

## 3.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

## 3.15 Εφαπτόμενα τμήματα

## 3.16 Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

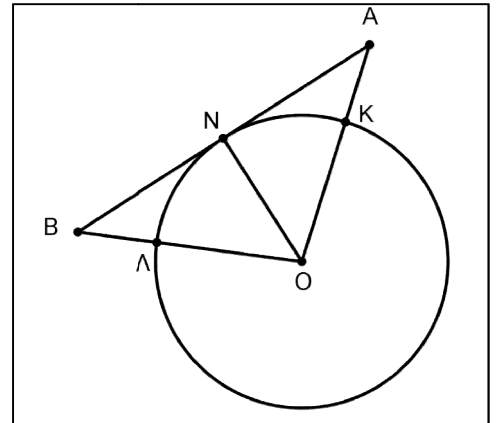
1. Δίνεται κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho = 6$ . Έστω  $d$  η απόσταση του κέντρου  $O$  του κύκλου από μια ευθεία ( $\varepsilon$ ). Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας ( $\varepsilon$ ) στις εξής περιπτώσεις:

**α)**  $d = 3$                       **β)**  $d = 6$                       **γ)**  $d = 9$

2. Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Σε σημείο  $N$  του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του  $N$  θεωρούμε σημεία  $A$  και  $B$ , τέτοια ώστε  $NA = NB$ . Οι  $OA$  και  $OB$  τέμνουν τον κύκλο στα  $K$  και  $\Lambda$  αντίστοιχα.

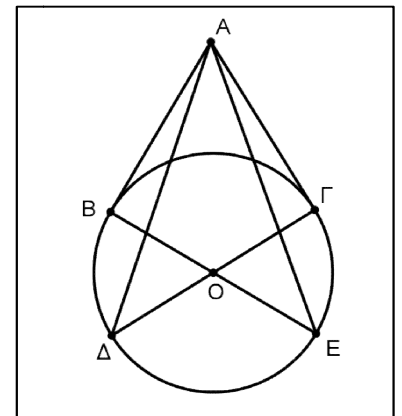
Να αποδείξετε ότι:

- α)** το τρίγωνο  $AOB$  είναι ισοσκελές,  
**β)** το σημείο  $N$  είναι μέσο του τόξου  $K\Lambda$ .



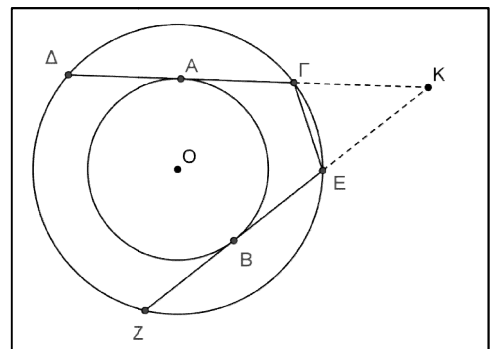
3. Έστω κύκλος  $(O, \rho)$  και ένα εξωτερικό του σημείο  $A$ . Από το  $A$  φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα  $AB$  και  $A\Gamma$  του κύκλου και έστω  $E$  και  $\Delta$  τα αντιδιαμετρικά σημεία των  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α)** τα τρίγωνα  $ABE$  και  $A\Gamma\Delta$  είναι ίσα,  
**β)** τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$  είναι ίσα.

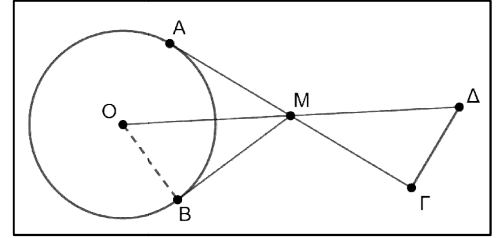


4. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο  $O$  και ακτίνες  $\rho$  και  $R$  ( $\rho < R$ ). Οι χορδές  $\Delta\Gamma$  και  $ZE$  του κύκλου  $(O, R)$  εφάπτονται του κύκλου  $(O, \rho)$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα.

- α)** Να αποδείξετε ότι  $\Delta\Gamma = ZE$ .  
**β)** Αν οι  $\Delta\Gamma$  και  $ZE$  προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο  $K$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $KE\Gamma$  είναι ισοσκελές.

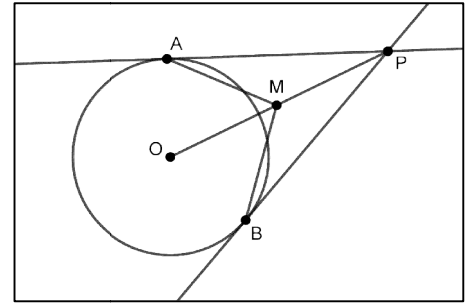


5. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύκλος  $(O,R)$  και τα εφαπτόμενα τμήματα  $MA$  και  $MB$ . Προεκτείνουμε την  $AM$  κατά τμήμα  $MΓ = MA$  και την  $OM$  κατά τμήμα  $MΔ = OM$ .



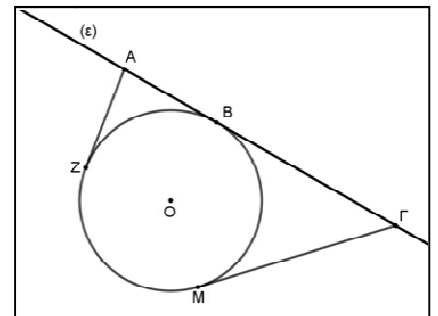
- α) Να αποδείξετε ότι  $MB = MΓ$ .
- β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $OMB$  και  $MΓΔ$  είναι ίσα.

6. Από εξωτερικό σημείο  $P$  ενός κύκλου  $(O,r)$  φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα  $PA$  και  $PB$ . Αν  $M$  είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος  $OP$ , να αποδείξετε ότι:



- α) τα τρίγωνα  $PAM$  και  $PMB$  είναι ίσα,
- β) οι γωνίες  $M\hat{A}O$  και  $M\hat{B}O$  είναι ίσες.

7. Δίνεται κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Σε σημείο  $B$  του κύκλου φέρνουμε εφαπτόμενη ευθεία  $(\varepsilon)$ . Θεωρούμε στην ευθεία  $(\varepsilon)$  δύο σημεία  $A$  και  $\Gamma$  εκατέρωθεν του  $B$  έτσι ώστε  $BA < B\Gamma$  και από τα σημεία αυτά, φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα  $AZ$  και  $\Gamma M$  στον κύκλο.



- α) Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- β) Να αποδείξετε ότι  $A\Gamma = AZ + M\Gamma$ .

8. Θεωρούμε κύκλο κέντρου  $O$  και εξωτερικό σημείο του  $P$ . Από το  $P$  φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα  $PA$  και  $PB$ . Η διακεντρική ευθεία  $PO$  τέμνει τον κύκλο στο σημείο  $\Lambda$ . Η εφαπτομένη του κύκλου στο  $\Lambda$  τέμνει τα  $PA$  και  $PB$  στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο  $P\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές,
- β)  $\Gamma A = \Delta B$ ,
- γ) η περίμετρος του τριγώνου  $P\Gamma\Delta$  είναι ίση με  $PA + PB$ .

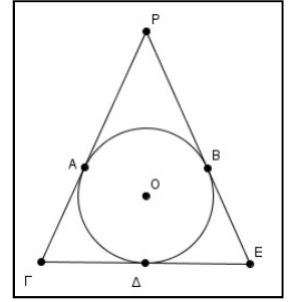
9. Έστω ότι ο κύκλος  $(O,r)$  εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου  $P\Gamma E$  στα σημεία  $A$ ,  $\Delta$  και  $B$ .

- α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $P\Gamma = \Gamma\Delta + AP$                       ii.  $P\Gamma - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$

β) Αν  $A\Gamma = BE$ , να αποδείξετε ότι:

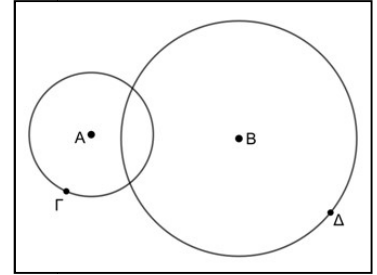
- i. το τρίγωνο  $P\Gamma E$  είναι ισοσκελές,  
 ii. τα σημεία  $P$ ,  $O$  και  $\Delta$  είναι συνευθειακά.



10. α) Στο σχήμα, για τους κύκλους  $(A, \rho)$  και  $(B, R)$  ισχύει  $\rho < R$ .

Να αποδείξετε ότι  $B\Delta - A\Gamma < AB < A\Gamma + B\Delta$ .

β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία  $A$  και  $B$ , τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το  $A$  του χάρτη και 5 από το  $B$  του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός;



11. Δίνονται δύο κύκλοι  $(K, 3)$  και  $(\Lambda, 8)$ . Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:

α)  $K\Lambda = 13$       β)  $K\Lambda = 2$       γ)  $K\Lambda = 5$       δ)  $K\Lambda = 11$       ε)  $K\Lambda = 9$

12. Δίνονται δύο κύκλοι  $(K, 2)$  και  $(\Lambda, 5)$ .

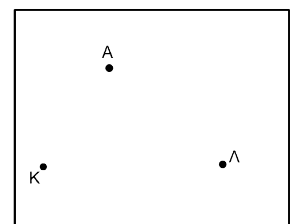
- α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου  $K\Lambda$ , αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.  
 β) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου  $K\Lambda$ , αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.  
 γ) Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου  $K\Lambda$ , αν ο κύκλος  $(K, 2)$  βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου  $(\Lambda, 5)$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.  
 δ) Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου  $K\Lambda$ , αν οι κύκλοι τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

13. Έστω δύο κύκλοι  $(K, R)$  και  $(\Lambda, r)$ , με  $R = 3$ ,  $r = 2$  και  $K\Lambda = 4$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Οι κύκλοι  $(K, R)$  και  $(\Lambda, r)$  τέμνονται σε δύο σημεία, έστω  $A$  και  $B$ .  
 β)  $K\hat{A}\Lambda > A\hat{\Lambda}K$ .

14. Τα σημεία  $A$ ,  $K$  και  $\Lambda$  δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το σημείο  $A$  απέχει 4 από το  $K$  και 5 από το  $\Lambda$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $1 < K\Lambda < 9$ .  
 β) Να βρείτε ένα σημείο  $B$  του επιπέδου διαφορετικό από το  $A$ , που να απέχει 4 από το  $K$  και 5 από το  $\Lambda$ .



15. Δίνονται δυο κύκλοι  $(K, \rho_1)$  και  $(\Lambda, \rho_2)$  που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο  $A$ . Μια ευθεία  $(\varepsilon)$  εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα. Αν η εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους  $A$  τέμνει την ευθεία  $(\varepsilon)$  σε σημείο  $M$ , να αποδείξετε ότι:

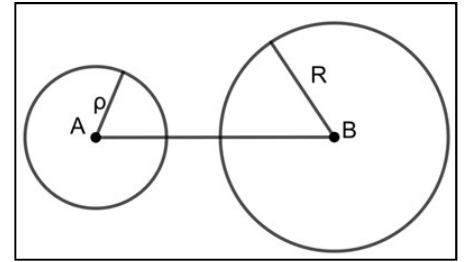
α) τα σημεία  $A, B$  και  $\Gamma$  ανήκουν σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

β) ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία  $A, B$  και  $\Gamma$  εφάπτεται στη διάκεντρο  $ΚΛ$  των κύκλων  $(K, \rho_1)$  και  $(\Lambda, \rho_2)$ .

16. Δίνεται το παρακάτω σχήμα με τους κύκλους  $(A, \rho)$  και  $(B, R)$  με  $R > \rho$ . Επίσης  $AB = 9$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $R + \rho < 9$ .

β) Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο  $ΚΛΜ$  με  $ΚΛ$  να είναι ίση με  $\rho$  και η πλευρά  $ΛΜ$  να είναι ίση με  $R$ . Να περιγράψετε τον τρόπο που το σχεδιάσατε και να αποδείξετε ότι η τρίτη πλευρά του είναι μικρότερη από  $9$ .



γ) Έστω το τρίγωνο  $ΚΛΜ$  που σχεδιάσατε στο β) ερώτημα. Πόσα σημεία του επιπέδου έχουν και τις δύο ιδιότητες  $I_1$  και  $I_2$  που περιγράφονται παρακάτω;

$I_1$ : «Η απόσταση των σημείων από το  $K$  είναι ίση με  $\rho$ ».

$I_2$ : «Η απόσταση των σημείων από το  $M$  είναι ίση με  $R$ ».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

17. α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους  $(A, \rho)$  και  $(B, R)$  ισχύει  $\rho < R$  και  $AB = 6$ .

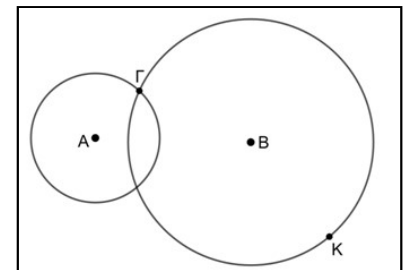
i. Να αποδείξετε ότι  $BK - A\Gamma < AB < BK + A\Gamma$ .

ii. Παρακάτω γράφονται οι ιδιότητες 1 και 2. Ποιο σημείο από τα  $K$  και  $\Gamma$  έχει την ιδιότητα 1, ποιο την ιδιότητα 2 και ποιο έχει και τις δύο;

Ιδιότητα 1: «Το σημείο απέχει  $R$  από το  $B$ .»

Ιδιότητα 2: «Το σημείο απέχει  $\rho$  από το  $A$ .»

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία  $A$  και  $B$ , τα οποία απέχουν μεταξύ τους  $6$ . Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει  $3$  από το  $A$  του χάρτη και  $2$  από το  $B$  του χάρτη. Μπορεί να είναι σωστή η πληροφορία που δίνει ο χάρτης για να βρει κανείς το θησαυρό;