

## 4.1 Ανισώσεις 1ου βαθμού

1. Αν ο πραγματικός αριθμός  $x$  ικανοποιεί τη σχέση:  $|x+1| < 2$ ,
- α) να δείξετε ότι:  $x \in (-3,1)$ ,
- β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης  $K = \frac{|x+3|+|x-1|}{4}$ , είναι αριθμός ανεξάρτητος του  $x$ .
2. Δίνεται η παράσταση:  $A = \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x-4}$ .
- α) Για ποιες τιμές του  $x$  ορίζεται η παράσταση  $A$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του  $x$  σε μορφή διαστήματος.
- β) Αν  $x=4$ , να αποδείξετε ότι  $A^2 - A = 2 \cdot (10 - \sqrt{5})$ .
3. Δίνεται η παράσταση  $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$ .
- α) Για ποιες τιμές του  $x$  ορίζεται η παράσταση  $A$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του  $x$  σε μορφή διαστήματος.
- β) Για  $x=5$ , να αποδείξετε ότι:  $A^2 + A - 6 = 0$ .
4. Δίνεται η παράσταση  $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}) \cdot (\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$ .
- α) Για ποιες τιμές του  $x$  ορίζεται η παράσταση  $A$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση  $A$  είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του  $x$ .
5. α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:
- i.  $|1-2x| < 5$ ,                      ii.  $|1-2x| \geq 1$
- β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του  $x$  για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.
6. Η θερμοκρασία  $T$  σε βαθμούς Κελσίου ( $^{\circ}\text{C}$ ), σε βάθος  $x$  χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:  $T = 15 + 25 \cdot x$ , όταν  $0 \leq x \leq 200$ .
- α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου, το οποίο βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης.
- β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με  $290^{\circ}\text{C}$ .
- γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από  $440^{\circ}\text{C}$ ;
7. Δίνονται δύο ευθύγραμμα τμήματα με μήκη  $x$  και  $y$ , για τα οποία ισχύουν:  $|x-3| \leq 2$  και  $|y-6| \leq 4$ .
- α) Να αποδείξετε ότι:  $1 \leq x \leq 5$  και  $2 \leq y \leq 10$ .

**β)** Να βρείτε την μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις  $2x$  και  $y$ .

**8. α)** Να λύσετε την ανίσωση  $3x - 1 < x + 9$ .

**β)** Να λύσετε την ανίσωση  $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$ .

**γ)** Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων **α)** και **β)** και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

**9. α)** Να λύσετε την ανίσωση  $|x - 5| < 2$ .

**β)** Να λύσετε την ανίσωση  $|2 - 3x| > 5$ .

**γ)** Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

**10. α)** Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του  $y$  ισχύει:  $|y - 3| < 1$ .

**β)** Αν για τους  $x, y$  ισχύουν  $1 < x < 3$  και  $2 < y < 4$ , τότε να αποδείξετε ότι  $3 < x + y < 7$ .

**11. α)** Να λύσετε την εξίσωση:  $|2x + 4| = 10$ .

**β)** Να λύσετε την ανίσωση:  $|x - 5| > 1$ .

**γ)** Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του **α)** ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του **β)** ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**12. α)** Να λύσετε την ανίσωση:  $|2x - 1| \leq 7$ .

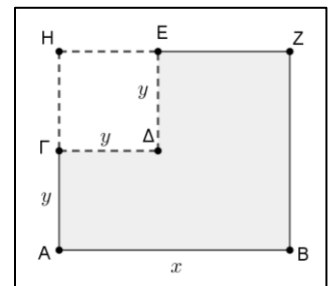
**β)** Να λύσετε την ανίσωση:  $|x - 1| > 2$ .

**γ)** Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων **α)** και **β)** και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

**13.** Από το ορθογώνιο ABZH αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς  $y$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος EZBAΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση:  $\Pi = 2x + 4y$ .

**β)** Αν ισχύει  $5 < x < 8$  και  $1 < y < 2$ , να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.



**14.** Δίνεται η παράσταση:  $A = |x - 1| - |x - 2|$ .

α) Για  $1 < x < 2$ , να δείξετε ότι:  $A = 2x - 3$ .

β) Για  $x < 1$ , να δείξετε ότι η παράσταση  $A$  έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του  $x$ ), την οποία και να προσδιορίσετε.

15. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί  $y$ , για τους οποίους ισχύει:  $|y - 2| < 1$ .

α) Να αποδείξετε ότι:  $y \in (1, 3)$ .

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση:  $K = \frac{|y-1| + |y-3|}{2}$ .

16. Δίνεται πραγματικός αριθμός  $x$  για τον οποίο ισχύει:  $|x - 2| < 3$ .

α) Να αποδείξετε ότι:  $-1 < x < 5$ .

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση:  $K = \frac{|x+1| + |x-5|}{3}$ .

17. α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i.  $|2x - 3| \leq 5$ ,      ii.  $|2x - 3| \geq 1$

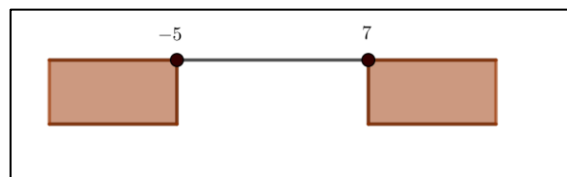
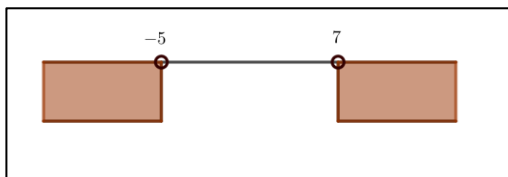
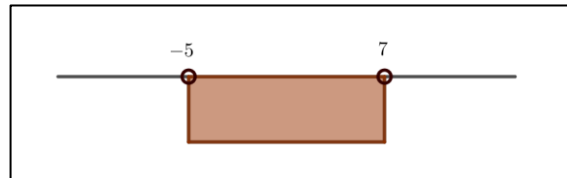
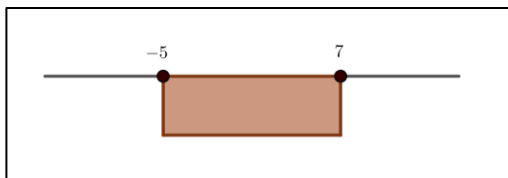
β) Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

18. Δίνεται η ανίσωση  $|2x - 5| < 3$ .

α) Να λύσετε την ανίσωση.

β) Αν ο αριθμός  $\alpha$  είναι μια λύση της ανίσωσης να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:  $A = (\alpha - 1)(\alpha - 5)$ .

19. α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης  $|x - 1| \geq 6$  και στη συνέχεια να βρείτε τη θέση του πραγματικού αριθμού  $x$  πάνω στον άξονα, επιλέγοντας μια από τις παρακάτω αναπαραστάσεις:



β) Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο α) ερώτημα.

20. α) Να λύσετε την ανίσωση  $-\frac{3-2x}{7} \geq 5$ .
- β) Να λύσετε την ανίσωση  $|-x-1| \leq 23$ .
- γ) Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.
21. Δίνεται ο πραγματικός αριθμός  $x$  για τον οποίο ισχύει  $|x-3| < 5$ .
- α) Να δείξετε ότι  $x \in (-2, 8)$ .
- β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του  $x$  για τις οποίες ισχύει  $|x-3| < 5$ .
- γ) Αν  $A$  το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του  $x$  που βρήκατε στο β) ερώτημα και  $B$  το σύνολο με  $B = \{-3, -2, -1, 0, 3, 4\}$ , να παραστήσετε τα σύνολα  $A \cup B$  και  $A \cap B$  με αναγραφή των στοιχείων τους.
22. α) Να λύσετε την ανίσωση  $|x-1| \geq 5$ .
- β) Να βρείτε τους αριθμούς  $x$  που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.
- γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των α) και β).
23. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί  $x$  για τους οποίους ισχύει  $2|x|-2 \leq 0$  (1).
- α) Να δείξετε ότι  $x \in [-1, 1]$ .
- β) Να δείξετε ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν την (1) απέχουν από το  $-3$  απόσταση το πολύ 4.
- γ) Για τους πραγματικούς αριθμούς  $x$  που ικανοποιούν την (1) να γράψετε την παράσταση  $A = |2x-3| - |4-3x|$  χωρίς τις απόλυτες τιμές.
24. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός  $x$  που ικανοποιεί τη σχέση:  $d(x, 5) \leq 9$ .
- α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.
- β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του  $x$ .
- γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος β).
- δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος γ) για να δείξετε ότι:  $|x+4| + |x-14| = 18$ .
25. Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  (1).
- α) Να βρείτε τη διακρίνουσα  $\Delta$  της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- β) Για ποια τιμή του  $\lambda$  η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες;
- γ) Αν  $x_1, x_2$  οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  ισχύει:  $0 < d(x_1, x_2) < 2$ .

26. Μια υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός  $x$ , να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό  $\lambda$  που προκύπτει από τη σχέση:  $\lambda = (2x + 5)^2 - 8x$  (1).
- α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός  $x$  είναι ο  $-5$ , ποιος είναι ο εξαγόμενος αριθμός  $\lambda$ ;
- β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός  $\lambda$  είναι ο  $20$ , ποιος είναι ο εισαγόμενος αριθμός  $x$ ;
- γ) i. Να δείξετε ότι η σχέση (1) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί στη μορφή:  $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$ .
- ii. Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός  $x$ , ο εξαγόμενος αριθμός  $\lambda$  δεν μπορεί να είναι ίσος με  $5$ .
- iii. Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές που μπορεί να έχει ο εξαγόμενος αριθμός  $\lambda$ .
27. Για τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι:  $|\alpha - 2| < 1$  και  $|\beta - 3| \leq 2$ .
- α) Να αποδείξετε ότι  $1 < \alpha < 3$ .
- β) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκεται ο  $\beta$ .
- γ) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της παράστασης  $2\alpha - 3\beta$ .
- δ) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της παράστασης  $\frac{\alpha}{\beta}$ .
28. α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $x$  για τους οποίους ισχύει  $|x - 4| < 2$ .
- β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό  $x$  του οποίου η απόσταση από το  $4$  πάνω στο άξονα των πραγματικών είναι μικρότερη από  $2$ .
- i. Να δείξετε ότι  $3x - 4 > 0$ .
- ii. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού  $x$  από το  $4$  είναι μεγαλύτερη του  $2$  και μικρότερη του  $14$ .
- iii. Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της απόστασης του  $3x$  από το  $19$ .
29. Δύο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα. Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των  $6.500$  ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους, κ.α.). Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι  $15$  ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε  $25$  ευρώ.
- α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος  $K(v)$  της επιχείρησης, εάν γεμίζει  $v$  τόνερ το μήνα.
- β) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει τα μηνιαία έσοδα  $E(v)$  της επιχείρησης από την πώληση  $v$  τόνερ το μήνα.
- γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση
- i. να μην έχει ζημιά.
- ii. να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον  $500$  ευρώ.

30. α) Να λύσετε την ανίσωση:  $|x-1| \leq 3$  (1).
- β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης  $|x-1|$ .
- γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς  $x$  που ικανοποιούν την ανίσωση  $|x-1| \leq 3$ .
- δ) Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς  $x$  που ικανοποιούν την ανίσωση  $||x|-1| \leq 3$ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
31. Δίνονται οι ανισώσεις:  $|x-1| \leq \sqrt{3}$  (1) και  $3 - \frac{x+4}{2} < 0$  (2).
- α) Να λύσετε την ανίσωση (1).
- β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1).
- γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2).
- δ) Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) τότε και ο αριθμός  $\frac{3\alpha + 4\beta}{7}$  είναι επίσης κοινή λύση τους.
32. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - 6x + \lambda = 0$  (1) όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- α) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
- β) Αν δύο πραγματικοί αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο  $\alpha \cdot \beta = \lambda$ , τότε:
- Να δείξετε ότι  $\alpha \cdot \beta \leq 9$ .
  - Να δείξετε ότι  $\alpha \cdot \beta = 9$  αν και μόνο αν  $\alpha = \beta$ .
- γ) Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις  $\alpha, \beta$  και περίμετρο 12, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο.