4.2 Ανισώσεις 2ου βαθμού

1. **α)** Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$.

β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

γ) Να τοποθετήσετε τον αριθμό $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι ο αριθμός $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος **β)**;

2. Δίνεται το τριώνυμο: $-x^2 + \left(\sqrt{3} - 1\right)x + \sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι : $\Delta = \left(\sqrt{3} + 1\right)^2$.

β) Να παραγοντοποιήσετε το αρχικό τριώνυμο.

3. Δίνονται οι ανισώσεις : $-x^2 + 5x - 6 < 0 \ (1)$, $\quad x^2 - 16 \leq 0 \ (2)$.

α) Να βρεθούν οι λύσεις των (1), (2).

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

4. **α)** Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x|}{3} - \frac{|x| + 4}{5} = \frac{2}{3}$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$.

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του **α)** ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του **β)** ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

5. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του.

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{3}{2}$ είναι λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος **β).**

6. Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του **α)** ερωτήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

7. **α)** Να αποδείξετε ότι $x^2+4x+5>0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση: $B=|x^2+4x+5|-|x^2+4x+4|$.

8. **α)** Να λύσετε την ανίσωση $x^2-10x+21<0\ (1)$.

β) Αν η ανίσωση (1) έχει λύσεις τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $3<x<7$ και ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω ανίσωσης, να δείξετε ότι η παράσταση $A=|x-3|+|x-7|$ είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

9. **α)** Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x-5|\le 3$ και $2x^2-x-1\ge 0$.

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος **α).**

10. Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x-2=0\ (1)$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -1.

β) Να βρείτε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (1).

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A=\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x}$, $x\neq 0$, $x\neq -1$.

11. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+3x-5$.

α) Να εξετάσετε αν το 1 είναι ρίζα του τριωνύμου.

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

12. **α)** Αν $x^2-3x-4<0$, να δείξετε ότι: $-1<x<4$.

β) Δίνεται η παράσταση $A=|2x+2|+|x-5|$ με τις τιμές του x να επαληθεύουν την ανίσωση του ερωτήματος **α).** Να αποδείξετε ότι: $A=x+7$.

13. **α)** Να λύσετε την εξίσωση: $x^4-16=0\ (1)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2+3x\le 0\ (2)$.

γ) Να εξετάσετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι και λύσεις της ανίσωσης (2).

14. **α)** Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο: $2x^2-x-1$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $x(1-2x)\le -1$.

15. Θεωρούμε το τριώνυμο: $f(x)=x^2-x+3$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου.

β) Να επιλύσετε την ανίσωση: $-2\cdot f(x)<0$.

16. **α)** Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-4x+3<0\ (1)$.

β) Αν η (1) έχει λύσεις τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $1<x<3$ και οι αριθμοί α, β είναι λύσεις της ανίσωσης (1), να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\alpha+\beta}{2}$ είναι, επίσης, λύση της ανίσωσης (1).

17. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x-1|<1$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $0<x<1$.

β) Να βάλετε σε αύξουσα διάταξη τους αριθμούς 1, x, x^2.

18. **α)** Να λύσετε την ανίσωση $x^2<x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0<\alpha<1$.

i. Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, τους αριθμούς: $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος **α).**

ii. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\sqrt{1+\alpha}<1+\sqrt{\alpha}$.

19. Δίνονται οι ανισώσεις $|x+1|\le 2$ και $x^2-x-2>0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις.

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in[-3,-1)$.

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1-\rho_2\in(-2,2)$.

20. Δίνονται οι ανισώσεις: $2\le|x|\le 3$ και $x^2-4x<0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in[2,3]$.

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

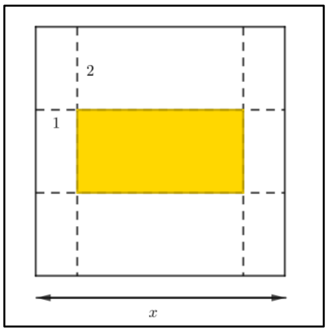
21. Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε cm) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y=60t-5t^2$.

α) Μετά πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος $y=175m$;

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100m.

22. Για μια επαγγελματική κάρτα επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς $x\,cm$ $(5 \le x \le 10)$ στο οποίο η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων (με κίτρινο χρώμα στο παρακάτω σχήμα) περιβάλλεται από περιθώρια $2\,cm$ στο πάνω και στο κάτω μέρος της και $1\,cm$ δεξιά και αριστερά.



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση: $E(x) = (x-2)(x-4)$, $5 \le x \le 10$.

β) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι $35\,cm^2$.

γ) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον $24\,cm^2$.

23. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - \alpha x - (\alpha+1)$, $x \in \mathbb{R}$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α να βρείτε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου.

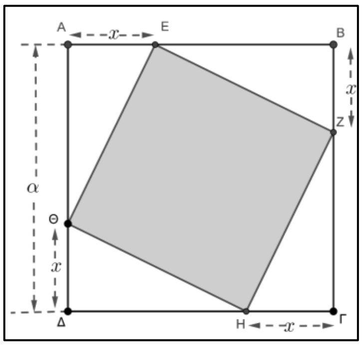
β) Αν είναι $\alpha > -2$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί -1 και $\alpha+1$.

ii. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία το μήκος του διαστήματος λύσεων της ανίσωσης: $x^2 - \alpha x - (\alpha+1) \le 0$ είναι ίσο με 2024.

iii. Να βρείτε το πρόσημο του $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

24. Στο παρακάτω σχήμα οι κορυφές του τετραγώνου $ΕΖΗΘ$ βρίσκονται πάνω στις πλευρές του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$.



α) Αν η πλευρά του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ είναι α και η απόσταση των κορυφών του $ΕΖΗΘ$ από τις αντίστοιχες κορυφές του $ΑΒΓΔ$ είναι x, όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι το εμβαδόν του $ΕΖΗΘ$ δίνεται από τη σχέση: $(ΕΖΗΘ) = x^2 + (\alpha - x)^2$ με $0 \le x \le \alpha$.

β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του $ΕΖΗΘ$ δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το μισό του εμβαδού του $ΑΒΓΔ$.

γ) Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ αν για $x=1$, το εμβαδόν του $ΕΖΗΘ$ είναι τα δύο τρίτα του εμβαδού του $ΑΒΓΔ$, δηλαδή: $(ΕΖΗΘ) = \frac{2}{3}(ΑΒΓΔ)$.

(Δίνεται $\sqrt{3} \approx 1,73$)

25. Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)=x^2-x+(\lambda-\lambda^2)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ίσες ρίζες;

γ) Αν $\lambda\neq\frac{1}{2}$ και x_1, x_2 οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1<x_2$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι: $x_1<\frac{x_1+x_2}{2}<x_2$,

ii. να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $f(x_2)$, $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$, $f(x_2+1)$.

26. Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=3x^2+\kappa x-4$, με παράμετρο $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ, το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και x_1, x_2 είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\alpha<x_1<x_2<\beta$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\alpha\cdot f(\alpha)\cdot\beta\cdot f(\beta)$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

27. **α)** Να λύσετε την ανίσωση $x^2-5x-6<0$.

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K=\left(-\frac{46}{47}\right)^2+5\cdot\frac{46}{47}-6$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

γ) Αν $\alpha\in(-6,6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda=\alpha^2-5|\alpha|-6$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

28. Οι πλευρές x_1 και x_2 ενός ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης: $x^2-2x+\lambda(2-\lambda)=0$, με $\lambda\in(0,2)$.

α) Να βρείτε

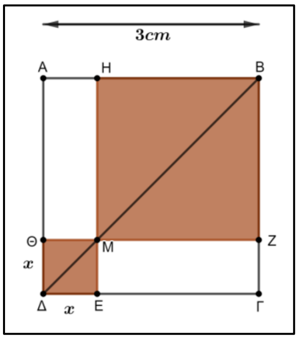
i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου.

ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ.

β) Να δείξετε ότι $E\le 1$, για κάθε $\lambda\in(0,2)$.

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in(0,2)$ για την οποία το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1. Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

29. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς $AB=3cm$ και τυχαίο σημείο Μ που κινείται στη διαγώνιο ΒΔ εσωτερικά (δηλαδή το Μ δεν θα ταυτιστεί με τα άκρα της διαγωνίου).



α) Να εκφράσετε το συνολικό εμβαδόν Ε των σκιασμένων τετραγώνων ΗΒΖΜ και ΘΜΕΔ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

β) Αν το εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων είναι $E(x)=2x^2-6x+9$, να αποδείξετε ότι $E(x)\geq\frac{9}{2}$, για κάθε $x\in(0,3)$.

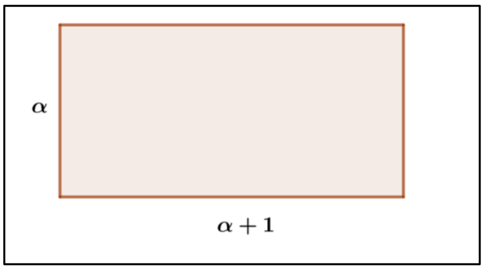
γ) Για ποια θέση του M πάνω στη $B\Delta$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

30. **α)** Να λύσετε την ανίσωση $x^2+x-6<0$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x-\frac{1}{2}\right|>1$.

γ) Δίνεται το ορθογώνιο με πλευρές α και $\alpha+1$.

Ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|>1$. Αν για τον εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E<6$, τότε:



i. Να δείξετε ότι $\frac{3}{2}<\alpha<2$.

ii. Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

31. **α)** Να λύσετε την ανίσωση $x^2+1\geq\frac{5}{2}x$ (1).

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ,λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση $(\lambda-1)(\kappa-1)<0$.

i. Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των αριθμών κ,λ.

ii. Να δείξετε ότι $|\kappa-\lambda|\geq\frac{3}{2}$.

32. Δίνεται το τριώνυμο: $x^2+\beta x+\beta^2$, όπου $\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

β) **i.** Αν $\beta\neq 0$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου;

ii. Πως αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα **i.,** όταν $\beta=0$;

γ) Με τη βοήθεια της απάντησης στο ερώτημα **β),** να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2>0$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

33. Δίνεται το τριώνυμο: x^2-2x-8.

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x.

β) Αν $\kappa=-\frac{8.889}{4.444}$, η τιμή της παράστασης $\kappa^2-2\kappa-8$ είναι μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Αν ισχύει $-4<\mu<4$, ποιο είναι το πρόσημο της τιμής της παράστασης: $\mu^2-2|\mu|-8$;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

34. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-6x+\lambda-3$, με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

γ) Αν $3<\lambda<12$ τότε:

i. Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

ii. Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa<0$ και $x_1<\mu<x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa\cdot f(\kappa)\cdot\mu\cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

35. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=-x^2+2x+3$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου: $f(2{,}999)\cdot f(-1{,}002)$.

γ) Αν $-3<\alpha<3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $-\alpha^2+2|\alpha|+3$.

36. Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $\Pi=40\text{cm}$. Αν $x\,\text{cm}$ είναι το μήκος του ορθογωνίου, τότε να δείξετε ότι:

α) $0<x<20$.

β) Το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση $E(x)=20x-x^2$.

γ) Για το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ισχύει: $E(x)\le 100$, για κάθε $x\in(0,20)$.

δ) Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο $40\,\text{cm}$, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς $10\,\text{cm}$.

37. **α)** **i.** Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2+9x+18$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $|x+3|+|x^2+9x+18|=0$.

β) **i.** Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2+9x+18$, για τις διάφορες τιμές του αριθμού x.

ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $|x^2+9x+18|=-x^2-9x-18$.

38. Δίνεται η εξίσωση: $|x-4|-|x-2|=2$.

α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της παραπάνω εξίσωσης.

β) Να αιτιολογήσετε γεωμετρικά ότι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ανήκουν στο $(-\infty,2]$ και μόνο αυτοί.

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει ότι $|x-4|-|x-2|=2$, τότε να δείξετε ότι $x^2-6x+8\ge 0$.

39. **α)** Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι $\left(\frac{\pi+9}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi+9}{3}\right) - 12 > 0$, όπου $\pi = 3{,}1415\ldots$.

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι $(|\alpha|+3)^2 - (|\alpha|+3) - 12 < 0$, να δείξετε ότι $\alpha \in (-1,1)$.

40. **α)** Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2,\ x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha < \beta$ για τους οποίους ισχύει

$$(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0 .$$

i. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha - 1$ και $\beta - 2$ είναι ομόσημοι.

ii. Να δείξετε ότι $|(\alpha-1)(\beta-2)| = (\alpha-1)(\beta-2)$.

41. Δίνεται η ανίσωση $|x-1| \le 3\ (1)$.

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

γ) Να βρείτε μία ανίσωση 2ου βαθμού που να έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με την (1).

δ) Να δείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιό του, τότε η απόσταση του από το 1 δεν ξεπερνάει το 3.

42. **α)** Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i. Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

ii. Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha, \alpha^2, \frac{\alpha+\alpha^2}{2}$.

43. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει, για οποιαδήποτε τιμή του λ, πραγματικές και άνισες ρίζες.

β) Να λύσετε την εξίσωση.

Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1 < \rho_2$.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ, η απόσταση των αριθμών ρ_2 και $-\rho_1$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, είναι τουλάχιστον 8.

δ) Θεωρούμε έναν αριθμό k ώστε $\rho_1 < k < \rho_2$. Να βρείτε, με απόδειξη, το πρόσημο του $k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 - 1$.

44. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{-x^2 + 4|x| - 3}{|x| - 1}$ και $B = \frac{x^2 - 4|x| + 4}{|x| - 2}$.

α) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις Α και Β;

β) Να δείξετε ότι $A = 3-|x|$ και $B = |x|-2$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $B - A < 2d(x,4) - 5$.

45. Δίνονται οι ανισώσεις $|x-1| < 2$ και $x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1,1] \cup [2,3)$.

γ) **i.** Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2, με $\rho_1 < \rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1, \rho_2 \in (-1,1]$, είναι και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;

ii. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2, με $\rho_1 < \rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1 \in (-1,1]$ και $\rho_2 \in [2,3)$, είναι και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;