΒΓ (προς το μέρος του Γ) θεωρούμε τμήμα $ΓΔ = ΒΓ$. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην ΑΔ στο σημείο της Δ , τέτοιο ώστε $ΔΕ = ΒΓ$ (τα Α και Ε είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ΒΔ).



α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΔ.

β) Να αποδείξετε ότι το ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.

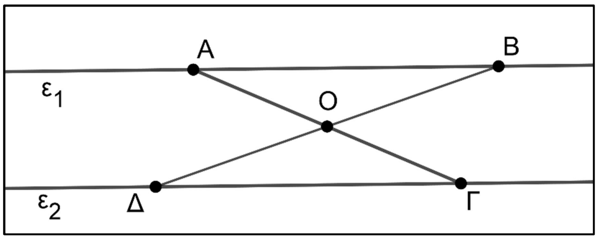
8. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ $(ΑΒ//ΓΔ)$ με $ΑΒ > ΒΓ$ φέρουμε από τις κορυφές Α και Γ καθέτους στη διαγώνιο ΒΔ, οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) $ΑΕ = ΓΖ$,

β) το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

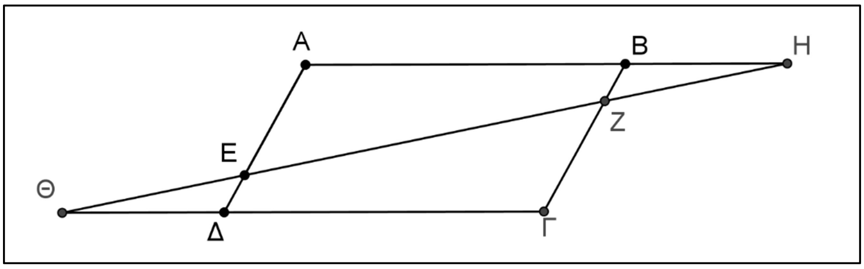
9. Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ και τα σημεία Α, Β στην $ε_1$ και Δ και Γ στην $ε_2$ ώστε τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ να τέμνονται στο μέσο Ο του ΒΔ. Να αποδείξετε ότι:



α) τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ίσα και να αναφέρετε τα ίσα κύρια στοιχεία τους αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

10. Στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ, τέτοια ώστε ΑΕ = ΓΖ . Αν η ευθεία ΖΕ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Η και Θ, να αποδείξετε ότι:



α) $Η\hat{Β}Ζ = Ε\hat{Δ}Θ$,

β) $Β\hat{Ζ}Η = Δ\hat{Ε}Θ$,

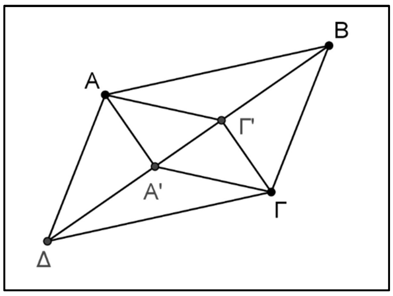
γ) $ΒΗ = ΘΔ$.

11. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ . Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{Δ}$ και $\hat{Β}$ τέμνουν τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΓΖ είναι ίσα,

β) το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

12. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τμήματα $ΑΑ'$, $ΓΓ'$ κάθετα στη διαγώνιο ΒΔ από τις κορυφές Α, Γ αντίστοιχα. Αν τα σημεία $Α'$ και $Γ'$ δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:



α) $ΑΑ' // ΓΓ'$,

β) $ΑΑ' = ΓΓ'$,

γ) το τετράπλευρο $ΑΓ'ΓΑ'$ είναι παραλληλόγραμμο.

13. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο Ε ώστε $ΜΔ = ΜΕ$. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο,

β) η ΒΕ διέρχεται από το μέσο της διαμέσου ΑΜ.

14. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΑΒ = 2ΒΓ$ και Ε το μέσο της πλευράς του ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές,

β) η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Δ}$.

15. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο Ε του τμήματος ΑΟ και σημείο Ζ του τμήματος ΟΓ, ώστε $ΟΕ = ΟΖ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΔΕ = ΒΖ$,

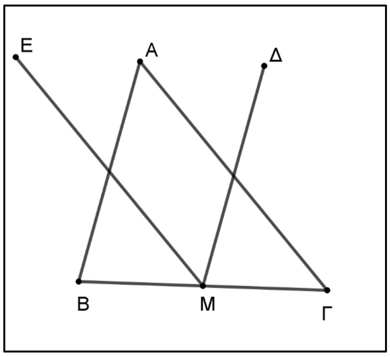
β) το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

16. Δίνεται ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με $ΑΒ = 2ΑΔ$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{Δ}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

β) Είναι το σημείο Ε μέσο της πλευράς ΑΒ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

17. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΓΑ. Να αποδείξετε ότι:



α) $ΔΑ = ΑΕ$,

β) τα σημεία Δ, Α και Ε βρίσκονται στην ίδια ευθεία,

γ) $ΔΕ = ΒΓ$.

18. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και η διαγώνιός του ΒΔ. Από τις κορυφές Α και Γ φέρουμε τις κάθετες ΑΕ και ΓΖ στη ΒΔ, που την τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ είναι ίσα,

β) το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

19. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του ΒΜ και ΓΝ. Προεκτείνουμε την ΒΜ (προς το Μ) κατά τμήμα $ΜΔ = ΒΜ$ και την ΓΝ (προς το Ν) κατά τμήμα $ΝΕ = ΓΝ$.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΔ//ΒΓ και ΑΕ//ΒΓ.

β) Είναι τα σημεία Ε, Α και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

20. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΑΒ = 2ΒΓ$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ (προς το μέρος του Δ) κατά τμήμα $ΔΕ = ΑΔ$ και φέρουμε την ΒΕ που τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Η. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΒΑΕ είναι ισοσκελές,

β) το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο,

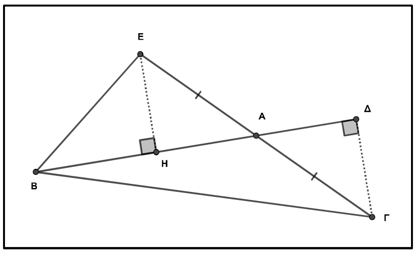
γ) η ΑΗ είναι διάμεσος του ΒΑΕ τριγώνου.

21. Σε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το μέρος του Β κατά τμήμα $ΒΖ = ΒΓ$ και προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $ΓΗ = ΒΓ$, επίσης προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα $ΜΕ = ΑΜ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΜΖ και ΕΜΗ είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΗΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.

22. Στο παρακάτω σχήμα το ΓΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, το ΕΗ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΕ και η ΒΑ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΕΓ.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΕΗ είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι $ΑΗ = ΑΔ$.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΓΔΕΗ είναι παραλληλόγραμμο.

23. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ των τμημάτων ΑΟ και ΓΟ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $ΑΕ = ΓΖ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΓΖΒ είναι ίσα.

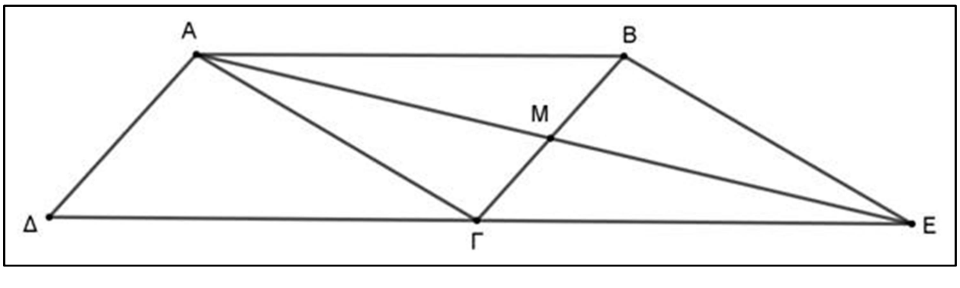
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

24. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο προς την ΒΑ και ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο προς την ΓΑ (τα σημεία Δ και Ε βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη ΒΓ και το σημείο Α). Να αποδείξετε ότι:

α) τα τετράπλευρα ΑΔΜΒ και ΑΓΜΕ είναι παραλληλόγραμμα,

β) $ΔΑ = ΑΕ$.

25. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε $ΑΔ < ΑΒ$ και Μ το μέσο της ΒΓ. Προεκτείνουμε την ΑΜ προς το Μ κατά τμήμα $ΜΕ = ΑΜ$.



Να αποδείξετε ότι :

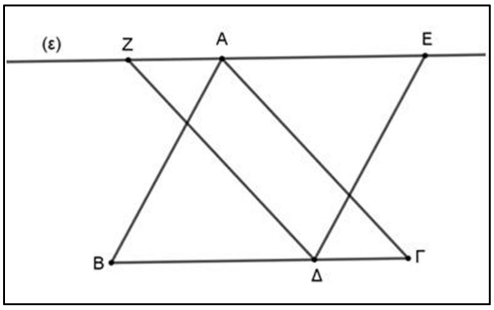
α) το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.

β) τα σημεία Δ, Γ και Ε είναι συνευθειακά.

26. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τη ΒΓ. Από το τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τις παράλληλες προς την ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) τα τετράπλευρα ΖΑΓΔ και ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμα.

β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.



27. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του ΑΜ. Στην προέκταση της ΑΓ προς το Γ παίρνουμε τμήμα ΓΔ = ΑΓ. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΜ που τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΜΓ = ΓΕ$,

β) το τετράπλευρο ΑΜΔΕ είναι παραλληλόγραμμο ,

γ) $\hat{Β} + Β\hat{Α}Μ = Γ\hat{Ε}Δ$.

28. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών Α, Β, Γ, Δ και Ε και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό Ε ισαπέχει από τα χωριά Β, Γ και επίσης από τα χωριά Α και Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ ,

ii. αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν,

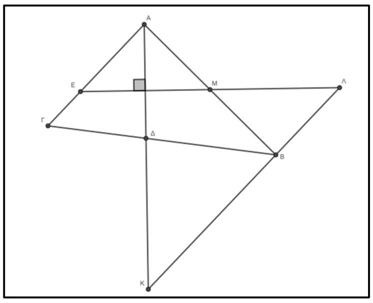
iii. τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο ΑΔ.

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ.

29. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$ και Μ το μέσον της ΑΒ. Η κάθετη από το Μ στην ΑΔ τέμνει το ΑΓ στο Ε. Η παράλληλη από το Β στο ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Κ και την προέκταση της ΕΜ στο Λ. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΕΜ, ΜΒΛ και ΑΒΚ είναι ισοσκελή,

β) το τετράπλευρο ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο.



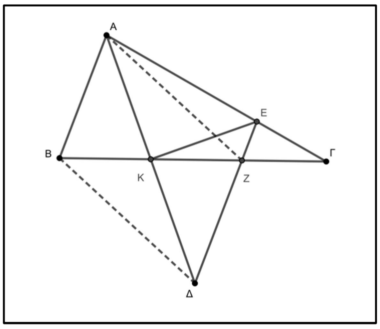
30. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με ΑΚ διχοτόμο της γωνίας Α. Στην προέκταση της ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε ΑΚ = ΚΔ. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει τις ΑΓ και ΒΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές,

β) η ΕΚ είναι μεσοκάθετος της ΑΔ ,

γ) τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΚΔΖ είναι ίσα,

δ) το τετράπλευρο ΑΖΔΒ είναι παραλληλόγραμμο.

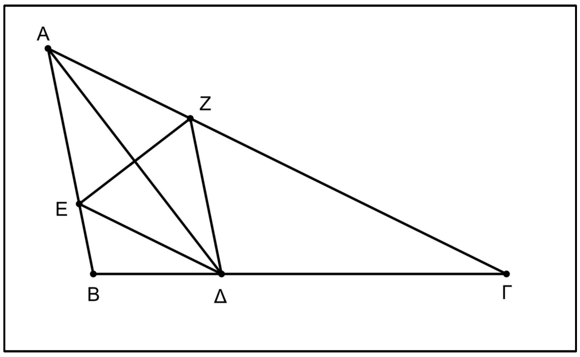


31. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α, για την οποία ισχύει ΑΔ = ΔΓ. Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ΑΔΒ}$ και η ΔΖ παράλληλη στην ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα ΕΔ και ΑΓ είναι παράλληλα,

β) το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές,

γ) τα τμήματα ΑΔ και ΕΖ διχοτομούνται.

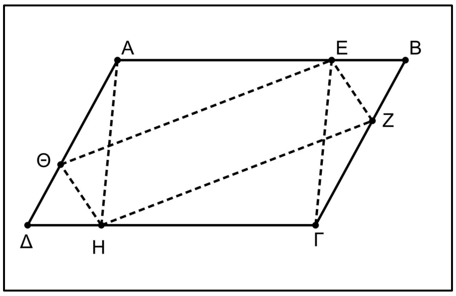


32. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ, Η, Θ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα, με ΑΕ = ΓΗ και ΒΖ = ΔΘ. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο,

β) το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο,

γ) τα τμήματα ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΖΘ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

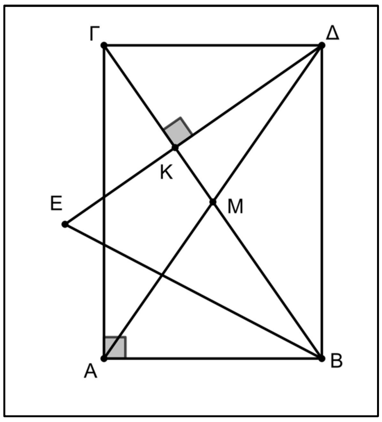


33. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{Α} = 90^o$). Φέρουμε τη διάμεσο του ΑΜ την οποία προεκτείνουμε (προς το μέρος του Μ) κατά τμήμα ΜΔ = ΑΜ. Θεωρούμε ευθεία ΔΚ κάθετη στη ΒΓ, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{Β}$ στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι ορθογώνιο,

β) $Κ\hat{Ε}Β = 90^o - \dfrac{\hat{Β}}{2}$,

γ) ΔΕ = ΒΔ .

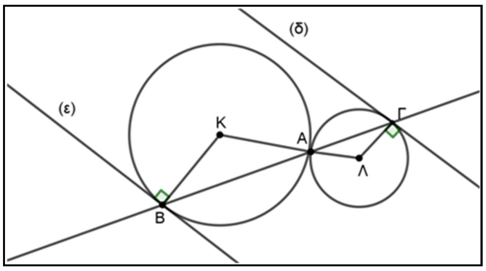


34. Οι κύκλοι (Κ,R), (Λ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Φέρουμε τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το Α και δεν περνάει από τα κέντρα των κύκλων, τέμνει τους κύκλους αντίστοιχα στα σημεία Β και Γ. Φέρουμε τις εφαπτόμενες (ε) και (δ) στα σημεία Β και Γ. Να αποδείξετε ότι:

α) $Κ\widehat{Β}Α = Λ\widehat{Γ}Α$,

β) (ε) // (δ) ,

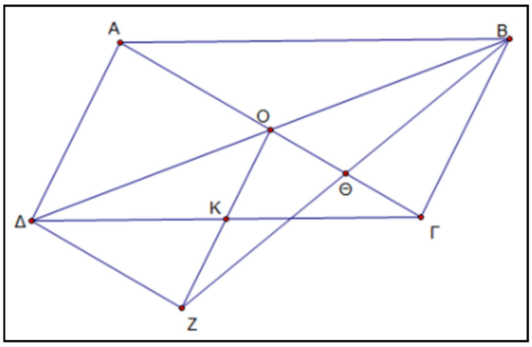
γ) Να εξετάσετε σε ποια περίπτωση το τετράπλευρο ΚΓΛΒ θα είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.



35. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του και Κ το μέσο του ΓΔ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΟΚ κατά τμήμα ΚΖ = ΚΟ . Η ΒΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Θ . Να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα ΟΓ και ΒΖ διχοτομούνται,

β) ΑΟ = ΔΖ ,



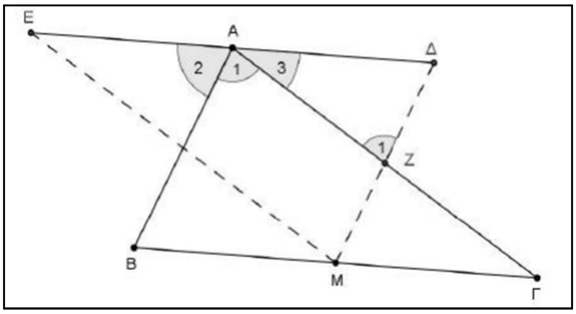
γ) τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΖΓ είναι είναι ίσα.

36. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ του ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο με το ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο με το ΓΑ (τα σημεία Δ και Ε είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από το ΒΓ και το σημείο Α). Να αποδείξετε ότι:

α) τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά,

β) η περίμετρος του τριγώνου ΜΔΕ είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ .

γ) Όταν ένας καθηγητής έθεσε στους μαθητές του το ερώτημα αν τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής:



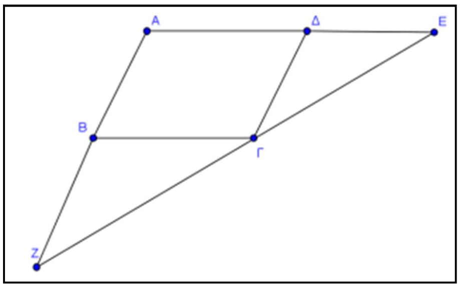
«$\hat{Z}_1 = \hat{A}_1$ (εντός εναλλάξ των ΑΒ//ΜΔ που τέμνονται από ΑΖ) , $A\hat{\Delta}Z = \hat{A}_2$ (εντός εκτός κι επί τα αυτά μέρη των ΑΒ//ΜΔ που τέμνονται από ΔΕ) . Όμως $\hat{Z}_1 + \hat{A}_3 + A\hat{\Delta}Z = 180^o$ (άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΖ).

Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^o$.

Οπότε τα σημεία Δ, Ε και Α είναι συνευθειακά.»

Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή;

37. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και στην προέκταση της ΑΔ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΔΕ = ΔΓ ενώ στην προέκταση της ΑΒ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΒΖ = ΒΓ .



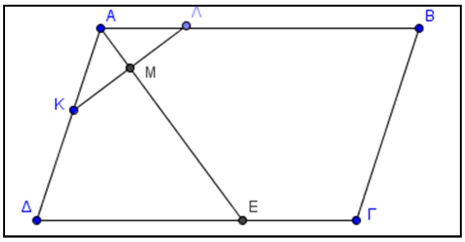
α) Να αποδείξετε ότι: i. $B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{\Gamma}E$, ii. τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά.

β) Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό:

«Έχουμε: $B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{E}\Gamma$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΖΕ) και $B\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}E$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ). Όμως $\Delta\hat{\Gamma}E + \Gamma\hat{\Delta}E + \Delta\hat{E}\Gamma = 180^o$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΔΕΓ). Άρα, σύμφωνα με τα προηγούμενα ισχύει ότι: $\Delta\hat{\Gamma}E + B\hat{\Gamma}\Delta + B\hat{\Gamma}Z = 180^o$. Οπότε τα σημεία Ζ, Γ και Ε είναι συνευθειακά.»

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό.

38. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ , με ΑΒ > ΑΔ . Θεωρούμε σημεία Κ , Λ των ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα ώστε ΑΚ = ΑΛ . Έστω Μ το μέσο του ΚΛ και η προέκταση του ΑΜ (προς το Μ) τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Ε . Να αποδείξετε ότι:

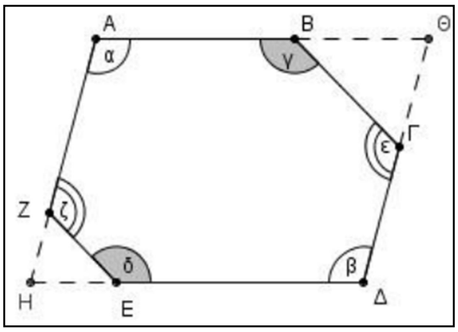


α) ΑΔ = ΔΕ ,

β) ΒΓ + ΓΕ = ΑΒ ,

γ) $\hat{B} = 2A\hat{\Lambda}K$.

39. Στο κυρτό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ ισχύουν τα εξής: $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, $\hat{\varepsilon} = \hat{\zeta}$.



α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\varepsilon}$.

β) Αν οι πλευρές ΑΖ και ΔΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Η και οι πλευρές ΑΒ και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Θ , να αποδείξετε ότι:

i. οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{H}$ είναι παραπληρωματικές ,

ii. το τετράπλευρο ΑΘΔΗ είναι παραλληλόγραμμο.

40. Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύει ότι ΑΒ > ΑΔ και η γωνία $\hat{A}$ είναι αμβλεία, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα.

Ισχυρισμός 3: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ισοσκελή.

α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.

β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

41. Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύει ΑΒ > ΑΔ , να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή όχι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: $A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma$.

Ισχυρισμός 3: Οι ΔΕ και ΒΖ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{\Delta}$ και $\hat{B}$.

α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.

β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

42. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ , στο οποίο η εξωτερική του γωνία $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$ είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας $\hat{A}$. Από την κορυφή Α διέρχεται ημιευθεία Αx // ΒΓ στο ημιεπίπεδο (ΑΒ, Γ) . Στην ημιευθεία Αx θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΒΓ . Να αποδείξετε ότι:

α) η ΒΔ διέρχεται από το μέσο του τμήματος ΑΓ ,

β) η ΓΔ είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$,

γ) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές .