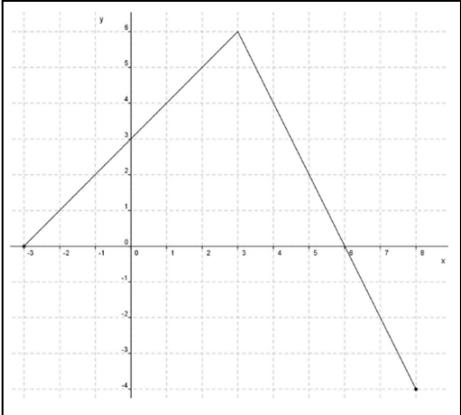
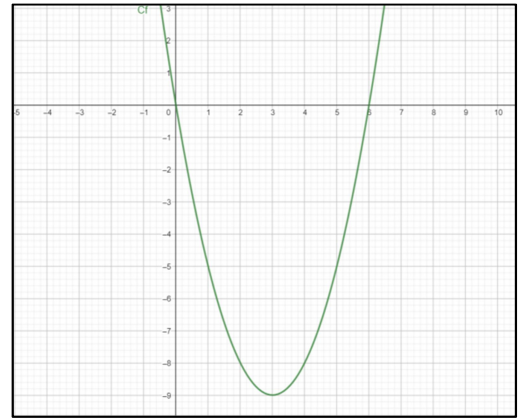


## 6.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + 2x - 15$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- α) Να υπολογίσετε το άθροισμα  $f(-5) + f(0) + f(3)$ .
- β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της  $f$  με τους άξονες.
2. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$ .
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- β) i. Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες ισχύει  $f(x) = 0$ .
- ii. Να βρείτε τις τιμές  $f(0)$  και  $f(3)$ .
- γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  με τους άξονες.
3. Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , με τύπο  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ .
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού  $\alpha$ , ώστε το σημείο  $M\left(\alpha, \frac{1}{8}\right)$  να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .
4. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$ .
- α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:
- |   |    |    |   |   |    |    |
|---|----|----|---|---|----|----|
| x | -3 | -1 | 0 | 3 |    |    |
| y |    |    |   |   | -2 | -4 |
- 
- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες συντεταγμένων.
- δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.
5. Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , με  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ .
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .
- β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης  $f$ .
- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .

6. Δίνεται η γραφική παράσταση  $C_f$  μιας συνάρτησης  $f$  που είναι ορισμένη σε όλο το  $\mathbb{R}$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Με τη βοήθεια του σχήματος:



- α) Να βρείτε τις τιμές της  $f$  για  $x = 0, 1, 3, 5$ .
- β) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση  $f(x) = 0$ .
- γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση  $f(x) < 0$ .
7. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$ ,  $x \neq 0$ .
- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση  $C_f$  διέρχεται από το σημείο  $A(4, 3)$ .
- β) Να εξετάσετε αν το σημείο  $B(-4, -3)$  είναι σημείο της  $C_f$ .
- γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  με την ευθεία  $y = 3$ .

8. Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , με:  $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$
- α) Να υπολογίσετε τις τιμές  $f(-1)$ ,  $f(3)$  και  $f(5)$ .
- β) Διέρχεται η γραφική παράσταση της  $f$  από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τον  $y'y$  άξονα.

9. Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$  με  $x \neq -1$ .
- α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να δείξετε ότι  $f(x) = x - 3$  για κάθε  $x \neq -1$ .
- β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(1, -4)$ .

10. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{5} + 3$ .
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- β) Να υπολογίσετε το  $f(-24)$ .
- γ) Να εξετάσετε αν το σημείο  $(1, 3)$  ανήκει στην γραφική παράσταση;

11. Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , με  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ .
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού  $A$  της συνάρτησης  $f$ .
- β) Ανήκει το σημείο  $M(1, 3)$  στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ ;

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τους άξονες  $x'$  και  $y'$ .

12. α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο  $x^2 + 2x - 3$ .

β) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ .

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού  $A$  της παραπάνω συνάρτησης  $f$ .

ii. Να δείξετε ότι  $f(x) = x + 3$  για κάθε  $x \in A$ .

iii. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f$ .

13. Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = \frac{x}{x^2 + 2} + \sqrt{x - 1}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g$ .

β) Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης  $g$  για  $x = 1$ ,  $x = -2$ ,  $x = 2$ .

γ) Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  τον  $y'$  άξονα;

14. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

β) Να εξετάσετε αν το σημείο  $M(2,4)$  ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τους άξονες.

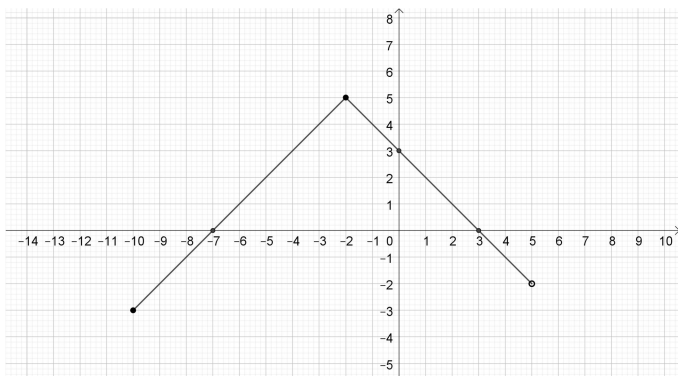
15. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

β) Να εξετάσετε αν το σημείο  $M(4,3)$  ανήκει στη γραφική παράσταση της  $f$ .

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο  $N(-1,-2)$  ανήκει στη γραφική παράσταση της  $f$ .

16. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$ .



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $A$  και το σύνολο τιμών της  $f(A)$ .

β) Να βρείτε τις τιμές  $f(-2)$ ,  $f(0)$ ,  $f(3)$ .

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες  $f(x) = 0$ .

δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες  $f(x) < 0$ .

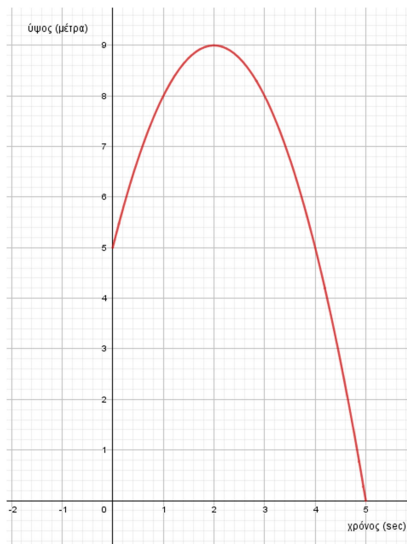
17. Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή, ώστε η απόστασή του από το έδαφος (μέτρα) σε σχέση με το χρόνο (sec) να φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) Από ποιο ύψος εκτελείται η κατακόρυφη βολή;

β) Ποιο το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό;

γ) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα από το έδαφος.

δ) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα συναντά το έδαφος.



18. α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:  $A = x^3 - x^2 + 3x - 3$ .

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = \frac{3}{x}$  και  $g(x) = x^2 - x + 3$  έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το  $A(1,3)$ .

19. α) Να δείξετε ότι  $x^2 + 2x + 4 > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ .

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $A$ .

γ) Να δείξετε ότι  $f(x) = x^2 + 2x + 4$  για κάθε  $x \in A$ .

δ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της  $f$  έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της  $g$ , όπου  $g(x) = 6x$ .

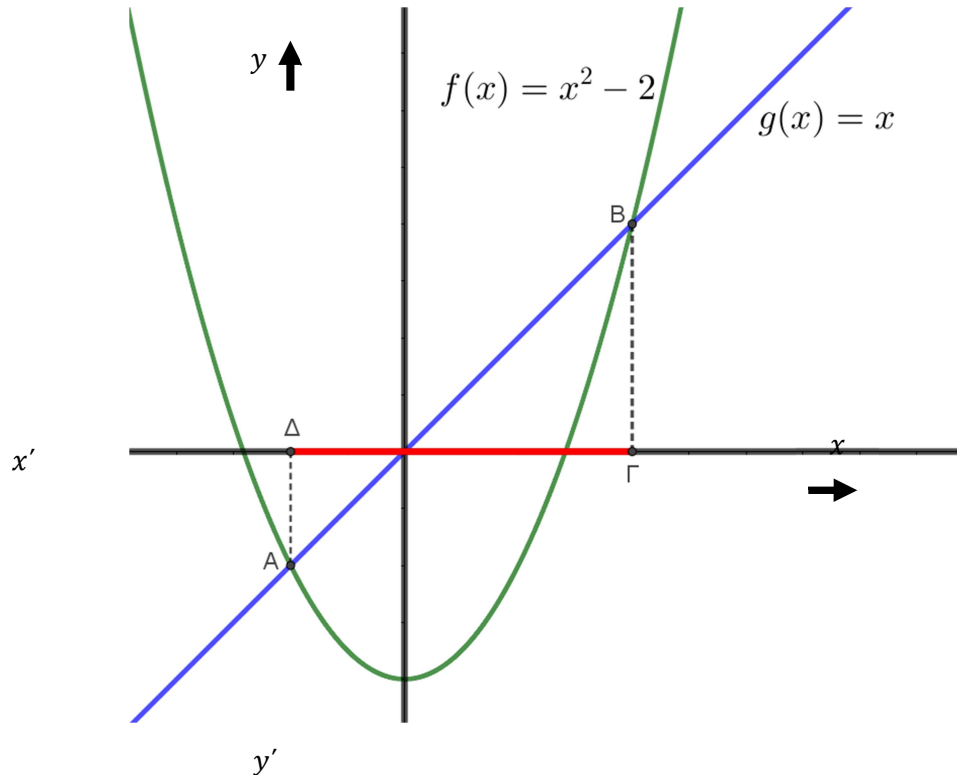
20. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x - 2}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $A$ .

β) Να δείξετε ότι το σημείο  $M(1, -\sqrt{2})$  ανήκει στη γραφική παράσταση της  $f$ .

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τους άξονες  $xx'$ ,  $yy'$ .

21. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = x^2 - 2$  και  $g(x) = x$ .



α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων  $A$  και  $B$  είναι  $A(-1, -1)$  και  $B(2, 2)$ .

β) Να λύσετε την ανίσωση  $x^2 - x - 2 < 0$ .

γ) Να λύσετε την ανίσωση  $\omega^2 - |\omega| - 2 < 0$ .

22. Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , με:  $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$  σε μορφή διαστήματος.

β) Να υπολογίσετε τις τιμές  $f(-1)$ ,  $f(3)$  και  $f(5)$ .

γ) Διέρχεται η γραφική παράσταση της  $f$  από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της  $f$  που έχει τεταγμένη  $y = 21$ .

23. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2 + 3x + 2$  και  $g(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, g$  έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε.

β) Δίνεται η συνάρτηση  $h(x) = x + a$ . Να δείξετε ότι:

- i. Αν  $a > 1$ , τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, h$  έχουν δύο κοινά σημεία.
- ii. Αν  $a < 1$ , τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, h$  δεν έχουν κοινά σημεία.

24. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \alpha x - \alpha + 2$  και  $g(x) = x^2 - \alpha + 3$  με  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $(1, 2)$  για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού  $\alpha$ .

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των  $f$  και  $g$  τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

- i. Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 2$ .
- ii. Για  $\alpha = 2$  υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των  $f$  και  $g$ ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

γ) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των  $f$  και  $g$  είναι ίδιο με το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $x^2 - \alpha x + 1 = 0$  και στη συνέχεια ότι για  $\alpha = 3, \alpha = -2, \alpha = 1$  έχουν αντίστοιχα δύο, ένα, κανένα σημεία τομής.

25. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$ , με  $f(x) = x^2 - 2x$  και  $g(x) = 3x - 4, x \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της  $f$  είναι κάτω από εκείνη της  $g$ .

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής  $y = \alpha, \alpha < -1$ , βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της  $f$ .

26. Για δεδομένο  $\lambda \in \mathbb{R}$ , θεωρούμε τη συνάρτηση  $f$ , με

$$f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 2, x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του  $\lambda$ , η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(0, 2)$ .

β) Για  $\lambda = -1$ , να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

γ) Αν η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $B(2, 0)$ , να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα  $x'x$  και σε άλλο σημείο.

δ) Για  $\lambda = 1$ , να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα  $x'x$ .

27. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2$  και  $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda), x \in \mathbb{R}$  και  $\lambda \neq 0$ , παράμετρος.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους  $C_f, C_g$  έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β) Να βρείτε για ποια τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  οι  $C_f, C_g$  έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

γ) Αν  $\lambda \neq 2$  και  $x_1, x_2$  είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των  $C_f, C_g$ , να βρείτε την τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  ώστε να ισχύει  $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$ .

28. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2 + \beta$ ,  $g(x) = x + \beta$ , όπου  $x \in \mathbb{R}$  και  $\beta$  σταθερός πραγματικός αριθμός. Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της  $g(x)$  διέρχεται από το σημείο  $M\left(\frac{3\beta}{2}, -3 - \frac{\beta}{2}\right)$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\beta = -1$ .

β) Για  $\beta = -1$

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x)$  με τους άξονες  $x'x, y'y$ .

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της  $f(x)$  βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x)$ .

iii. Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{g(x)}{f(x)} = 3$ .

29. Δίνονται τα σημεία  $A(\lambda, 1)$  και  $B(2 - \lambda^2, \mu)$ , με  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

α) Αν τα σημεία  $A, B$  είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα  $x'x$ , να βρείτε τις τιμές των  $\lambda, \mu$ .

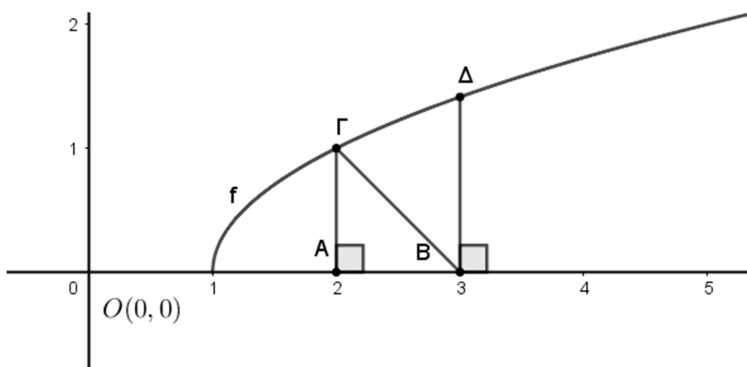
β) Αν επιπλέον το σημείο  $A$  βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του ορθοκανονικού συστήματος, να βρείτε την τιμή του  $\lambda$ .

γ) Για  $\lambda = -2$  και  $\mu = -1$

i. Να βρείτε την απόσταση των σημείων  $A, B$ .

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $OAB$ , όπου  $O$  η αρχή των αξόνων.

30. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \sqrt{x - a}$  όπου  $a \in \mathbb{R}$ .



α) Με βάση το σχήμα, να δείξετε ότι  $a = 1$ .

β) Αν  $a = 1$ , να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

γ)

i. Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων  $\Gamma$  και  $\Delta$  είναι  $(2,1)$  και  $(3,\sqrt{2})$  αντίστοιχα.

ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος  $B\Gamma$ .

iii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές.

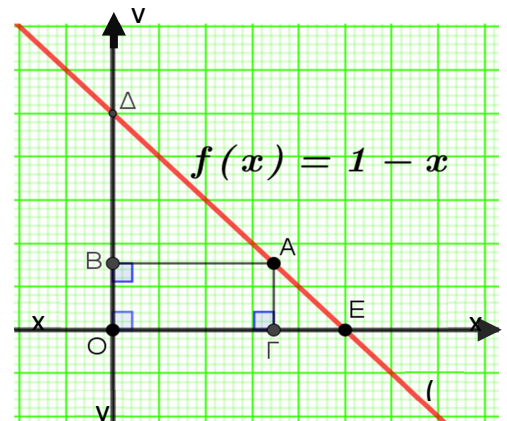
31. α) Να αποδείξετε ότι  $x - x^2 \leq \frac{1}{4}$  για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ . Πότε ισχύει το ίσον;

β) Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί η γραφική παράσταση ( $\epsilon$ ) της συνάρτησης

$f(x) = 1 - x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , η οποία τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  στα σημεία  $E$  και  $\Delta$  αντίστοιχα. Ένα μεταβλητό σημείο  $A$ , με τετμημένη  $a$ , κινείται επί της ευθείας ( $\epsilon$ ) και μεταξύ των σημείων  $\Delta$  και  $E$ . Φέρνουμε από το  $A$  καθέτους στους άξονες και έστω  $B$  και  $\Gamma$  τα σημεία τομής με  $y'y$  και  $x'x$  αντίστοιχα.

i. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου  $ABO\Gamma$ .

ii. Να αποδείξετε ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του εμβαδού του μεταβλητού ορθογωνίου  $ABO\Gamma$  είναι  $\frac{1}{4}$ . Για ποια θέση του σημείου  $A$  επιτυγχάνεται αυτή η τιμή;



32. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{3\sqrt{x^2-8x+\lambda}}{x-4} + 2$ , για  $x \neq 4$  και  $\lambda \geq 16$ .

α) Να βρείτε το  $\lambda \geq 16$  ώστε η γραφική παράσταση της  $f$  να διέρχεται από το σημείο της  $M(0, -1)$ .

β) Αν  $\lambda = 16$ , τότε:

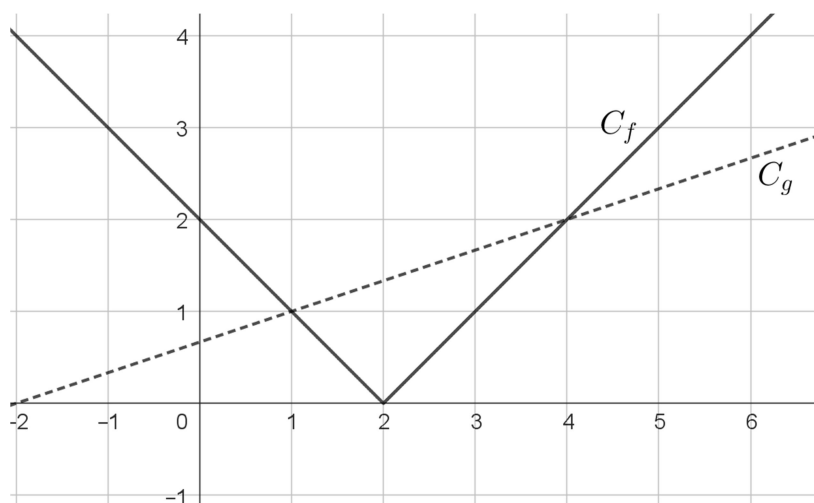
i. Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 4 \\ 5, & x > 4 \end{cases}$ .

ii. Να σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της  $f$ .

iii. Για  $x < 4$ , να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  των οποίων η απόστασή τους από το σημείο  $A(-1, -1)$  είναι 10 μονάδες μήκους.

33. Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις  $C_f$  και  $C_g$  των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  αντίστοιχα, με:

$$f(x) = |x - 2| \text{ και } g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$



α) Με βάση το σχήμα, να εκτιμήσετε την τιμή των συντεταγμένων των σημείων τομής γραφικών παραστάσεων  $C_f$  και  $C_g$ .



β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α).

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  η  $C_f$  βρίσκεται πάνω από τη  $C_g$ .

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς η παράσταση:

$$K = \sqrt{3|2 - x| - (x + 2)}.$$

34. Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ και } g(x) = x + \alpha \text{ με } x \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Για  $\alpha = 1$ , να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\alpha$ , οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  τέμνονται σε δύο σημεία.

γ) Για  $\alpha > 1$ , να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

35. Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μια ημέρα, η εταιρία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 60 + 0,20x$$

Όπου  $x$  είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και  $y$  το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α ο οποίος, σε μια ημέρα, ταξίδεψε 400Km;

β) Πόσα χιλιόμετρα ταξίδεψε ένας πελάτης ο οποίος για μια ημέρα πλήρωσε 150 ευρώ;

γ) Μια άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 80 + 0,10x$$

όπου, όπως και προηγουμένως,  $x$  είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και  $y$  είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

δ) Αν

$$f(x) = 60 + 0,20x \quad \text{και} \quad g(x) = 0,80 + 0,10x$$

είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή κάθε μιας από τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα το ερωτήματος γ).

36. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = (x - 1)^2 - 4$  και  $g(x) = |x - 1| + 2$  με  $x \in \mathbb{R}$ .

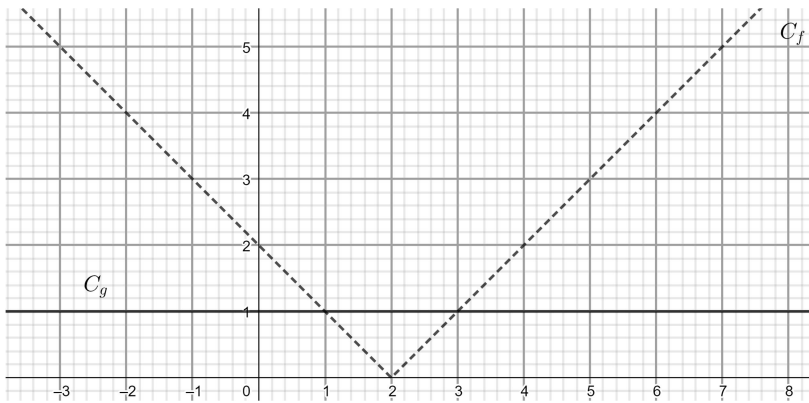
α) Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$ .

β) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του  $x$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$ .

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

37. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις  $C_f$  και  $C_g$  των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  αντίστοιχα, με

$$f(x) = |x - 2| \quad \text{και} \quad g(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$



α) Με τη βοήθεια του παραπάνω σχήματος, να βρείτε

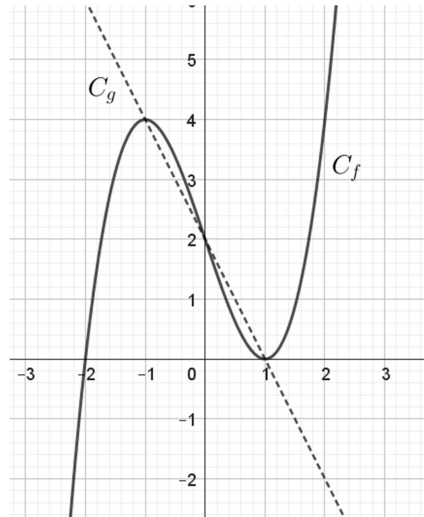
i. τα σημεία τομής των  $C_f$  και  $C_g$ .

ii. τις τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ , για τις οποίες η  $C_f$  είναι κάτω από την  $C_g$ .

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα αι) και αιι).

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  η παράσταση  $A = \frac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$  ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

38. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και της συνάρτησης  $g(x) = -2x + 2$ .



Με τη βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

**α)** τις τιμές του  $x$  για τις οποίες  $f(x) = -2x + 2$ ,

**β)** τις τιμές  $f(-1)$ ,  $f(0)$  και  $f(1)$ ,

**γ)** τις τιμές του  $x$ , για τις οποίες η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της  $g$ ,

**δ)** τις τιμές του  $x$ , για τις οποίες η παράσταση  $A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$  ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

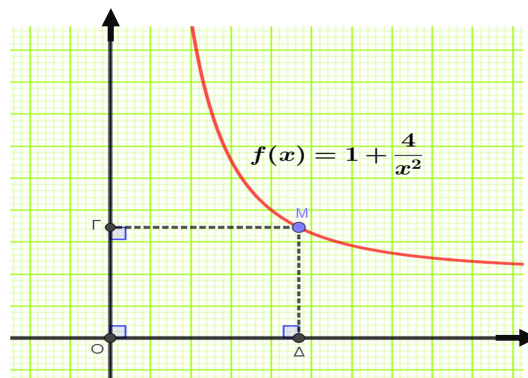
**39.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$ .

**α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

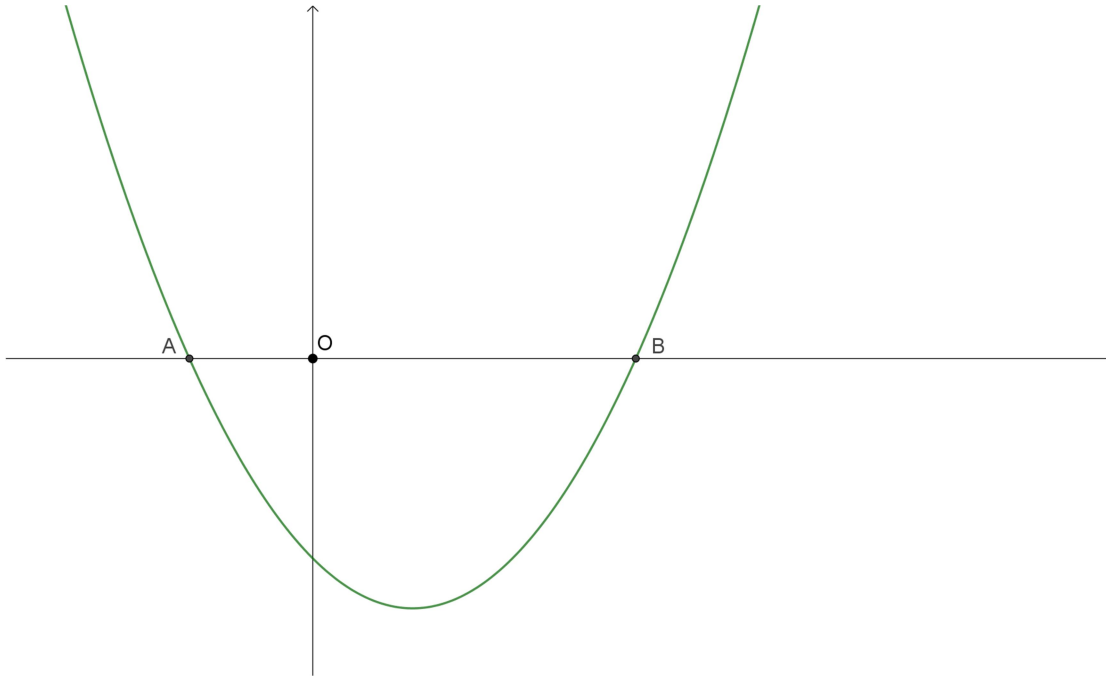
**β)** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  δεν τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .

**γ)** Έστω  $\alpha > 0$  η τετμημένη ενός τυχαίου σημείου  $M$  της γραφικής παράστασης της  $f$ . Αν ονομάσουμε  $E$  το εμβαδόν του ορθογωνίου  $ΟΓΜΔ$  του σχήματος, να αποδείξετε ότι

**i.**  $E = \alpha + \frac{4}{\alpha}$     **ii.**  $E \geq 4$ .



**40.** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^2 - x - 1$ .



Αν  $A(\omega, 0)$ ,  $B(\phi, 0)$

α) Να δείξετε ότι :

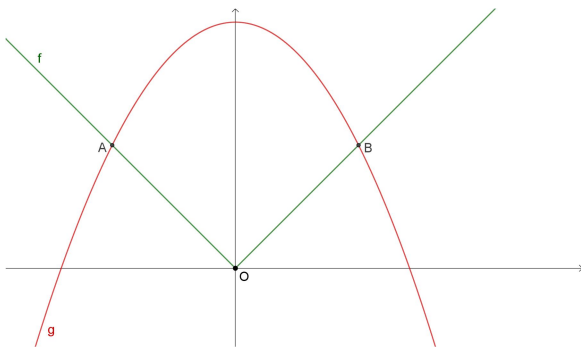
- i.  $\omega + \phi = 1$ .
- ii.  $\omega \cdot \phi = -1$ .

β) Να δείξετε ότι  $(OB) > (OA)$ .

γ) Αν ένας θετικός αριθμός  $\beta$  είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους ξεπερνάει τη μία μονάδα, να δείξετε ότι  $\beta > \phi$ .

δ) Να δείξετε ότι  $\phi < \frac{5}{3}$ .

41. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = |x|$  και  $g(x) = 2 - x^2$ . Τα A, B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των  $f, g$ .

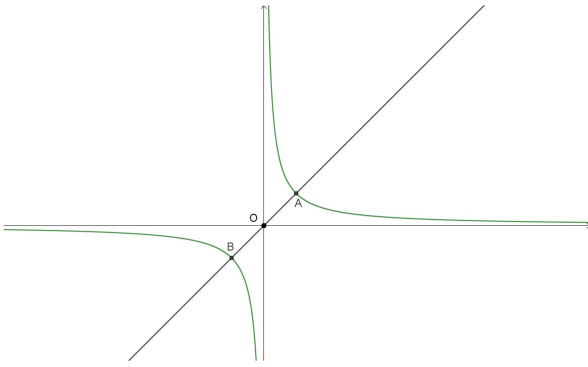


α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

β) Αν  $A(-1, 1)$  και  $B(1, 1)$ ,

- i. Με βάση το παραπάνω σχήμα, να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  ισχύει ότι :  $f(x) < g(x)$ .
- ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση  $f(x) < g(x)$  επαληθεύοντας την απάντηση στο ερώτημα βι).

42. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της  $f(x) = \frac{1}{x}$  και η ευθεία AB με εξίσωση  $y = x$ .



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των  $A, B$  και να δείξετε ότι το  $O(0,0)$  είναι το μέσο του  $AB$ .

Έστω  $M(x, y)$  τυχαίο σημείο της γραφική παράστασης της  $f$ .

β) Να δείξετε ότι και το συμμετρικό  $M'$  του  $M$  ως προς το  $O(0,0)$  ανήκει στη γραφική παράσταση της  $f$ .

γ) Αν  $A(1,1), B(-1,-1), M'(-x,-y)$  να δείξετε ότι  $(AB) \leq (MM')$  για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$  και να εξετάσετε πότε  $(AB) = (MM')$ .

43. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 7x + \kappa, \kappa \in \mathbb{R}$ , της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο με τεταγμένη  $y = 10$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\kappa = 10$ .

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  η γραφική παράσταση  $C_f$  της  $f$  είναι κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

γ) Έστω  $A(\alpha, f(\alpha))$  και  $B(\beta, f(\beta)), \alpha < \beta$  δυο σημεία της  $C_f$  που βρίσκονται κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

i. Να αποδείξετε ότι  $\alpha < \frac{2\alpha + 3\beta}{5} < \beta$

ii. Να εξετάσετε αν το σημείο της  $C_f$  με τεταγμένη  $x_0 = \frac{2\alpha + 3\beta}{5}$  βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

44. Δίνεται η συνάρτηση:  $g(x) = \left[ \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x - 12}} \right]^3 \cdot (x^2 - 16)$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g$ .

β) Να δείξετε ότι  $g(x) = \frac{x+4}{x+3}$  για κάθε  $x$  στο πεδίο ορισμού της.

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$  με τους άξονες.

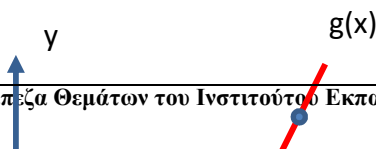
45. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $g(x)$ . Κάποια σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν ακέραιες συντεταγμένες έχουν σημειωθεί με έντονο τρόπο.

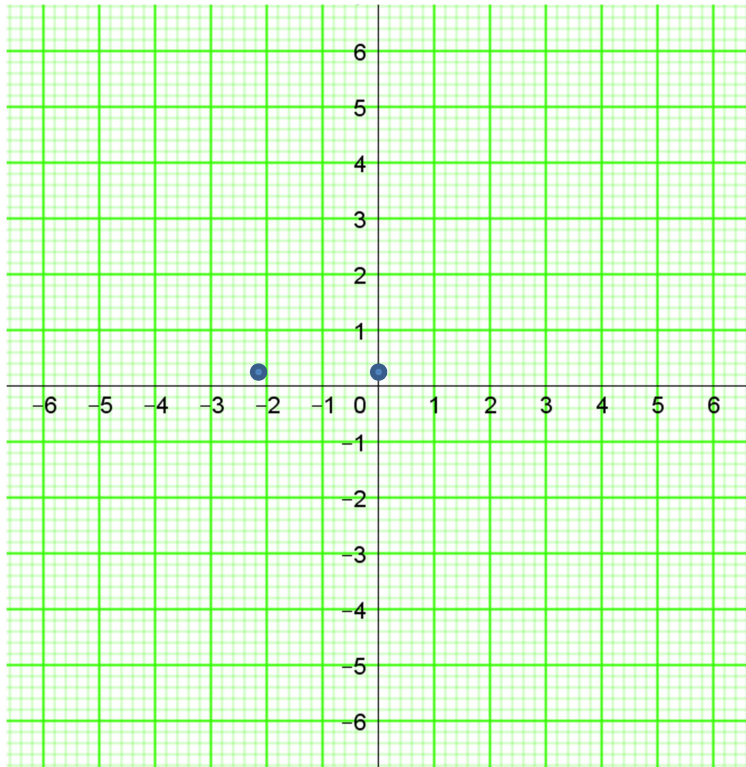
α) Να λύσετε την ανίσωση  $-2 \leq g(x) \leq 0$ .

β) Να λύσετε την ανίσωση  $|g(x)| \leq 2$ .

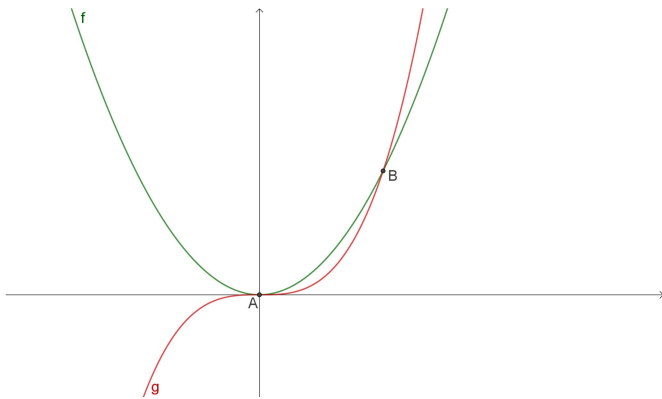
γ) i. Να βρείτε το πλήθος λύσεων των εξισώσεων  $g(x) = \frac{4}{5}$  και  $g(x) = -1$ .

ii. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης  $g(x) = k$  για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου  $k$ .





46. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = x^2$  και  $g(x) = x^3$  που τέμνονται στα σημεία A, B.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B.

Έστω  $A(0,0), B(1,1)$ .

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι για κάθε  $x \in (0,1)$  ισχύει ότι  $x^3 < x^2$ .

γ) Είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του;  
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Για τον πραγματικό αριθμό  $\pi = 3,1415\dots$  να δείξετε ότι

i.  $(\pi - 3)^3 < (\pi - 3)^2$ .

ii.  $\pi^3 - 10\pi^2 + 33\pi - 36 < 0$ .

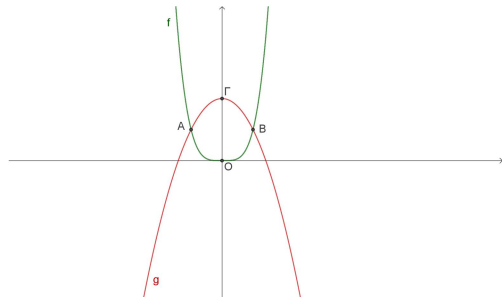
47. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$  και η ευθεία  $y = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση  $C_f$  της  $f$  είναι πάνω από τον άξονα  $x'x$ .

β) Να αποδείξετε ότι αν  $0 < \alpha < 1$ , τότε η  $C_f$  έχει με την ευθεία δυο κοινά σημεία των οποίων να βρείτε τις τετμημένες.

γ) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό  $x$  ισχύει  $|xf(x)| \leq \frac{1}{2}$ .

48. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = x^4$  και  $g(x) = 2 - x^2$ . Τα σημεία  $A, B$  είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των  $f, g$  ενώ  $\Gamma$  είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της  $g$  με τον άξονα  $y'y$ .



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων  $A, B, \Gamma$ .

Αν  $A(-1, 1), B(1, 1), \Gamma(0, 2)$

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$ .

γ) Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα β).

49. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{(x-2)(x^2-5x+4)}{x-1}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $A$ .

β) Να δείξετε ότι  $f(x) = x^2 - 6x + 8$ ,  $x \in A$ .

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  δεν είναι πάνω από την ευθεία  $y = 3$ .

δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  με  $g(x) = x^4 - 6x - 4$  τέμνει την γραφική παράσταση της  $f$ .

50. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$ .

β) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό  $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ , τα σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  με τετμημένες  $\alpha$  και  $-\alpha - 1$  έχουν την ίδια τεταγμένη.

γ) Θεωρούμε μεταβλητό σημείο  $M$  της γραφικής παράστασης της  $f$  με τετμημένη  $\beta > 0$ . Από το  $M$  φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  και έστω  $A$  και  $\Delta$  τα σημεία τομής αυτών των ευθειών με τους άξονες, όπου το  $A$  ανήκει στον  $x'x$  και το  $\Delta$  στον  $y'y$ . Αποδείξτε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου  $OAM\Delta$  είναι  $[\sqrt{2}(\beta + 1)]^2$ .

51. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x}{x^3 - 2x^2 + x}$ .

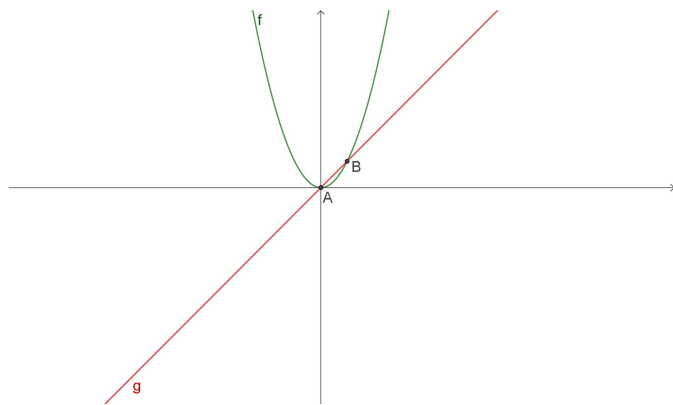
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού  $A$  της  $f$ .

β) Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ , για κάθε  $x \in A$ .

γ) Να λύσετε την εξίσωση:  $f(x) = 1$ .

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  είναι πάνω από την ευθεία  $y = 1$ .

52. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = x^2$  και  $g(x) = x$  που τέμνονται στα σημεία  $A, B$ .



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων  $A, B$ .

β) Αν  $A(0,0), B(1,1)$ , τότε:

- i. Με βάση το σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  η γραφική παράσταση της  $f$  είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της  $g$ .
- ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο i. ερώτημα.

γ) Αν  $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < \frac{\alpha}{\beta}$  για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  με  $\beta \neq 0$ , να δείξετε (με βάση τα παραπάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε) ότι  $|\alpha| < |\beta|$ .

53. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16|$ .

Αν  $|x| \leq 4$ , τότε:

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης  $f$  χωρίς τις απόλυτες τιμές.

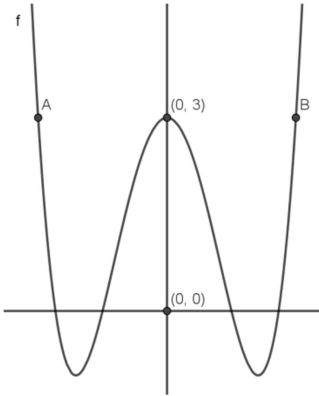
β) Αν  $f(x) = 3x^2 - x - 44$ .

- i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τους άξονες.



ii. Αν το σημείο  $M(\mu + 1, -20)$  ανήκει στη γραφική παράσταση της  $f$ , να βρείτε την ακέραια τιμή του  $\mu$ .

54. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της  $f(x) = ax^4 - 4x^2 + \gamma$ , η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα  $y'y$ .



α) Να δείξετε ότι  $\gamma = 3$ .

β) Αν  $A(a^2 - 3, 3)$  και  $B(5 - 3a, 3)$  είναι σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$ , όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι  $a = 1$  και να γράψετε τον τύπο της  $f$ .

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τον άξονα  $x'x$ .

δ) Με τη βοήθεια του σχήματος και την απάντηση του ερωτήματος γ), να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της  $f$  που είναι κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

55. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^2 + 2\lambda x + \gamma$  με  $x \in \mathbb{R}$  και παράμετρο  $\lambda \in \mathbb{R}$ , η οποία τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο  $(0, -1)$  για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

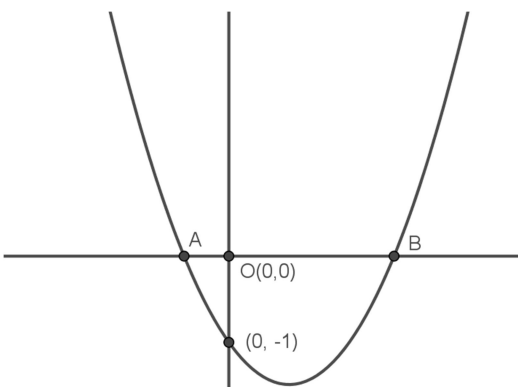
α) Να αποδείξετε ότι:

iii.  $\gamma = -1$

iv. Η γραφική παράσταση της  $f$  δεν είναι κάτω από την ευθεία  $y = -\lambda^2 - 1$  για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  σε δύο σημεία  $A$  και  $B$  με συντεταγμένες  $A(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0)$  και  $B(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0)$ .

γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των  $A$  και  $B$  είναι μεγαλύτερη ή ίση του 2 για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .



56. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^7 - x}{x^3 - x}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού  $A$  της  $f$ .

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της  $f$  έχει κοινά σημεία με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .

γ) Να δείξετε ότι  $f(x) = x^4 + x^2 + 1$  για κάθε  $x \in A$ .

δ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση  $f(x) = 3$  έχει λύση στο σύνολο  $A$ .

57. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - 4\lambda^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  σε δύο σημεία για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

β) Για  $\lambda \neq 0$  να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

γ) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε το συμμετρικό του σημείου  $A(4,4)$  ως προς τον άξονα  $x'x$  να ανήκει στη γραφική παράσταση της  $f$ .

δ) Για  $\lambda = -1$  να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

58. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{9-x^2}{3-|x|}$ .

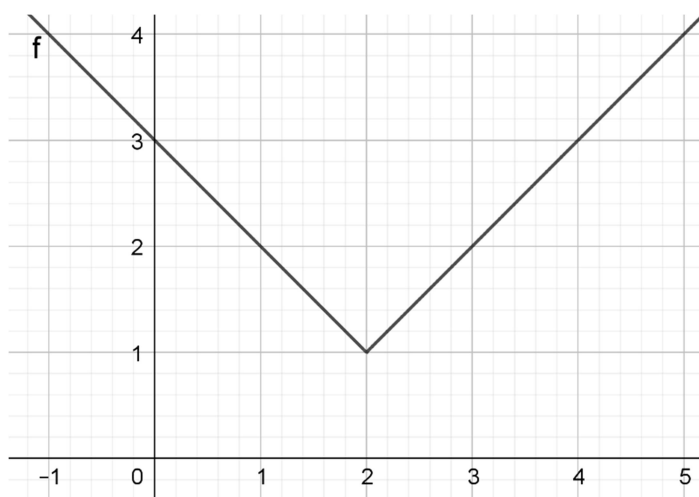
α) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  ορίζεται η συνάρτηση  $f$ .

α) Για τις τιμές του  $x$  που ορίζεται η συνάρτηση  $f$  να δείξετε ότι  $f(x) = 3 + |x|$ .

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης  $C_f$  με τους άξονες.

δ) Αν  $g(x) = 3 - x^2$  να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις  $C_f$  και  $C_g$  έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

59. Έστω η ευθεία  $\varepsilon: y = c$ , με παράμετρο  $c \in \mathbb{R}$  και η συνάρτηση  $f(x) = |x - 2| + 1$ , η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



α)

i. Με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του  $c \in \mathbb{R}$  η ευθεία  $\varepsilon$  και η γραφική παράσταση της  $f$  έχουν κοινά σημεία;

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος α)i).

β) Έστω ότι η ευθεία  $\varepsilon$  έχει με τη γραφική παράσταση της  $f$  δυο κοινά σημεία  $A, B$ . Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι  $A(3 - c, c)$  και  $B(c + 1, c)$ .

γ)

i. Αν  $A, B$  τα σημεία του ερωτήματος β), με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του  $c$  το μήκος του τμήματος  $AB$  είναι  $(AB) \leq 2$ ;

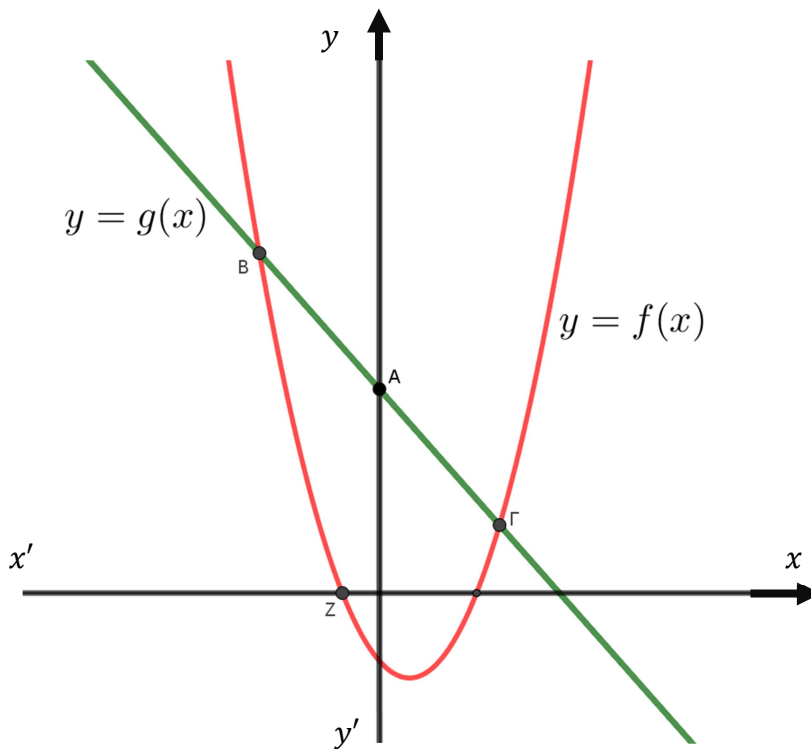
ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ)i).

60. Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f(x) = x^2 - x - 1$  και  $g(x) = 3 - x$  των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων  $A, B, \Gamma, Z$ .

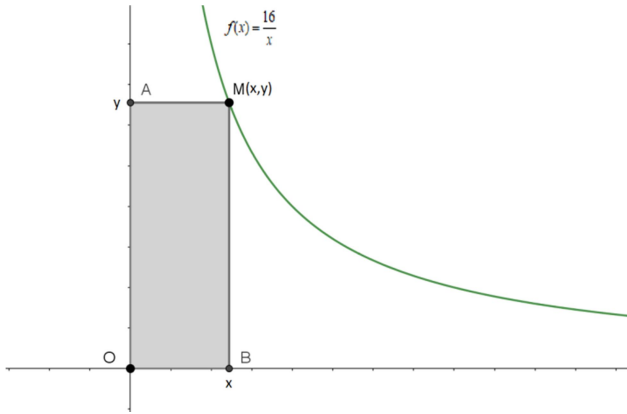
β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της  $y = f(x)$  που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της  $y = g(x)$

γ) Αποδείξτε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό  $\alpha$ , η απόσταση των αριθμών  $f(\alpha)$  και  $-g(\alpha)$  πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 1.



61. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \frac{16}{x}$ ,  $x > 0$ .

Ένα σημείο  $M(x,y)$  κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και έστω  $A$  και  $B$  οι προβολές του  $M$  στους άξονες  $y'y$  και  $x'x$  αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να δείξετε ότι όλα τα ορθογώνια OAMB που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις του σημείου M έχουν εμβαδόν 16 τετραγωνικές μονάδες, ενώ η περιμέτρός τους δίνεται, σε μονάδες μήκους, από τη συνάρτηση

$$\Pi(x) = 2x + \frac{32}{x}, \quad x > 0 \text{ όπου } x \text{ η τετμημένη του } M.$$

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M ώστε το ορθογώνιο OAMB να έχει περίμετρο 20 μονάδες μήκους.

γ) Αν M' είναι το σημείο της γραφικής παράστασης της f' ώστε το ορθογώνιο OAM'B να είναι τετράγωνο τότε:

i. Να δείξετε ότι το M' έχει τετμημένη 4.

ii. Να δείξετε ότι το τετράγωνο OAM'B έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια OAMB, δηλαδή ότι  $\Pi(x) \geq \Pi(4)$  για κάθε  $x > 0$ .

62. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$  και  $g(x) = |x + 3|$ .

Να βρείτε:

α) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων  $C_f$  και  $C_g$ .

γ) τις τετμημένες των σημείων της  $C_f$  που βρίσκονται κάτω από την  $C_g$ .

63. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  και  $g(x) = x - \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ .

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = f(2) + g(2) - f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)$$

β) Να αποδείξετε ότι  $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 4$  για οποιοδήποτε αριθμό x με  $x \neq 0$

γ) Θεωρούμε την ευθεία  $y = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, να αποδείξετε ότι  $|\alpha| \geq 2$ .

64. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x - 1)^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι  $f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = 8$

β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f, με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία  $y = 4$

γ) Έστω  $\alpha, \beta$  πραγματικοί αριθμοί με  $\alpha \neq \beta$  ώστε να ισχύει  $f(\alpha) = f(\beta)$ . Να αποδείξετε ότι  $\alpha + \beta = 2$

