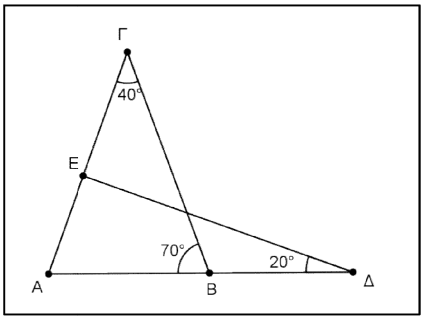
4.6 Άθροισμα γωνιών τριγώνου

1. Στο σχήμα, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές,

β) η γωνία ΑΕΔ είναι ορθή.



2. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ})$.

α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ.

β) Αν $\hat{\text{Α}} = 75^\text{o} + \hat{\text{Β}}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{\text{Α}} = 90^\text{o}\right)$ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{Α}}$. Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ορθογώνιο.

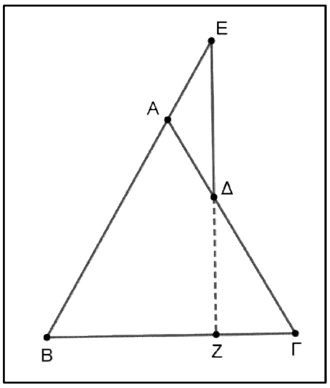
β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Ε}$.

γ) Αν η γωνία $\hat{\text{Β}}$ είναι 20^o μεγαλύτερη της γωνίας $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τη γωνία $\text{Ε}\hat{\Delta}\Gamma$.

4. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε σημείο Ε στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς ΑΓ, ώστε ΑΕ = ΑΔ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.

β) Αν Ζ είναι το σημείο τομής της προέκτασης της ΕΔ (προς το Δ) με την ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΕΖ είναι κάθετη στην ΒΓ.

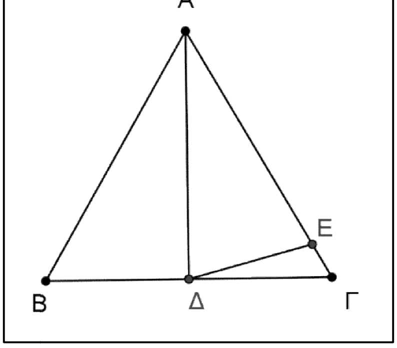


5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$ και η διάμεσός του ΑΔ τέτοια ώστε $\text{Β}\hat{\text{Α}}\Delta = 30^\text{o}$. Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΓ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΑΕ.

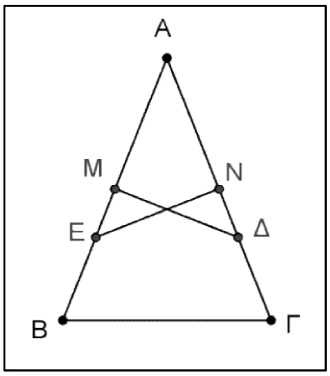
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\text{Ε}\hat{\Delta}\Gamma$.



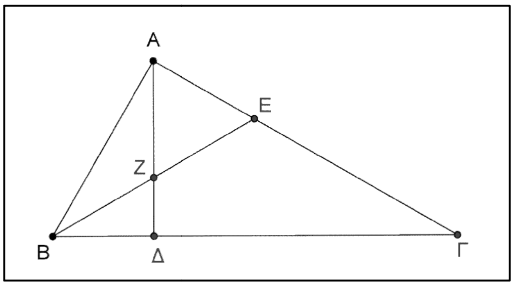
6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΜΔ, ΝΕ οι μεσοκάθετοι των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) Αν είναι ΜΔ = ΝΕ, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Αν είναι ΑΒ = ΑΓ, τότε ΜΔ = ΝΕ.

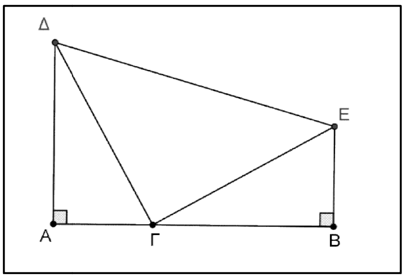
7. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.



α) Να αποδείξετε ότι η γωνία Β είναι 60^o.

β) Αν το ύψος του ΑΔ και η διχοτόμος του ΒΕ τέμνονται στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο.

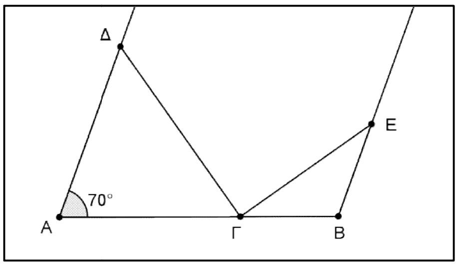
8. Στο σχήμα οι γωνίες $\hat{A}, \hat{B}$ είναι ορθές και επιπλέον ΑΔ = ΒΓ και ΑΓ = ΒΕ. Να αποδείξετε ότι:



α) τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα.

β) Αν η γωνία $E\hat{\Gamma}B = 40^o$, τότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

9. Στο σχήμα, οι ΑΔ και ΒΕ είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = A\Gamma$, $BE = B\Gamma$ και $\hat{A} = 70^o$.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΑΔΓ και ΒΓΕ.

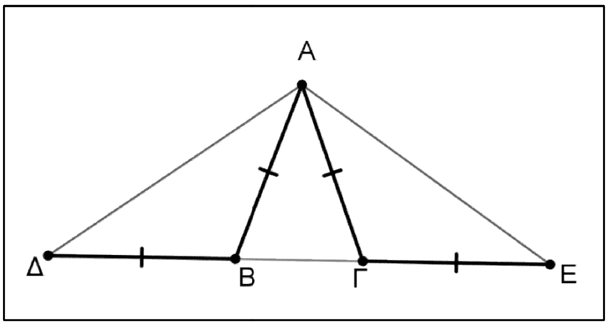
β) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{\Gamma}E = 90^o$.

10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 80^o$ και $\hat{B} = 20^o + \hat{\Gamma}$, και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

β) Φέρουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην ΑΒ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{\Delta}E$ και $E\hat{\Delta}\Gamma$.

11. Στο σχήμα ισχύουν $ΔΒ = ΒΑ = ΑΓ = ΓΕ$ και $Β\hat{Α}Γ = 40^o$.



Να αποδείξετε ότι:

α) $Α\hat{Δ}Β = Α\hat{Γ}Ε = 110^o$,

β) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα,

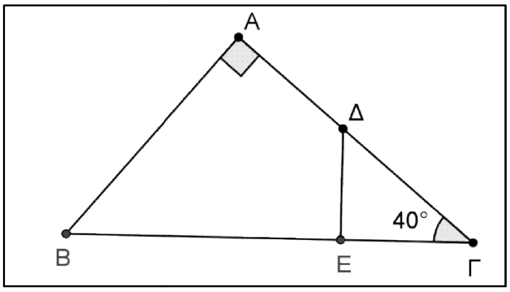
γ) το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές.

12. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ με γωνία κορυφής $\hat{Α} = 40^o$. Στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) παίρνουμε τμήμα ΒΔ τέτοιο ώστε ΒΔ = ΑΒ. Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ,

β) τη γωνία $Δ\hat{Α}Γ$.

13. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{Α} = 90^o\right)$ με $\hat{Γ} = 40^o$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΓ και $ΔΕ \perp ΒΓ$.

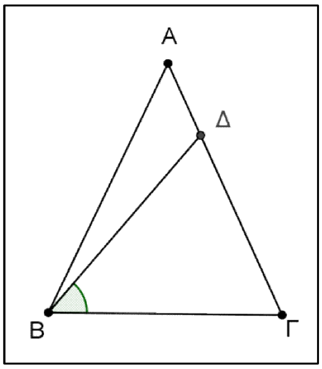


Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ,

β) τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΔΕΒ.

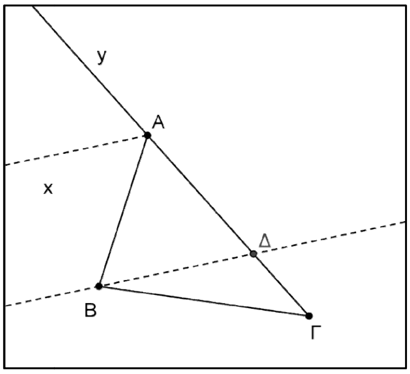
14. Δίνεται τρίγωνο ισοσκελές ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ με γωνία $\hat{Α} = 50^o$. Έστω Δ είναι σημείο της πλευράς ΑΓ, τέτοιο ώστε ΒΔ = ΒΓ .



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ του τριγώνου ΑΒΓ,

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $Δ\hat{Β}Γ$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{Α}$.

15. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Έστω Αx η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας $\hat{Α}_{εξ}$, όπου $\hat{Α}_{εξ} = 120^o$. Από την κορυφή Β φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Αx, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ.



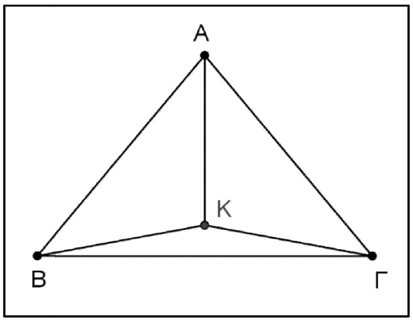
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $Δ\hat{Β}Α = 60^o$,

ii. το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο,

β) Αν η γωνία $B\hat{\Delta}A$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΓ.

16. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 80^o$. Έστω Κ σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, τέτοιο ώστε $KB = KA = K\Gamma$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ είναι ίσα.

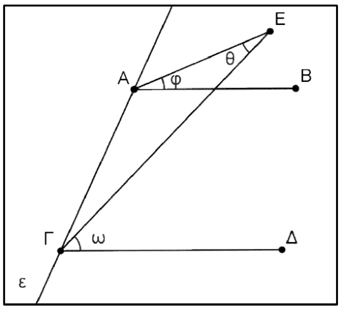
β) Να υπολογίσετε:

i. τις γωνίες $A\hat{B}K$ και $A\hat{\Gamma}K$,

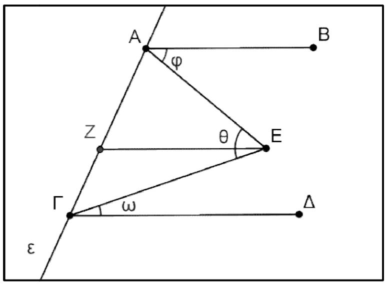
ii. τη γωνία $B\hat{K}\Gamma$.

17. Δίνεται ευθεία ε του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα ΑΒ και ΓΔ καθώς και ένα τυχαίο σημείο Ε βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ε.

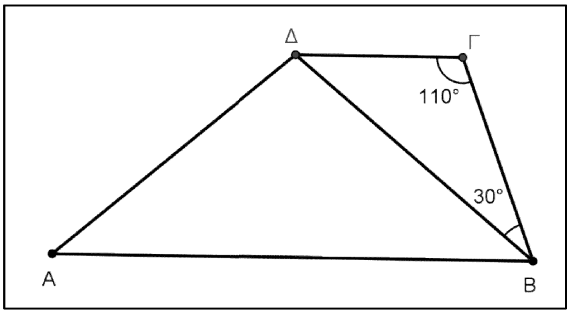
α) Αν το Ε είναι εκτός των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ, τότε να αποδείξετε ότι $\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$.



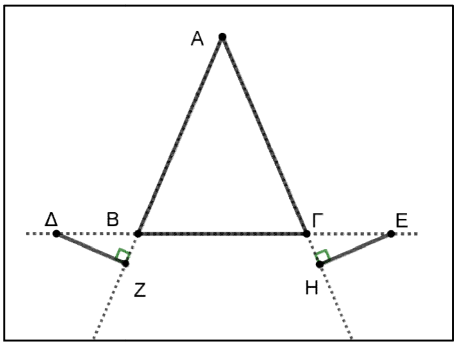
β) Αν το Ε είναι ανάμεσα στα τμήματα ΑΒ και ΓΔ και ΕΖ // ΑΒ, τότε να αποδείξετε ότι $\hat{\theta} = \hat{\omega} + \hat{\varphi}$.



18. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $AB // \Delta\Gamma$, στο οποίο η διαγώνιος ΒΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΔ. Αν είναι η γωνία $\hat{\Gamma} = 110^o$ και η γωνία $\Delta\hat{B}\Gamma = 30^o$, να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{\Delta}B$.



19. Θωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και σημεία Δ και Ε στην ευθεία ΒΓ τέτοια, ώστε ΒΔ = ΓΕ . Έστω ότι $ΔΖ \perp ΑΒ$ και $ΕΗ \perp ΑΓ$.



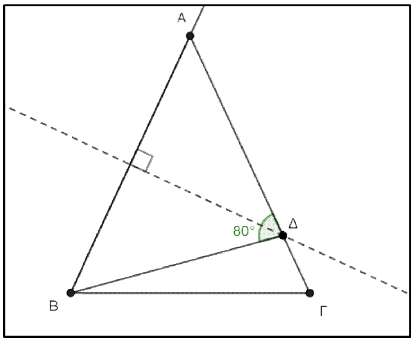
α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΒΖ = ΓΗ ,

ii. το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.

β) Αν $\hat{Α} = 50^o$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΖΗ.

20. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η εξωτερική γωνία Α είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας $Α\hat{Β}Γ$.



α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ .

β) Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΓ σε εσωτερικό της σημείο Δ. Αν η γωνία $Α\hat{Δ}Β$ είναι ίση με 80^o, τότε να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

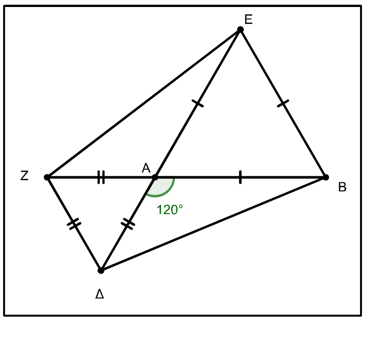
21. Ένας μαθητής της Α΄ Λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία $x\hat{O}y$. Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή Ο της γωνίας σχεδιάζει δυο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές Οx και Οy της γωνίας στα σημεία Α και Β αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

22. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{Α} = 90^o\right)$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Β}$ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΑ = ΒΕ,

β) Αν επιπλέον $Β\hat{Δ}Α = 55^o$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΓΔΕ .

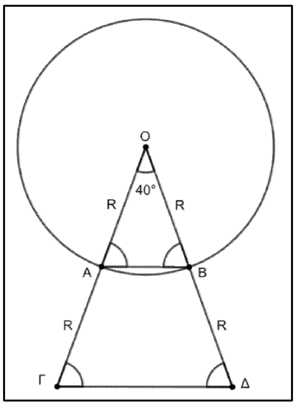
23. Έστω τρίγωνο ΑΒΔ με $\hat{Α} = 120^o$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ είναι ίσα.

β) Το τμήμα ΔΖ είναι παράλληλο στο ΒΕ.

24. Σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R θεωρούμε επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B = 40^o$. Προεκτείνουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ κατά τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε $ΑΓ = ΟΑ$ και $ΒΔ = ΟΒ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

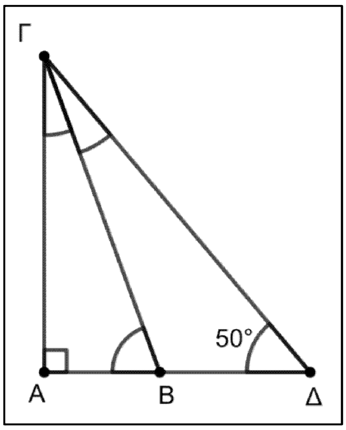


α) Να αποδείξετε ότι $O\hat{A}B = O\hat{B}A = 70^o$.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $O\hat{Γ}Δ$ και $O\hat{Δ}Γ$.

γ) Να αποδείξετε ότι ΑΒ // ΓΔ .

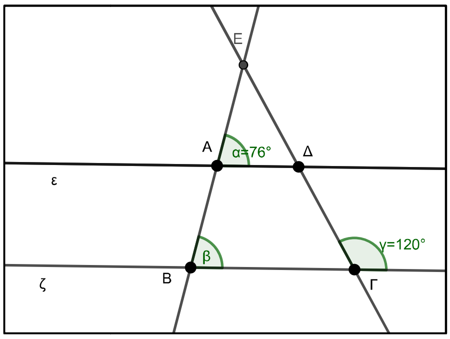
25. Στο ακόλουθο σχήμα είναι $\hat{A} = 90^o$, $A\hat{B}Γ - A\hat{Γ}B = 50^o$ και $A\hat{Δ}Γ = 50^o$.



α) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες $A\hat{B}Γ$ και $A\hat{Γ}B$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να αποδείξετε ότι η ΓΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{Γ}Δ$.

26. Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες ε και ζ είναι παράλληλες. Αν είναι $\hat{α} = 76^o$ και $\hat{γ} = 120^o$, να υπολογίσετε :

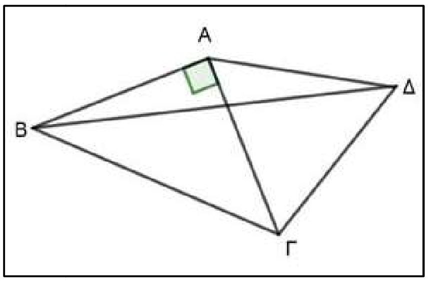


α) τη γωνία $\hat{β}$,

β) τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ ,

γ) τη γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου ΕΑΔ.

27. Δίνεται το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και $\hat{A} = 90^o$. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ.

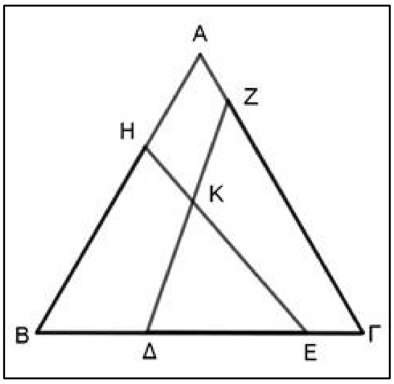


α) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΑΒΔ.

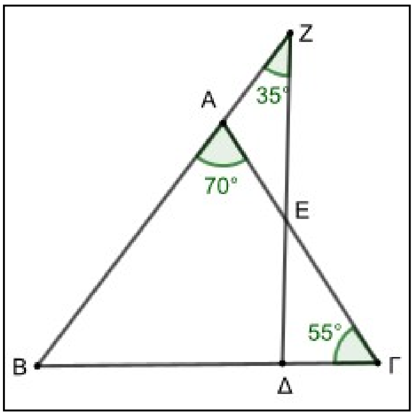
28. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές ΒΓ και ΓΑ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα ώστε ΒΕ = ΓΖ. Στις πλευρές ΑΒ και ΓΒ θεωρούμε σημεία Η και Δ αντίστοιχα ώστε ΒΗ = ΓΔ. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΖ και ΕΗ τέμνονται στο σημείο Κ το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:



α) $\text{ΕΗ} = \text{ΔΖ}$ και $\text{Β}\hat{\text{Η}}\text{Ε} = \text{Γ}\hat{\Delta}\text{Ζ}$.

β) τα τρίγωνα ΒΕΗ και ΚΕΔ έχουν ίσες γωνίες μία προς μία.

29. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\text{Α}} = 70^\text{o}$ και $\hat{\Gamma} = 55^\text{o}$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το σημείο Α και παίρνουμε στην προέκταση σημείο Ζ ώστε $\text{Β}\hat{\text{Ζ}}\Delta = 35^\text{o}$, όπου Δ εσωτερικό σημείο της ΒΓ. Η ΖΔ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

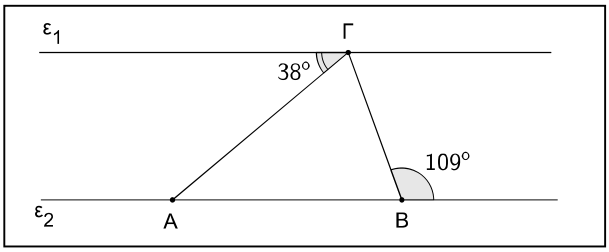


α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

β) $\text{Ζ}\hat{\Delta}\text{Β} = 90^\text{o}$.

γ) το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές.

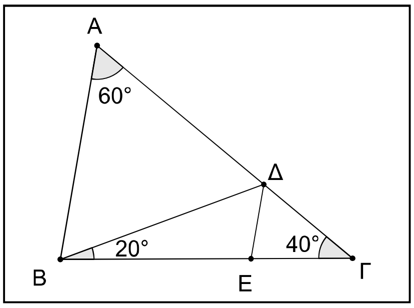
30. Στο σχήμα η ευθεία ε_1 διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου ΑΒΓ και είναι παράλληλη στην ευθεία ε_2 που ορίζεται από τις κορυφές του Α και Β. Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:



α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

β) να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.

31. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\text{Α}} = 60^\text{o}$ και $\hat{\Gamma} = 40^\text{o}$. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ, ώστε $\Gamma\hat{\text{Β}}\Delta = 20^\text{o}$.



α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.

β) Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

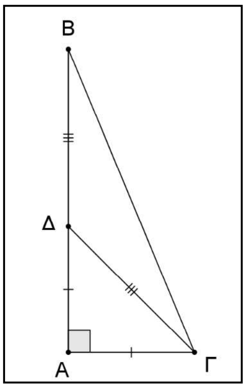
i. $\text{Β}\hat{\Delta}\text{Ε} = 60^\text{o}$.

ii. Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\text{Β}\hat{\Delta}\Gamma$.

32. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^o$. Στην πλευρά του ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ ώστε ΒΔ = ΔΓ και ΑΔ = ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι $A\hat{\Delta}\Gamma=45^o$.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$.

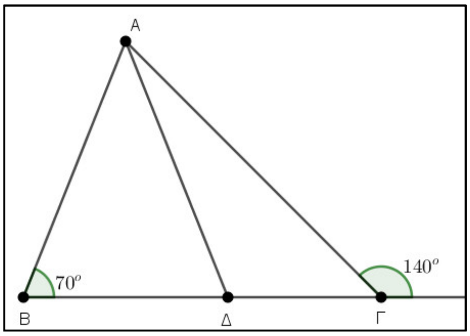


33. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=70^o$ και $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}=140^o$. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε εσωτερικό σημείο Δ, ώστε ΑΔ = ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) $B\hat{A}\Delta=40^o$.

β) $A\hat{\Delta}\Gamma=110^o$.

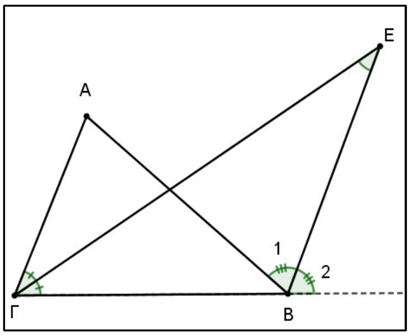
γ) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



34. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η προέκταση της διχοτόμου της $\hat{\Gamma}$ και της εξωτερικής γωνίας του $\hat{B}$, τέμνονται στο Ε. Δίνεται ότι $A\hat{B}E=70^o=2\Gamma\hat{E}B$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΒΕ είναι ισοσκελές

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ .

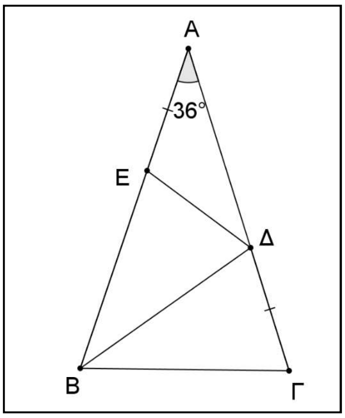


35. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A}=36^o$. Έστω ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ και Ε σημείο της πλευράς ΑΒ ώστε ΑΕ = ΓΔ .

α) Να αποδείξετε ότι ΑΔ = ΒΔ .

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

γ) Η παράλληλη από το Β προς την ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.

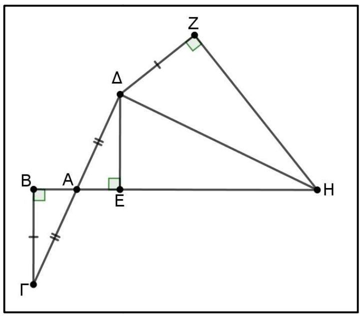


36. Στο σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ και ΔΖΗ είναι ορθογώνια με ορθές γωνίες $A\hat{B}\Gamma$, $A\hat{E}\Delta$ και $\Delta\hat{Z}H$, αντίστοιχα. Επίσης ΑΓ = ΑΔ και ΒΓ = ΔΖ. Να αποδείξετε ότι:

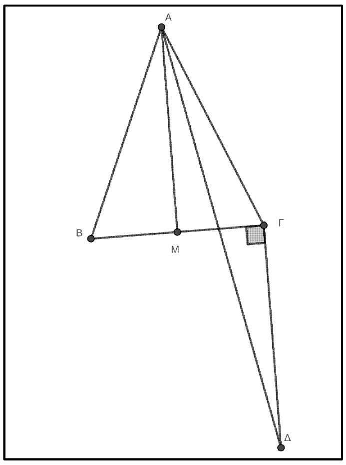
α) Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ και ΔΕ είναι ίσα.

β) Η ΔΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $\text{Ε}\hat{\text{Η}}\text{Ζ}$.

γ) Αν, επιπλέον, οι ΑΔ και ΔΗ είναι κάθετες, τότε $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Ε} = \frac{\text{Ε}\hat{\text{Η}}\text{Ζ}}{2}$.



37. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ})$ και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρουμε $\Gamma\Delta \perp \text{Β}\Gamma$ με $\Gamma\Delta = \text{ΑΒ}$ (Α,Δ εκατέρωθεν της ΒΓ). Να αποδείξετε ότι:



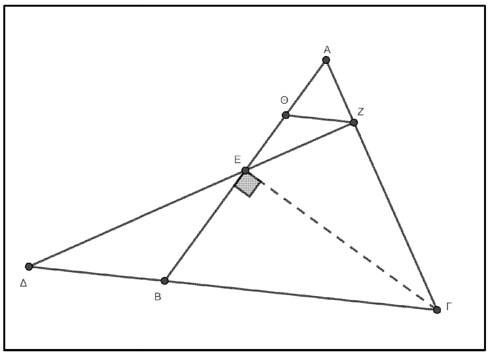
α) ΑΜ // ΓΔ.

β) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\text{Μ}\hat{\text{Α}}\Gamma$.

γ) $\Delta\hat{\text{Α}}\Gamma = 45^{\text{o}} - \frac{\hat{\text{Β}}}{2}$.

δ) ΑΔ < 2 ΑΒ.

38. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΓΕ. Στην προέκταση της ΓΒ (προς το μέρος του Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $\text{Β}\Delta = \frac{\Gamma\text{Ε}}{2}$. Έστω ότι, η ευθεία ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και ΖΘ // ΒΓ.



α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο ΑΘΖ είναι ισόπλευρο.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΘΕΖ.

γ) Να αποδείξετε ότι $\text{ΑΕ} = 2\Theta\text{Ζ}$.

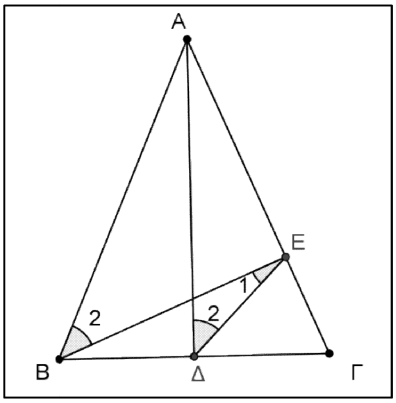
δ) Να αποδείξετε ότι $3\text{ΑΒ} = 4\Theta\text{Β}$.

39. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και ΑΔ, ΒΕ τα ύψη του. Να αποδείξετε ότι:

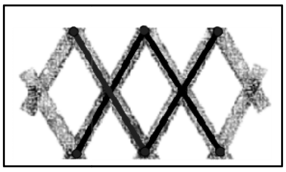
α) ΒΓ = 2ΕΔ ,

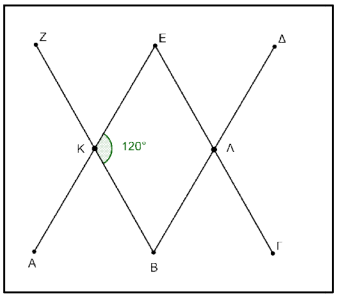
β) $\hat{\text{Ε}}_1 = \frac{\hat{\text{Α}}}{2}$,

γ) $\hat{\text{Β}}_2 = \hat{\Delta}_2$.



40. Στο σχήμα, τα τμήματα ΑΕ, ΒΖ, ΒΔ και ΓΕ αναπαριστάνουν τέσσερεις ίσους ράβδους μήκους 40 cm οι οποίες αποτελούν μέρη μιας κρεμάστρας τοίχου.





Οι ράβδοι συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε ανά δύο απέναντι να είναι παράλληλες, δηλαδή $ΑΕ//ΒΔ$ και $ΒΖ//ΓΕ$, και ανά δύο να έχουν κοινό μέσο, δηλαδή Κ κοινό μέσο των ΑΕ, ΒΖ και Λ κοινό μέσο των ΒΔ, ΓΕ. Έστω ότι η μία από τις γωνίες που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ράβδοι ΑΕ και ΒΖ με κορυφή το κοινό τους μέσο Κ, η γωνία $Β\hat{Κ}Ε$, είναι ίση με 120^{o}.

α) Να αποδείξετε ότι $Α\hat{Κ}Β = Κ\hat{Β}Λ = Β\hat{Λ}Γ = 60^{o}$.

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΒΛΓ είναι ίσα και ισόπλευρα. Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

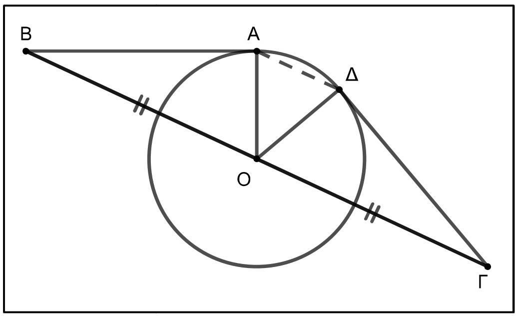
γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

41. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{Α} = 90^{o}\right)$ με $ΑΒ < ΑΓ$ και ΑΗ το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε τέτοια ώστε $ΔΒ = ΑΒ$ και $ΓΕ = ΓΑ$. Αν ΔΖ και ΕΘ είναι οι αποστάσεις των Δ και Ε από τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $Γ\hat{Α}Δ = Δ\hat{Α}Η$ και $Ε\hat{Α}Β = Η\hat{Α}Ε$.

β) $ΔΕ = ΔΖ + ΕΘ$.

42. Από σημείο Β εξωτερικό ενός κύκλου (O,R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΒΑ. Ενώνουμε το σημείο Β με το κέντρο Ο του κύκλου και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΟΓ = ΒΟ. Από το σημείο Γ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΔ, όπως στο σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΑΒ = ΔΓ,

ii. ΑΔ // ΒΓ.

β) Αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΒΑ είναι ίσο με την ακτίνα R, τι είδους τρίγωνο είναι το τρίγωνο ΑΟΔ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

43. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$, σημείο Δ της πλευράς ΑΓ, ώστε $ΑΔ = ΒΔ = ΒΓ$ και σημείο Ε της πλευράς ΑΒ, ώστε $ΑΕ = ΓΔ$.

α) Να αποδείξετε ότι:

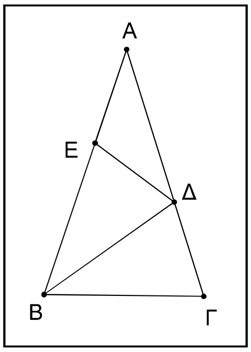
i. $\hat{\Gamma} = 2\hat{A}$,

ii. $\hat{A} = 36^{o}$,

iii. το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

β) Στην προέκταση της ΔΕ προς το Ε θεωρούμε σημείο Ζ, ώστε $\Delta Z = A\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.



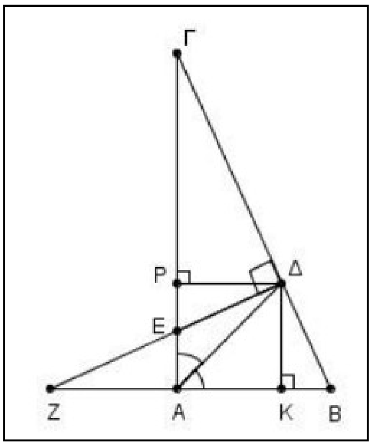
44. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^{o}\right)$ φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Έστω ΔΚ και ΔΡ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Η κάθετη της ΒΓ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε και την προέκταση της πλευράς ΑΒ (προς το Β) στο σημείο Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B} = \Delta\hat{E}\Gamma$,

ii. $\Delta E = \Delta B$.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{\Gamma}Z$.

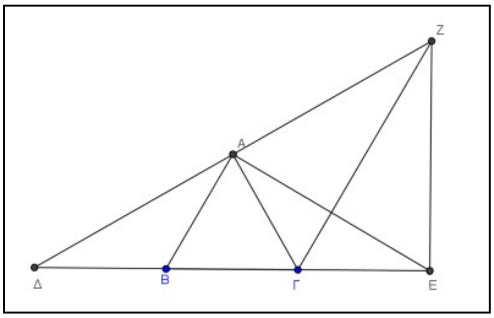


45. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = B\Gamma$, ενώ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $\Gamma E = B\Gamma$. Φέρουμε την κάθετη στην ΕΔ στο σημείο Ε, η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΑ στο Ζ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΓΑΕ και ΒΔΑ.

β) Να αποδείξετε ότι η ΓΖ είναι μεσοκάθετος του ΑΕ.

γ) Να αποδείξετε ότι ΑΒ // ΓΖ.

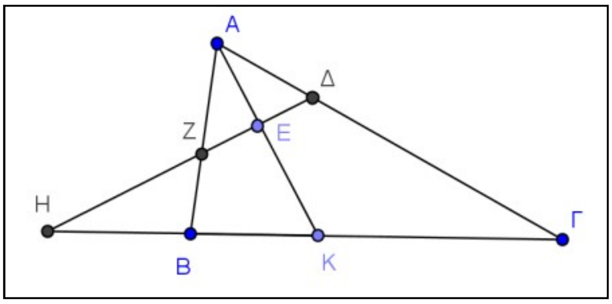


46. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΚ και σε τυχαίο σημείο της Ε φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο ΑΚ, η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ζ και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓΒ στο σημείο Η. Να αποδείξετε ότι:

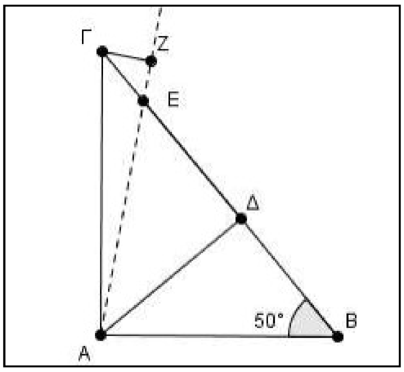
α) $Z\hat{\Delta}\Gamma = 90^{o} + \dfrac{\hat{A}}{2}$.

β) $ZK = K\Delta$.

γ) $Z\hat{H}K = \dfrac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.



47. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^o\right)$ με $\hat{B}=50^o$, το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην ΔΓ ώστε ΔΕ = ΒΔ. Το σημείο Ζ είναι η προβολή του Γ στην ΑΕ.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές ,

ii. ΓΑΕ = 10 .

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΓΕ .