

6.3 Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$

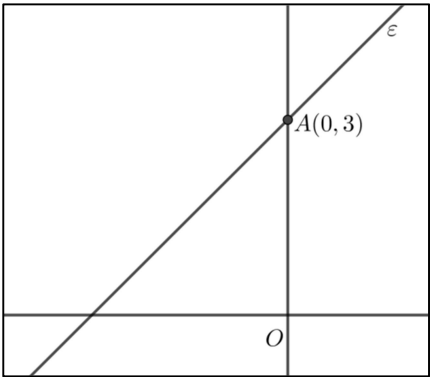
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f(0) = 5$ και $f(1) = 3$.

 - Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 5$.
 - Να βρείτε τα σημεία, στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
 - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

 - Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,6)$, $B(-1,4)$, να βρείτε τις τιμές των α, β .
 - Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- Η παρακάτω ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

 - Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ε).
 - Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας (ε).
 - Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας (ε) με τον άξονα $x'x$.

(Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi 45^\circ = 1$.)


- Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$.

 - Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .
 - Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \in A$.
 - Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- Θεωρούμε τα σημεία $A(2, 1)$, $B(-1, -5)$, $\Gamma(27, 50)$ και την ευθεία (ε): $y = \lambda x - 3$. Αν το σημείο A είναι πάνω στην ευθεία, τότε:

 - Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.
 - Να αποδείξετε ότι το σημείο B είναι πάνω στην ευθεία. Κατόπιν να εξετάσετε αν και το σημείο Γ είναι πάνω στην ίδια ευθεία.
- Δίνεται η ευθεία (ε): $y = -x + 2$.

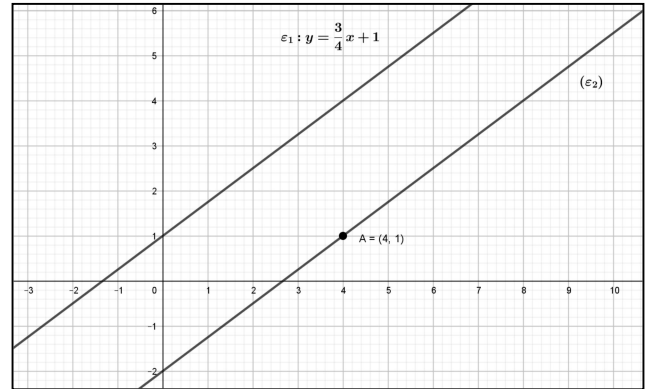
 - Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$.
 - Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε) με τους άξονες.
 - Να σχεδιάσετε την ευθεία (ε).
- Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -x + \sqrt{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

 - Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(\sqrt{2})$, $f(-\sqrt{2})$, $[f(-\sqrt{2})]^2$.
 - Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

8. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = (3\alpha + 4)x - 4$ και $(\varepsilon_2) : y = (3 - 4\alpha)x + 4$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- α)** Αν $\alpha = 1$, να βρείτε:
- τις εξισώσεις των ευθειών,
 - το είδος της γωνίας που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα $x'x$,
- β)** Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.
9. Δίνεται το σημείο $M(3,4)$.
- α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και από το $O(0,0)$.
- β)** Δίνεται το σημείο $N(-3,\lambda)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$, το οποίο ανήκει στην ευθεία OM .
- Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Αν $N(-3,-4)$ να εξετάσετε αν τα σημεία M, N είναι συμμετρικά ως προς το O .
10. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon) : y = -\frac{1}{2}x + 4$.
- α) i.** Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε) .
- ii.** Είναι οξεία ή αμβλεία η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον $x'x$ άξονα;
- β)** Να εξετάσετε ποια από τα σημεία $A(6,1)$, $B(-2,3)$ και $\Gamma(8,0)$ είναι σημεία της ευθείας (ε) .
- γ)** Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $(k,5)$ να είναι σημείο της ευθείας (ε) .
11. Έστω η ευθεία $(\varepsilon_1) : y = \alpha x + \beta$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0,-6)$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(-3,0)$.
- α)** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .
- β)** Να βρείτε την ευθεία (ε_2) που είναι παράλληλη με την (ε_1) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- γ)** Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων
12. Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, η οποία έχει κλίση -2 και διέρχεται από το σημείο $(1,1)$.
- α)** Να βρείτε τις τιμές των α και β .
- β)** Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα $y'y$.
- γ)** Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία.
13. Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$.
- α)** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β αν η γραφική παράσταση της f σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° και διέρχεται από το σημείο $A(0,3)$.
- β)** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ αν η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x + 3$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2 .
14. Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x - 2$ και μια ευθεία (ε_2) διέρχεται από το σημείο $A(-4,1)$ και είναι παράλληλη στην (ε_1) .
- α)** Να γράψετε την κλίση της ευθείας (ε_1) και το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα $y'y$.
- β)** Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον άξονα $x'x$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2). Ποια είναι τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες;

15. Στο σύστημα συντεταγμένων έχουμε χαράξει δυο ευθείες, την (ε_1) με εξίσωση $y = \frac{3}{4}x + 1$ και την (ε_2) που διέρχεται από το σημείο $A(4,1)$ και είναι παράλληλη στην (ε_1).



α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε_2).

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2).

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε_2) με τους άξονες.

16. Δίνεται ευθεία (ε): $y = ax + 5$. Αν η ευθεία (δ): $y = -3x - 6$ είναι παράλληλη στην ευθεία (ε), τότε:

α) i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε).

ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$.

β) Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

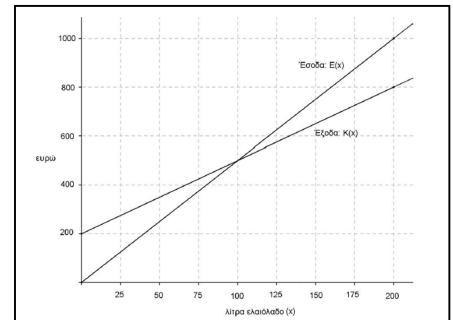
17. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = |x|$, για κάθε $x \in A$.

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , για $x > 0$.

18. Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο παραπάνω σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.



α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του.

β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας;

γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά;

δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ).

19. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & , x < 0 \\ x + 2 & , x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

β) i. Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y = 3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

- ii. Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ) i. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α , η ευθεία $y = \alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- ii. Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα γ) i., να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = \alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος β) ii., αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.
20. Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.
- β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.
- γ) Έστω $M(x, y)$ σημείο της C_f . Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει $|2x - 1| < 3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.
21. Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.
- α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες;
- β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.
- i. Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι:
- $$f(x) = 30 - \frac{3}{4}x.$$
- ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β) i., στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.
- γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.
22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.
- γ) Αν A και B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα A και B .
23. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x + 2$ και $g(x) = x^2 - 9$ με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .
- α) βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$.
- β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$.
- γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.

δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε ένα σημείο του ημιάξονα Ox .

24. Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία ταξί με το όνομα «RED» χρεώνει τον πελάτη 1 ευρώ με την είσοδο στο ταξί και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει. Μια άλλη εταιρεία ταξί με το όνομα «YELLOW» χρεώνει τον πελάτη 2 ευρώ με την είσοδο στο ταξί και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει. Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α) i. Αν $f(x)$ είναι το ποσό (σε ευρώ) που χρεώνει η εταιρεία «RED» για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

| | | | |
|---------------|---|---|---|
| x (km) | 0 | 2 | 8 |
| $f(x)$ (ευρώ) | | | |

ii. Αν $g(x)$ είναι το ποσό (σε ευρώ) που χρεώνει η εταιρεία «YELLOW» για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

| | | | |
|---------------|---|-----|-----|
| x (km) | | | |
| $g(x)$ (ευρώ) | 2 | 3,2 | 4,8 |

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο των συναρτήσεων f και g .

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f και g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας «RED» είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

δ) Αν δυο πελάτες A και B μετακινηθούν με την εταιρεία «RED» και ο πελάτης A διανύσει 3 χιλιόμετρα περισσότερα από τον B , να βρείτε πόσα περισσότερα χρήματα θα πληρώσει ο A σε σχέση με τον B .

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha}{2x - 3}$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x - \alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .

γ) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$.

δ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

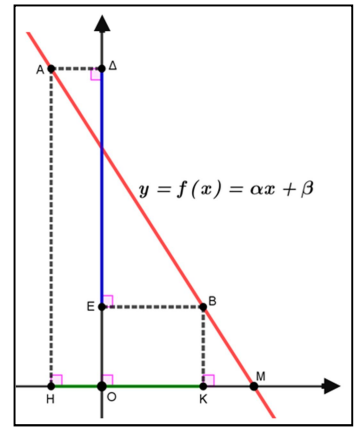
β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x - 3 & , x > 2 \\ -x + 3 & , x < 2 \end{cases}$.

γ) i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

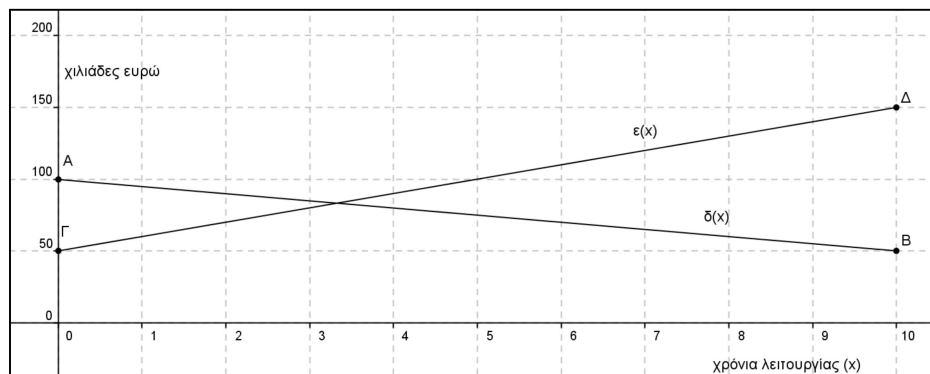
δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

27. Στο σχήμα έχει σχεδιασθεί σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x) = \alpha x + \beta$ όπου α, β σταθεροί μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τα σημεία A και B της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ των οποίων οι προβολές στους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι τα σημεία H, Δ και K, E αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι τα ευθύγραμμο τμήματα HK και ΔE έχουν μήκη 6 και 9 αντίστοιχα.



- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -\frac{3}{2}$.
- β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το σημείο M έχει τετμημένη 6, να αποδείξετε ότι $\beta = 9$.
- γ) Υποθέτουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα OK έχει μήκος 4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) η οποία διέρχεται από το σημείο E και είναι παράλληλη προς την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.
28. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων η ευθεία AB με $A(0,100)$ και $B(10,50)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.

Η ευθεία ΓΔ με $\Gamma(0,50)$ και $\Delta(10,150)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\epsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



- α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τις δαπάνες τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας.
- β) i. Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x)$, $\epsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές.
- ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών AB και ΓΔ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος.

29. Σε κάποιο τόπο, μια χειμερινή μέρα, ξεκινάμε να μετράμε τη θερμοκρασία από τις 6 το πρωί και μετά. Ο τύπος που δίνει τη θερμοκρασία, x ώρες μετά τις 6 το πρωί, είναι:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & , \quad x \in [0, 6] \\ 16 & , \quad x \in (6, 9] \\ 25 - x & , \quad x \in (9, 12] \end{cases}$$

και μετριέται σε βαθμούς Κελσίου.

- α) Να βρείτε τη θερμοκρασία στον τόπο αυτό, στις 6 το πρωί, στις 12 το μεσημέρι και στις 5 το απόγευμα.
 β) Να βρείτε σε ποιο χρονικό διάστημα της ημέρας η θερμοκρασία:
- Διατηρείται σταθερή.
 - Είναι μεγαλύτερη από 14 βαθμούς Κελσίου.
- γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
 β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.
 γ) Αν είναι $f(x) = x + 2$, $x \neq -1$, τότε:
- Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$.
 - Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

31. Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{1 - 2x + x^2}$.

- α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A .

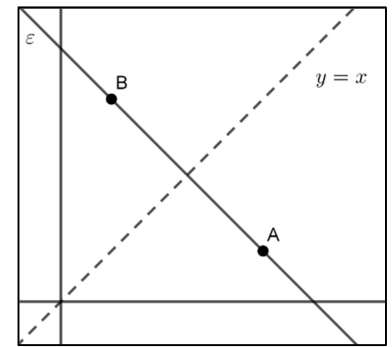
Δίνεται επιπλέον $1 \leq x \leq 3$.

- β) i. Να δείξετε ότι $A = 2$.
 ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 3| - |x - 1| = 2$.
- γ) i. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 3 - x$ και $g(x) = x - 1$ για $1 \leq x \leq 3$.
 ii. Για ποιες τιμές του x είναι $|f(x) - g(x)| = 2$.

32. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y = (\omega^2 - 6\omega + 8)x + 2$, όπου $\omega \in \mathbb{R}$.

- α) Για τις διάφορες τιμές του $\omega \in \mathbb{R}$ να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$.
 β) Αν ο αριθμός ω είναι ακέραιος και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία τότε:
- Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.
 - Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε) με τους άξονες.
 - Να σχεδιάσετε την ευθεία (ε) .

33. Τα σημεία A και B είναι σημεία του 1ου τεταρτημόριου και είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο $x = y$ της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Αν $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες του σημείου A με τις συντεταγμένες του σημείου B .

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) που διέρχεται από τα A και B έχει κλίση $\alpha = -1$.

γ) Αν επιπλέον τα σημεία A και B έχουν συντεταγμένες $(4, \kappa^2 - 3\kappa + 1)$ και $(\kappa - 2, 4)$ αντίστοιχα, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\kappa = 3$ και να προσδιορίσετε τα σημεία A και B .

ii. Για $\kappa = 3$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) .

34. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - (x - 1)^2$ και $g(x) = |x - 1| + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

β) Να αποδείξετε ότι $g(x) = \begin{cases} x + 1 & , x \geq 1 \\ -x + 3 & , x < 1 \end{cases}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση C_g .

γ) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g .

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x - 3| + 4 - (|6 - 2x| + 2)$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2 - |x - 3|$.

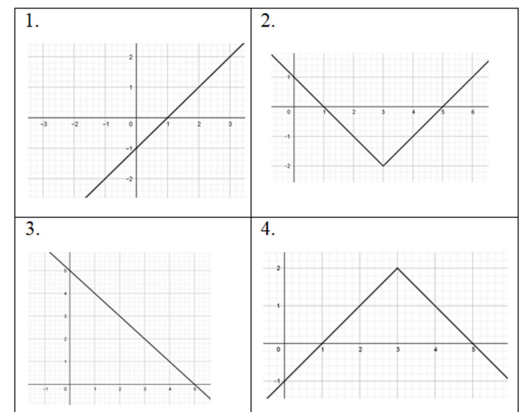
β) Αφού δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x - 1 & , x < 3 \\ 5 - x & , x \geq 3 \end{cases}$, να επιλέξετε ποια

από τις εικόνες 1, 2, 3 ή 4 δείχνει τη γραφική παράσταση της f και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

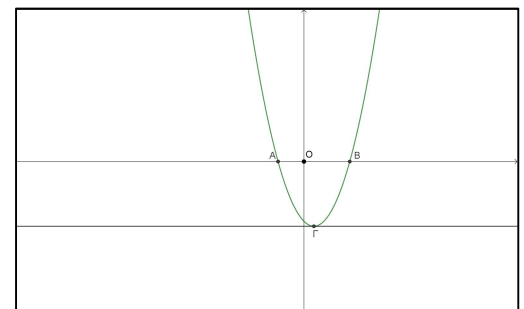
γ) i. Στο σχήμα με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f να σχεδιάσετε την ευθεία $y = -1$ και με τη βοήθειά της να

λύσετε την ανίσωση $2 - |x - 3| > -1$.

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.



36. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 3$. Αν $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$, $\Gamma(\gamma, \delta)$ σημεία της γραφικής παράστασης της f όπως φαίνεται στο σχήμα και η παράλληλη από το Γ στον $x'x$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο, τότε:



α) Να δείξετε ότι $\alpha = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$ και $\beta = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

β) Να δείξετε ότι $f(\sqrt{2}) < 0$.

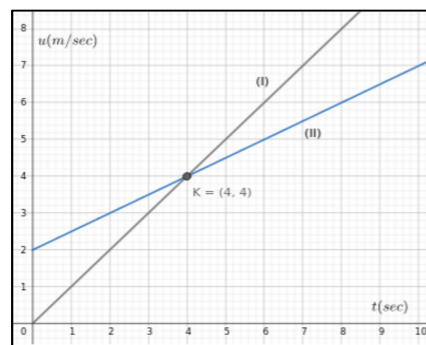
γ) Να δείξετε ότι $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < \sqrt{2} < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

δ) Να βρείτε τις τιμές των γ και δ .

37. Ένα όχημα, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει ταχύτητα, η οποία δίνεται από τη σχέση $u = u_0 + at$, όπου u η ταχύτητα του οχήματος τη χρονική στιγμή t και a η σταθερή επιτάχυνσή του στη διάρκεια της κίνησης, ενώ u_0 η αρχική ταχύτητα της κίνησής του.

α) Αν η παραπάνω σχέση αποτελεί συνάρτηση της ταχύτητας του οχήματος ως προς το χρόνο, να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη, ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποιο το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής.

β) Ένα όχημα Α, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ξεκινά από θέση ηρεμίας και τη χρονική στιγμή 4 sec έχει ταχύτητα 4 m/sec, ενώ ένα άλλο όχημα Β, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει αρχική ταχύτητα 2m/sec. Οι παρακάτω ευθείες (I),(II) στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου περιγράφουν τις ταχύτητες των δύο οχημάτων.



i) Ποια από τις δύο ευθείες (I), (II) περιγράφει την ταχύτητα του οχήματος Α και ποια την ταχύτητα του οχήματος Β;

ii) Να προσδιορίσετε ποιο από τα οχήματα Α, Β κινείται ταχύτερα για κάθε χρονική στιγμή $\square\square\square\square, \square \in (3,5)$

iii) Αν ένα όχημα Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2 m/sec και επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του οχήματος Α, να σχεδιάσετε στο παραπάνω διάγραμμα μία ευθεία, η οποία θα μπορούσε να περιγράφει την κίνησή του.

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $y = 2x + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $f(2+x) = f(2-x)$.

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = f(3,52) - f(0,52) + f(3,48) - f(0,48)$$

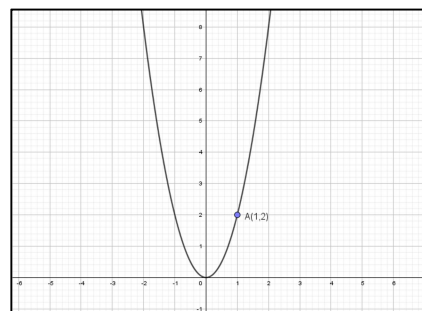
γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση C_f της f έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν $\beta = -5$.

δ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του β , ώστε η C_f να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία.

39. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = ax^2$, $x \in \mathbb{R}$ με παράμετρο a .

α) Αν το σημείο $A(1,2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να δείξετε ότι τιμή της παραμέτρου είναι $a = 2$.

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $(1,6)$ και έχει κλίση $\lambda = 2$.



ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε) με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.

γ) **i.** Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 2x + 4$.

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος.

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2|κ|x - 2$ και η ευθεία $(ε): y = 2x - κ^2$, $κ \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $κ \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η ευθεία $(ε)$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου $κ$.

γ) Για $κ = -3$ να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας $(ε)$ με την γραφική παράσταση της f .

δ) Αν A και B τα σημεία τομής του ερωτήματος γ), να βρείτε την απόσταση (AB) .

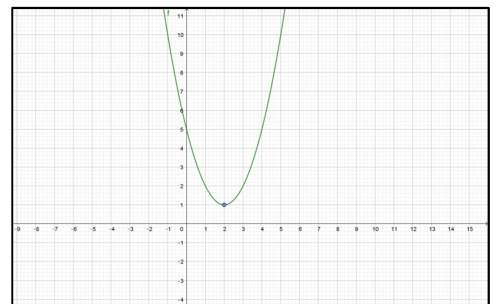
41. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

α) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 7$ και στη συνέχεια να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας.

β) **i.** Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = λ$ για τις διάφορες τιμές του $λ \in \mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο β) **i.**

γ) Έστω ότι μια ευθεία $y = λ$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = 4$.



42. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων, Δ είναι ένα σημείο στον άξονα $y'y$, E ένα σημείο του άξονα $x'x$ και O είναι η αρχή των αξόνων.

Η εξίσωση της ευθείας ΔE είναι: $y + \frac{1}{2}x = 4$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων E και Δ .

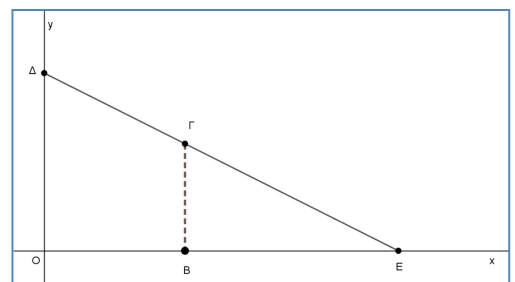
Ένα σημείο $\Gamma(t, y_\Gamma)$ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΔE και B ένα σημείο του άξονα $x'x$, τέτοιο ώστε $B\Gamma$ να είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$.

β) Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η τετμημένη t του σημείου Γ και να δείξετε ότι

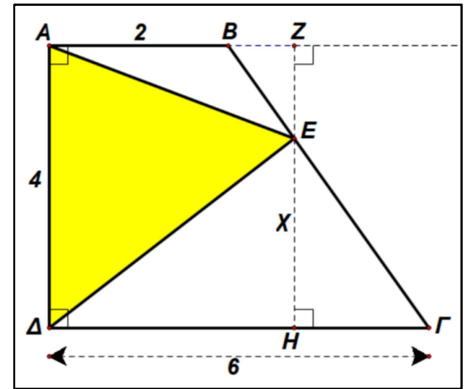
$$y_\Gamma = 4 - \frac{1}{2}t.$$

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $E(t) = 4t - \frac{1}{4}t^2$ εκφράζει το εμβαδόν του τραapeζίου $OB\Gamma\Delta$ και να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής στο πλαίσιο του προβλήματος.

δ) Αν το εμβαδόν του τραapeζίου ισούται με 9,75 τετραγωνικές μονάδες, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Γ .



43. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ώστε $AB=2$, $A\Delta=4$, $\Gamma\Delta=6$, ενώ η $A\Delta$ είναι κάθετη στην AB και επίσης κάθετη στην $\Gamma\Delta$. Το σημείο E μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση επί του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$ και ονομάζουμε x την απόσταση του E από την $\Gamma\Delta$.



- α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου AED δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = -2x + 12$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης;

- β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma = f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{2}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{4}{16}\right) + \dots + f\left(\frac{64}{16}\right)$.

44. Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $Y_1(t)$, σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση $Y_1(t) = 150 + 50t$, $t \in [0, 5]$. Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση $Y_2(t) = 650 - 25t$.

- α) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο;

- β) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το 5ο μέχρι το 10ο λεπτό της κίνησής του;

- γ) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Y_2(t)$, και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτερου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα.

- δ) i. Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

- ii. Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;