

## 2.4 Ρίζες πραγματικών αριθμών

1. Δίνονται οι αριθμοί:  $A = (\sqrt{2})^6$  και  $B = (\sqrt[3]{2})^6$ .

α) Να δείξετε ότι:  $A - B = 4$ .

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:  $\sqrt{2}$ ,  $1$ ,  $\sqrt[3]{2}$ .

2. Δίνεται η παράσταση  $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$ .

α) Για ποιες τιμές του  $x$  ορίζεται η παράσταση  $B$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του  $x$  σε μορφή διαστήματος.

β) Για  $x = 4$ , να αποδείξετε ότι:  $B^2 + 6B = B^4$ .

3. Δίνεται η παράσταση  $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$ .

α) Για ποιες τιμές του  $x$  ορίζεται η παράσταση  $A$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του  $x$  σε μορφή διαστήματος.

β) Για  $x = -3$  να αποδείξετε ότι  $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$ .

4. α) Να δείξετε ότι:  $3 < \sqrt[3]{30} < 4$ .

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $\sqrt[3]{30}$  και  $6 - \sqrt[3]{30}$ .

5. Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$$\sqrt{2} \cong 1,41, \sqrt{3} \cong 1,73, \sqrt{5} \cong 2,24, \sqrt{7} \cong 2,64$$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς  $\sqrt{20}$ ,  $\sqrt{45}$  και  $\sqrt{80}$ .

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών, πως θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή

της παράστασης:  $\frac{3 \cdot \sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$ .

6. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:  $A = (\sqrt{2})^6$ ,  $B = (\sqrt[3]{3})^6$ ,  $\Gamma = (\sqrt[6]{6})^6$ .

α) Να αποδείξετε ότι:  $A + B + \Gamma = 23$ .

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:  $\sqrt[3]{3}$  και  $\sqrt[6]{6}$ .

7. Δίνεται η παράσταση  $K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$ .
- α) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός  $x$ , ώστε η παράσταση  $K$  να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.
- β) Αν  $-2 < x < 3$ , να αποδείξετε ότι η παράσταση  $K$  είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του  $x$ .
8. α) Να αποδείξετε ότι  $2 < \sqrt{5}$ .
- β) Να αποδείξετε ότι  $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$ .
- γ) Να αποδείξετε ότι  $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$ .
9. Αν είναι  $A = 2 - \sqrt{3}$ ,  $B = 2 + \sqrt{3}$ , τότε:
- α) Να αποδείξετε ότι  $A \cdot B = 1$ .
- β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $\Pi = A^2 + B^2$ .
10. Αν είναι  $A = \sqrt[3]{5}$ ,  $B = \sqrt{3}$ ,  $\Gamma = \sqrt[6]{5}$ , τότε:
- α) Να αποδείξετε ότι  $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$ .
- β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $A$ ,  $B$ .
11. Δίνονται οι παραστάσεις:  $A = \sqrt{(x-2)^2}$  και  $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$ , όπου  $x$  πραγματικός αριθμός.
- α) Για ποιες τιμές του  $x$  ορίζεται η παράσταση  $A$ ;
- β) Για ποιες τιμές του  $x$  ορίζεται η παράσταση  $B$ ;
- γ) Να δείξετε ότι, για κάθε  $x \leq 2$ , ισχύει  $A = B$ .
12. α) Να αποδείξετε ότι  $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$  και να υπολογίσετε το ανάπτυγμα  $(2 + \sqrt{5})^2$ .
- β) Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών  $9 - 4\sqrt{5}$  και  $9 + 4\sqrt{5}$ .
13. α) Να δείξετε ότι  $(2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$  και  $(1 - \sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5}$ .
- β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι:
- $$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 1 + 2\sqrt{5}.$$
14. Δίνονται οι αριθμοί:  $A = (\sqrt{3})^6$  και  $B = (\sqrt[3]{3})^6$ .
- α) Να δείξετε ότι:  $A - B = 18$ .
- β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt[3]{3}$ .

15. Αν για τον πραγματικό αριθμό  $x$  ισχύει  $|2x| < 2$ , τότε:
- α) Να αποδείξετε ότι  $-1 < x < 1$ .
- β) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in (-1, 1)$ , ισχύει  $x^2 < 1$ .
16. Δίνονται οι αριθμοί  $\alpha = \sqrt{3} - 1$  και  $\beta = \sqrt{3} + 1$ .
- α) Να δείξετε ότι  $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 10$ .
- β) Να δείξετε ότι  $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 5$ .
17. Δίνονται οι αριθμοί  $\alpha = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$  και  $\beta = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$
- α) Να υπολογίσετε το άθροισμα  $\alpha + \beta$  και το γινόμενο  $\alpha \cdot \beta$ .
- β) Να αποδείξετε ότι  $\alpha^2 + \beta^2 = 7$ .
18. Έστω  $\alpha$  ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει  $\alpha = |3\sqrt{2} - 4| + 2|\sqrt{2} - 2|$ .
- α) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = \sqrt{2}$ . (Θεωρήστε ότι  $\sqrt{2} = 1,41$ )
- β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) να αποδείξετε ότι  $\alpha^3 = 2\alpha$ .
- γ) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης  $A = \alpha^3 + (\alpha - 1)^2$ .
19. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$ , με  $\alpha = 1 + \sqrt{2}$  και  $\beta = 1 - \sqrt{2}$ .
- α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $A = \alpha^2 - \beta^2$ .
- β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$ .
- γ) Αν  $A = 4\sqrt{2}$  και  $B = 2$ , να δείξετε ότι  $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$ .