

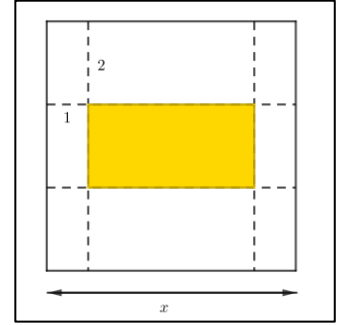
4.2 Ανισώσεις 2ου βαθμού

1. **α)** Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$.
- β)** Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.
- γ)** Να τοποθετήσετε τον αριθμό $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι ο αριθμός $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος **β**);
2. Δίνεται το τριώνυμο: $-x^2 + (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3}$.
- α)** Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2$.
- β)** Να παραγοντοποιήσετε το αρχικό τριώνυμο.
3. Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2 + 5x - 6 < 0$ (1), $x^2 - 16 \leq 0$ (2).
- α)** Να βρεθούν οι λύσεις των (1), (2).
- β)** Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.
4. **α)** Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x|}{3} - \frac{|x| + 4}{5} = \frac{2}{3}$.
- β)** Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$.
- γ)** Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του **α)** ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του **β)** ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
5. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.
- α)** Να βρείτε τις ρίζες του.
- β)** Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $2x^2 - 3x + 1 < 0$.
- γ)** Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{3}{2}$ είναι λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος **β**).
6. Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$, $x \in \mathbb{R}$.
- α)** Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.
- β)** Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του **α)** ερωτήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

7. **α)** Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .
- β)** Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση: $B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 5|$.
8. **α)** Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 10x + 21 < 0$ (1).
- β)** Αν η ανίσωση (1) έχει λύσεις τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $3 < x < 7$ και ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω ανίσωσης, να δείξετε ότι η παράσταση $A = |x - 3| + |x - 7|$ είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .
9. **α)** Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x - 5| \leq 3$ και $2x^2 - x - 1 \geq 0$.
- β)** Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος **α**).
10. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$ (1).
- α)** Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -1 .
- β)** Να βρείτε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (1).
- γ)** Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$, $x \neq 0$, $x \neq -1$.
11. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 5$.
- α)** Να εξετάσετε αν το 1 είναι ρίζα του τριωνύμου.
- β)** Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.
12. **α)** Αν $x^2 - 3x - 4 < 0$, να δείξετε ότι: $-1 < x < 4$.
- β)** Δίνεται η παράσταση $A = |2x + 2| + |x - 5|$ με τις τιμές του x να επαληθεύουν την ανίσωση του ερωτήματος **α**). Να αποδείξετε ότι: $A = x + 7$.
13. **α)** Να λύσετε την εξίσωση: $x^4 - 16 = 0$ (1).
- β)** Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + 3x \leq 0$ (2).
- γ)** Να εξετάσετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι και λύσεις της ανίσωσης (2).
14. **α)** Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο: $2x^2 - x - 1$.
- β)** Να λύσετε την ανίσωση $x(1 - 2x) \leq -1$.
15. Θεωρούμε το τριώνυμο: $f(x) = x^2 - x + 3$.
- α)** Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου.
- β)** Να επιλύσετε την ανίσωση: $-2 \cdot f(x) < 0$.

16. α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 4x + 3 < 0$ (1).
 β) Αν η (1) έχει λύσεις τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $1 < x < 3$ και οι αριθμοί α, β είναι λύσεις της ανίσωσης (1), να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\alpha + \beta}{2}$ είναι, επίσης, λύση της ανίσωσης (1).
17. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x - 1| < 1$, τότε:
 α) Να δείξετε ότι $0 < x < 1$.
 β) Να βάλετε σε αύξουσα διάταξη τους αριθμούς $1, x, x^2$.
18. α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.
 β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0 < \alpha < 1$.
 i. Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, τους αριθμούς: $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$.
 Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).
 ii. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\sqrt{1 + \alpha} < 1 + \sqrt{\alpha}$.
19. Δίνονται οι ανισώσεις $|x + 1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.
 α) Να λύσετε τις ανισώσεις.
 β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1)$.
 γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι:
 $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$.
20. Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \leq |x| \leq 3$ και $x^2 - 4x < 0$.
 α) Να βρείτε τις λύσεις τους.
 β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2, 3]$.
 γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.
21. Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε cm) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y = 60t - 5t^2$.
 α) Μετά πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;
 β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος $y = 175\text{m}$;
 γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100m.

22. Για μια επαγγελματική κάρτα επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \leq x \leq 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων (με κίτρινο χρώμα στο παρακάτω σχήμα) περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά.



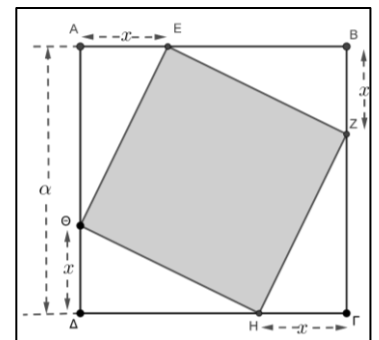
- α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση: $E(x) = (x-2)(x-4)$, $5 \leq x \leq 10$.
- β) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2 .
- γ) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2 .

23. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - \alpha x - (\alpha + 1)$, $x \in \mathbb{R}$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α να βρείτε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου.
- β) Αν είναι $\alpha > -2$, τότε:
- Να αποδείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί -1 και $\alpha + 1$.
 - Να βρείτε την τιμή του α για την οποία το μήκος του διαστήματος λύσεων της ανίσωσης: $x^2 - \alpha x - (\alpha + 1) \leq 0$ είναι ίσο με 2024.
 - Να βρείτε το πρόσημο του $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

24. Στο παρακάτω σχήμα οι κορυφές του τετραγώνου $EZH\Theta$ βρίσκονται πάνω στις πλευρές του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

- α) Αν η πλευρά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ είναι α και η απόσταση των κορυφών του $EZH\Theta$ από τις αντίστοιχες κορυφές του $AB\Gamma\Delta$ είναι x , όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι το εμβαδόν του $EZH\Theta$ δίνεται από τη σχέση: $(EZH\Theta) = x^2 + (\alpha - x)^2$ με $0 \leq x \leq \alpha$.

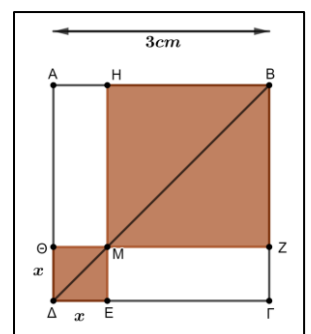


- β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του $EZH\Theta$ δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το μισό του εμβαδού του $AB\Gamma\Delta$.

- γ) Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ αν για $x = 1$, το εμβαδόν του $EZH\Theta$ είναι τα δύο τρίτα του εμβαδού του $AB\Gamma\Delta$, δηλαδή: $(EZH\Theta) = \frac{2}{3}(AB\Gamma\Delta)$.

(Δίνεται $\sqrt{3} \approx 1,73$)

25. Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ίσες ρίζες;
- γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε:
- i. να αποδείξετε ότι: $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$,
- ii. να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $f(x_2)$, $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, $f(x_2 + 1)$.
26. Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + kx - 4$, με παράμετρο $k \in \mathbb{R}$.
- α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του k , το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
- β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και x_1, x_2 είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$.
- Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
27. α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 5x - 6 < 0$.
- β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5 \cdot \frac{46}{47} - 6$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- γ) Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.
28. Οι πλευρές x_1 και x_2 ενός ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης: $x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0$, με $\lambda \in (0, 2)$.
- α) Να βρείτε
- i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου.
- ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ .
- β) Να δείξετε ότι $E \leq 1$, για κάθε $\lambda \in (0, 2)$.
- γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in (0, 2)$ για την οποία το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με
1. Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;
29. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $AB = 3\text{cm}$ και τυχαίο σημείο M που κινείται στη διαγώνιο BD εσωτερικά (δηλαδή το M δεν θα ταυτιστεί με τα άκρα της διαγωνίου).
- α) Να εκφράσετε το συνολικό εμβαδόν E των σκιασμένων τετραγώνων $HBZM$ και $\Theta M E \Delta$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.



β) Αν το εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων είναι $E(x) = 2x^2 - 6x + 9$, να αποδείξετε ότι $E(x) \geq \frac{9}{2}$, για κάθε $x \in (0,3)$.

γ) Για ποια θέση του M πάνω στη BD το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

30. **α)** Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + x - 6 < 0$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x - \frac{1}{2}\right| > 1$.

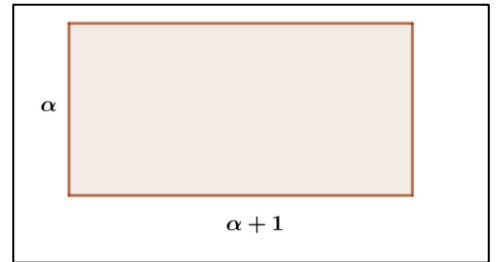
γ) Δίνεται το ορθογώνιο με πλευρές α και $\alpha + 1$.

Ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| > 1$. Αν για τον εμβαδόν

E του ορθογωνίου ισχύει $E < 6$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

ii. Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.



31. **α)** Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x$ (1).

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση $(\lambda - 1)(\kappa - 1) < 0$.

i. Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των αριθμών κ, λ .

ii. Να δείξετε ότι $|\kappa - \lambda| \geq \frac{3}{2}$.

32. Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 + \beta x + \beta^2$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

β) i. Αν $\beta \neq 0$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου;

ii. Πως αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα **i.**, όταν $\beta = 0$;

γ) Με τη βοήθεια της απάντησης στο ερώτημα **β)**, να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

33. Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2x - 8$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x .

β) Αν $\kappa = -\frac{8.889}{4.444}$, η τιμή της παράστασης $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ είναι μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, ποιο είναι το πρόσημο της τιμής της παράστασης: $\mu^2 - 2|\mu| - 8$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

34. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

γ) Αν $3 < \lambda < 12$ τότε:

i. Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

ii. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \kappa < x_2$,

να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

35. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου: $f(2,999) \cdot f(-1,002)$.

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$.

36. Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $\Pi = 40\text{cm}$. Αν $x\text{cm}$ είναι το μήκος του ορθογωνίου, τότε να δείξετε ότι:

α) $0 < x < 20$.

β) Το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση $E(x) = 20x - x^2$.

γ) Για το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ισχύει: $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$.

δ) Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40cm , εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10cm .

37. α) i. Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$.

β) i. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του αριθμού x .

ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18$.

38. Δίνεται η εξίσωση: $|x - 4| - |x - 2| = 2$.

α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της παραπάνω εξίσωσης.

β) Να αιτιολογήσετε γεωμετρικά ότι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ανήκουν στο $(-\infty, 2]$ και μόνο αυτοί.

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει ότι $|x - 4| - |x - 2| = 2$, τότε να δείξετε ότι $x^2 - 6x + 8 \geq 0$.

39. α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.
- β) Να δείξετε ότι $\left(\frac{\pi+9}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi+9}{3}\right) - 12 > 0$, όπου $\pi = 3,1415\dots$
- γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι $(|\alpha|+3)^2 - (|\alpha|+3) - 12 < 0$, να δείξετε ότι $\alpha \in (-1,1)$.
40. α) Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.
- β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha < \beta$ για τους οποίους ισχύει
- $$(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0.$$
- i. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha - 1$ και $\beta - 2$ είναι ομόσημοι.
- ii. Να δείξετε ότι $|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$.
41. Δίνεται η ανίσωση $|x - 1| \leq 3$ (1).
- α) Να λύσετε την ανίσωση (1).
- β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).
- γ) Να βρείτε μία ανίσωση 2ου βαθμού που να έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με την (1).
- δ) Να δείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιό του, τότε η απόσταση του από το 1 δεν ξεπερνάει το 3.
42. α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.
- β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.
- i. Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς:
 $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- ii. Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha, \alpha^2, \frac{\alpha + \alpha^2}{2}$.
43. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει, για οποιαδήποτε τιμή του λ , πραγματικές και άνισες ρίζες.
- β) Να λύσετε την εξίσωση.
- Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1 < \rho_2$.
- γ) Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ , η απόσταση των αριθμών ρ_2 και $-\rho_1$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, είναι τουλάχιστον 8.
- δ) Θεωρούμε έναν αριθμό k ώστε $\rho_1 < k < \rho_2$. Να βρείτε, με απόδειξη, το πρόσημο του $k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 - 1$.
44. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{-x^2 + 4|x| - 3}{|x| - 1}$ και $B = \frac{x^2 - 4|x| + 4}{|x| - 2}$.
- α) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις A και B;

β) Να δείξετε ότι $A = 3 - |x|$ και $B = |x| - 2$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $B - A < 2d(x, 4) - 5$.

45. Δίνονται οι ανισώσεις $|x - 1| < 2$ και $x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1, 1] \cup [2, 3)$.

γ) i. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 , με $\rho_1 < \rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1]$, είναι και ο

αριθμός $\frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;

ii. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 , με $\rho_1 < \rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1 \in (-1, 1]$ και $\rho_2 \in [2, 3)$, είναι

και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;