

2.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους

1.
 - α) Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2$.
 - β) Αν $(\alpha + \beta)^2 = 4\alpha\beta$ να δείξετε ότι $\alpha = \beta$.

2. Για τους αριθμούς $2\alpha + 1$ και $\beta + 1$, ισχύει ότι $(2\alpha + 1)(\beta + 1) = 1$, να δείξετε ότι:
 - α) $2\alpha + \beta + 2\alpha\beta = 0$,
 - β) οι αριθμοί $x = \alpha(2 + \beta)$ και $y = \beta(\alpha + 1)$ είναι αντίθετοι.

3. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2$.
 - α) Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = 1$.
 - β) Αξιοποιώντας το συμπέρασμα του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι: $(\alpha\beta - 2)^6 + (\alpha\beta + 1)^2 = 5$.

4. Έστω α, β, γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $\alpha + \gamma = 10$ και $(\beta - \gamma)\alpha = \alpha^2 - \beta\gamma$.
 - α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha\gamma\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}\right)$.
 - β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$.
 - γ) Να αποδείξετε ότι $(2\alpha - \beta + \gamma)(2\beta - \alpha + \gamma) = 100$.

5. Έστω α, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha + \beta) = -2\alpha\beta$.
 - α) Να αποδείξετε ότι:
 - i. $(\alpha + \beta)^2 = 2(\alpha + \beta)$,
 - ii. $\alpha + \beta = 2$.
 - β) Να αποδείξετε ότι $(2\alpha + \beta - 2)(\alpha + 2\beta - 2) = \alpha\beta$.

6. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = 3x - 2y - 2$ και $\beta = y - 1 - 2x$ και η παράσταση $A = \frac{x^2 + 2x - xy - 2y}{3x + 6}$.
 - α) Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A .
 - β) Αν οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι τότε:
 - i. να δείξετε ότι $x - y = 3$,
 - ii. να δείξετε ότι η παράσταση $A = 1$.