Βασίλης Γατσινάρης

ΑΚΥΚΛΟΦΟΡΗΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

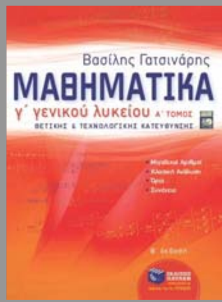
ΠΡΟΛΟΓΟΣ

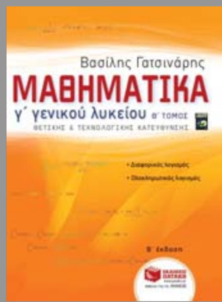
Πρώτα, θέλουμε να σας ευχαριστήσουμε
που στηρίζετε τα μαθηματικά των εκδόσεων μας.

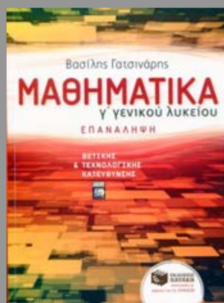
Έχουμε ολοκληρώσει **και τη Δεύτερη έκδοση**
όλης της σειράς των **Μαθηματικών Γ' Λυκείου**
για τη θετική και τεχνολογική κατεύθυνση
όπως επίσης και για το μάθημα **γενικής παιδείας**
του συγγραφέα μας **Βασίλη Γατσινάρη**.

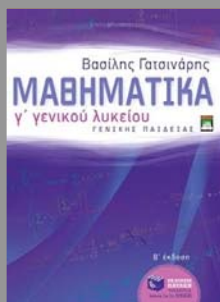
Σήμερα
σας παρέχουμε σε **αποκλειστικότητα**
13 πρωτότυπα ακυκλοφόρητα λυμένα θέματα
(και 1 θέμα από το επαναληπτικό βιβλίο της κατεύθυνσης)
με αυξημένο βαθμό δυσκολίας
για την καλύτερη προειτοιμασία σας
για τις **Πανελλαδικές εξετάσεις του 2014**

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ









Θ.**1**● Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$

Α$_1$) Να αποδείξετε την ισοδυναμία: $Re(z) \geq 1 \Leftrightarrow |z-3| \leq |z+1|$

Α$_2$) Να αποδείξετε ότι $e^t - t \geq 1$, για κάθε πραγματικό αριθμό t

Β) Θεωρούμε τώρα το μιγαδικό αριθμό $w = (e^t - t) + ie^t$, $t \in R$

και τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + |w-3|\,x^2 + |w+1|^2\,x + 5$, $x \in R$

Β$_1$) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f **δεν** παρουσιάζει **ακρότατα**.

Β$_2$) Αν τώρα είναι και $|w-3| = 0{,}5$, να αποδείξετε ότι η f έχει **μοναδική ρίζα** r η οποία μάλιστα είναι και **αρνητική** και για την οποία είναι $2r^3 + 3r^2 + 30 > 0$

Απάντηση

Α$_1$) $|z-3| \leq |z+1| \Leftrightarrow |x+yi-3| \leq |x+1+yi|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} \leq \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1 \qquad \Leftrightarrow Re(z) \geq 1$$

Α$_2$) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(t) = e^t - t - 1$ με $\varphi'(t) = e^t - 1$

Η φ στο σημείο 0 παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και άρα $\varphi(t) \geq \varphi(0)$ ή $e^t - t \geq 1$

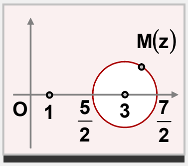
Β$_1$) Επειδή $Re(z) \geq 1$, είναι $|w-3| \leq |w+1|$

Έστω τώρα η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + |w-3|x^2 + |w+1|^2 x + 5$

$$f'(x) = x^2 + 2|w-3|x + |w+1|^2$$

Επειδή $\Delta = 4|w-3| - 4|w+1|^2 = 4\left(|w-3| + |w+1|\right)\left(|w-3| - |w+1|\right) \leq 0$

η f **δεν** έχει **ακρότατα**, αφού η f **δεν** αλλάζει **μονοτονία**.



Β$_2$)Επειδή $|w-3| = 0{,}5$, οι $M(w) \in (c): (x-3)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Είναι $|w-3| \neq |w+1|$

γιατί αν υποθέσουμε ότι $|w-3| = |w+1|$ καταλήγουμε ότι $x = 1$ **Άτοπο**

Οπότε $\Delta < 0$ και η f είναι **γνήσια αύξουσα** και επειδή $f(0) = 5$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

η f έχει **μία ακριβώς ρίζα** r, η οποία μάλιστα είναι και αρνητική **αρνητική.**

$$f(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}r^3 + |w-3|r^2 + |w+1|^2 r + 5 = 0 \Leftrightarrow 2r^3 + 3r^2 + 30 = -6r|w+1|^2 > 0$$

Θ.**2**● Έστω η ορισμένη και συνεχής στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$

Είναι $\kappa\int_0^x f(t)dt - f(x) = (\kappa-1)e^x - 1$ και $f(x)+\kappa f'(x) = (\kappa+1)e^x + \lambda$, $x \in \mathbf{R}$

με $|\kappa| + |\lambda| \neq 0$

Να αποδείξετε ότι **ή** $f(x) = e^x$ **ή** $f(x) = e^x + 1$

Απάντηση

Από $\kappa\int_0^x f(t)dt - f(x) = (\kappa-1)e^x - 1$, είναι και $\kappa f(x) - f'(x) = (\kappa-1)e^x$

Επίσης είναι $f(x)+\kappa f'(x) = (\kappa+1)e^x + \lambda$

Ας λύσουμε το πιο πάνω σύστημα.

$$D = \begin{vmatrix} \kappa & -1 \\ 1 & \kappa \end{vmatrix} = \kappa^2 + 1 \neq 0$$

$$D_{f(x)} = \begin{vmatrix} (\kappa-1)e^x & -1 \\ (\kappa+1)e^x + \lambda & \kappa \end{vmatrix} = (\kappa^2-\kappa)e^x + (\kappa+1)e^x + \lambda = (\kappa^2+1)e^x + \lambda$$

$$D_{f'(x)} = \begin{vmatrix} \kappa & (\kappa-1)e^x \\ 1 & (\kappa+1)e^x + \lambda \end{vmatrix} = (\kappa^2+\kappa)e^x + \kappa\lambda - (\kappa-1)e^x = (\kappa^2+1)e^x + \kappa\lambda$$

Οπότε, υπάρχουν μοναδικές συναρτήσεις f και f' (Φυσικά, εξαρτώμενες)

και μάλιστα είναι $f(x) = \dfrac{D_{f(x)}}{D} = e^x + \dfrac{\lambda}{\kappa^2+1}$ και έτσι αυτή δίνει ή $f'(x) = e^x$

και $f'(x) = \dfrac{D_{f'(x)}}{D} = e^x + \dfrac{\kappa\lambda}{\kappa^2+1}$

Οπότε, πρέπει $\kappa\lambda = 0$ και τότε **ή μόνο $\lambda = 0$ και έτσι** $f(x) = e^x$

ή μόνο $\kappa = 0$ και έτσι $f(x) = e^x + \lambda$

και τότε από $\kappa\int_0^x f(t)dt - f(x) = (\kappa-1)e^x - 1$

για $x = 0$ προκύπτει $-f(0) = -1-1$ ή $f(0) = 2$

και τότε από $f(x) = e^x + \lambda$

για $x = 0$ προκύπτει $f(0) = 1 + \lambda$ ή $\lambda = 1$

και άρα $f(x) = e^x + 1$

Θ.**3**● Έστω η ορισμένη στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, με $\mathbf{f(0) = f'(0) = 1}$

Ξέρουμε επίσης ότι $\int_0^x f(t)\,dt = f''(x) - 1$, για κάθε $x \in R$

A) Να αποδείξετε ότι $f(x) + f'(x) + f''(x) = 3e^x$, $x \in R$

B) Έστω επίσης $\int_0^x f(t)\,dt + f(x) = 2e^x + \kappa x^2 - \lambda$, $2\int_0^x f(t)\,dt + f'(x) = 3\lambda e^x + \mu$

Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x$

Απάντηση

A) Από $\int_0^x f(t)\,dt = f''(x) - 1$, προκύπτει $f''(0) = 0$

Από $\int_0^x f(t)\,dt = f''(x) - 1$, είναι και $f(x) = f'''(x)$, για κάθε $x \in R$

Οπότε και $f(x) + f'(x) + f''(x) = f'''(x) + f'(x) + f''(x)$

ή $f(x) + f'(x) + f''(x) = \left(f(x) + f'(x) + f''(x)\right)'$, $x \in R$

Δηλαδή $f(x) + f'(x) + f''(x) = ce^x$, $x \in R$

B) Επειδή $f(0) + f'(0) + f''(0) = c \Leftrightarrow c = 3$, προκύπτει $f(x) + f'(x) + f''(x) = 3e^x$

Από $\int_0^x f(t)\,dt + f(x) = 2e^x + \kappa x^2 - \lambda$, προκύπτει $\int_0^0 f(t)\,dt + f(0) = 2 - \lambda$ ή $\lambda = 1$

και $2\int_0^x f(t)\,dt + f'(x) = 3\lambda e^x + \mu$, προκύπτει $2\int_0^0 f(t)\,dt + f'(0) = 3\lambda + \mu$ ή $\mu = -2$

Επίσης

παραγωγίζοντας προκύπτει $f(x) + f'(x) = 2e^x + 2\kappa x$ ή $f'(x) = 2e^x + 2\kappa x - f(x)$

και $2f(x) + f''(x) = 3e^x$ ή $f''(x) = 3e^x - 2f(x)$

Οπότε, η σχέση $f(x) + f'(x) + f''(x) = 3e^x$

γίνεται $f(x) + 2e^x + 2\kappa x - f(x) + 3e^x - 2f(x) = 3e^x$

ή $f(x) = e^x + \kappa x$

Τότε, προφανώς προκύπτει $f'(x) = e^x + \kappa$ και από $f'(0) = 1 + \kappa$ είναι $\kappa = 0$

Οπότε $f(x) = e^x$, $x \in R$

Θ.**4**● Έστω ότι **υπάρχει παραγωγίσιμη** στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$

Γνωρίζουμε ότι $2f'(x)f^3(x) - 2f'(x) = 2x^3 - 6ax^2 + 5x - 2$, $x \in R$ και $f(1) = 1$

Α) Να **μελετήσετε** πρώτα την $\varphi(x) = x^4 - 4x + 3$ ως προς τα **ακρότατα**.

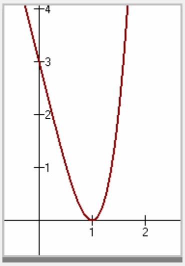
Β$_1$) Να αποδείξετε ότι $f^4(x) - 4f(x) + 3 = x^4 - 4ax^3 + 5x^2 - 4x + 4a - 2$

Β$_2$) Να αποδείξετε ότι $a = \dfrac{5}{6}$

Β$_3$) Να αποδείξετε ότι $f^4(x) - 4f(x) + 3 = (x-1)^2\left(x^2 - \dfrac{4}{3}x + \dfrac{4}{3}\right)$, $x \in R$

Γ$_1$) Να αποδείξετε ότι $f(0) > 0$

Απάντηση



Α) Είναι $\varphi'(x) = 4x^3 - 4$, με γραφική παράσταση τη διπλανή.

Β$_1$) Από $2f'(x)f^3(x) - 4f'(x) = 4x^3 - 12ax^2 + 10x - 4$

είναι $\left(f^4(x) - 4f(x)\right)' = \left(x^4 - 4ax^2 + 5x^2 - 4x\right)'$

και ισοδύναμα είναι $f^4(x) - 4f(x) = x^4 - 4ax^2 + 5x^2 - 4x + c$

Για $x = 1$, είναι $f^4(1) - 4f(1) = 1 - 4a + 5 - 4 + c \Leftrightarrow -3 = 1 - 4a + 5 - 4 + c$

$\Leftrightarrow 4a - 5 = c$

Άρα $f^4(x) - 4f(x) = x^4 - 4ax^3 + 5x^2 - 4x + 4a - 5$

και ισοδύναμα $f^4(x) - 4f(x) = x^4 - 4ax^3 + 5x^2 - 4x + 4a - 2$

Β$_2$) Έστω η συνάρτηση $h(x)=\varphi(x)\geq 0$

Είναι $h(x)\geq 0=h(1)$, για κάθε $x\in R$

Σύμφωνα με το **θ. Fermat** είναι $h'(1)=0 \iff 4-12a+10-4=0 \iff a=\dfrac{5}{6}$

Β$_3$) Έστω η συνάρτηση $h(x)=x^4-\dfrac{1}{3}x^3+5x^2-4x+\dfrac{4}{3}$

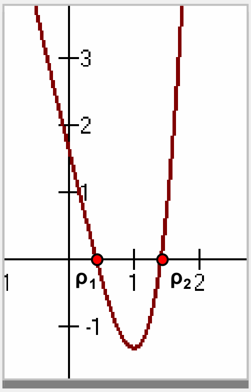
με $h'(x)=4x^3-12ax^2+10x-4$

$$\text{Είναι }\; f^4(x)-4f(x)+3 = x^4-\frac{10}{3}x^3+5x^2-4x+\frac{4}{3}$$

$$=(x-1)\left(x^3-\frac{7}{3}x^2+\frac{8}{3}x-\frac{4}{3}\right)$$

$$=(x-1)^2(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$$

Γ$_1$) Για $x=0$, είναι $f^4(0)-4f(0)+3=\dfrac{4}{3} \iff f^4(0)-4f(0)+\dfrac{5}{3}=0 \iff g\big(f(0)\big)=0$



Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^4-4x+\dfrac{5}{3}$

Είναι $g'(x)=4x^3-4$

Προκύπτει πολύ απλά η διπλανή γραφική παράσταση.

Οπότε, η συνάρτηση g έχει 2 ρίζες, έστω τις $\rho_1<1<\rho_2$

Από $g\big(f(0)\big)=0$, προκύπτει πού απλά ότι $f(0)=\rho_1$ ή $f(0)=\rho_2$ και τελικά $f(0)>0$

Θ.**5**● Έστω οι **ορισμένες** και **συνεχείς** στο $\mathbf{R}$ συναρτήσεις $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$

ώστε $x\int_0^1 f(x)dx + \int_0^x g(t)\,dt = x + x^2$, $x\int_0^1 g(x)dx - \int_0^x f(t)\,dt = x - x^2$, $x \in R$

Να **αποδείξετε** ότι $f(x) = g(x) = 2x$

Απάντηση

Από $x\int_0^1 f(x)dx + \int_0^x g(t)\,dt = x + x^2$

για $x = 1$ προκύπτει $\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(t)\,dt = 2$

Από $x\int_0^1 g(x)dx - \int_0^x f(t)\,dt = x - x^2$, $x \in R$

για $x = 1$ προκύπτει $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f(t)\,dt$

Οπότε από $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f(x)\,dx$ και $\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)\,dx = 2$

λύνοντας το σύστημα, προκύπτει $\int_0^1 f(x)dx = 1$ και $\int_0^1 g(x)dx = 1$

Η σχέση $x\int_0^1 f(x)dx + \int_0^x g(t)\,dt = x + x^2$

δίνει $\int_0^x g(t)\,dt = x^2$ και παραγωγίζοντας τελικά παίρνουμε $g(x) = 2x$

Η σχέση $x\int_0^1 g(x)dx - \int_0^x f(t)\,dt = x - x^2$

δίνει $\int_0^x f(t)\,dt = x^2$ και παραγωγίζοντας τελικά παίρνουμε $f(x) = 2x$

Θ.**6**● Έστω οι **ορισμένες** και **συνεχείς** στο **R** συναρτήσεις **f** και **g**

ώστε $f(x) = 2x\int_0^1 g(x)dx \int_0^1 f(x)\,dx$, $x \in R$ και $f(1) = 2$

Να **αποδείξετε** ότι $f(x) = 2x$

Απάντηση

Από $f(x) = 2x\int_0^1 g(x)dx \int_0^1 f(x)\,dx$

για $x = 1$ παίρνουμε $2 = f(1) = 2\int_0^1 g(x)dx \int_0^1 f(x)\,dx \neq 0$

και συνεπώς $\int_0^1 g(x)dx \neq 0$ και $\int_0^1 f(x)dx \neq 0$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση $f(x) = 2x\int_0^1 g(x)dx \int_0^1 f(x)\,dx$

παίρνουμε $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(2x\int_0^1 g(x)dx \int_0^1 f(x)\,dx\right)dx$

ή $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx \int_0^1 f(x)\,dx \int_0^1 (2x)\,dx$

ή $1 = \int_0^1 g(x)dx \left[x^2\right]_0^1$

ή $\int_0^1 g(x)dx = 1$

Οπότε $f(x) = 2x\int_0^1 f(x)\,dx$

Για $x = 1$ προκύπτει $f(1) = 2\int_0^1 f(x)\,dx$ ή $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$

Οπότε, τελικά διαπιστώνουμε ότι $f(x) = 2x$

Θ.**7**● Έστω οι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο R_+ συναρτήσεις f,g

ώστε $\int_0^x g(t)\,dt - x^2 f'(x) = 2xf(x) - xg(x)$, $x \ge 0$ και $g(0)=0$, $g'(0)=0$

Α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^x g(t)\,dt}{x} & \text{αν} \quad x>0 \\ 0 & \text{αν} \quad x=0 \end{cases}$

Β) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)-f(x)}{x} & \text{αν} \quad x>0 \\ 0 & \text{αν} \quad x=0 \end{cases}$

Έστω τώρα ότι $g(1) > f(1)$ και οι γραφικές παραστάσεις των f,g **δεν τέμνονται.**

Γ$_1$) Να αποδείξετε ότι η f είναι **γνήσια αύξουσα** στο $(0,+\infty)$

Γ$_2$) Να αποδείξετε ότι $2\int_0^1 g(x)\,dx < \int_0^2 g(x)\,dx$

Απάντηση

Α) Από $\int_0^x g(t)\,dt - x^2 f'(x) = 2xf(x) - xg(x)$

είναι $\int_0^x g(t)\,dt + xg(x) = x^2 f'(x) + 2xf(x)$ ή $\left(x\int_0^x g(t)\,dt\right)' = \left(x^2 f(x)\right)'$

Οπότε είναι $x\int_0^x g(t)\,dt = x^2 f(x) + c$ και για $x=0$ προκύπτει $c=0$

και άρα $x\int_0^x g(t)\,dt = x^2 f(x)$ ή $\int_0^x g(t)\,dt = xf(x)$ ή $f(x) = \dfrac{\int_0^x g(t)\,dt}{x}$, $x>0$

Επίσης, είναι $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\int_0^x g(t)\,dt}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{g(x)}{1}\right) = g(0) = 0$

Δηλαδή $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^x g(t)\,dt}{x} & \text{αν} \quad x > 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$

Β) Αν $x > 0$

είναι $f'(x) = \left(\dfrac{\int_0^x g(t)\,dt}{x} \right)' = \dfrac{xg(x) - \int_0^x g(t)\,dt}{x^2} = \dfrac{xg(x) - xf(x)}{x^2} = \dfrac{g(x) - f(x)}{x}$

Επίσης, είναι $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\int_0^x g(t)\,dt}{x^2} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{g(x)}{2x} \right) = \dfrac{1}{2} g'(0) = 0$

Οπότε $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - f(x)}{x} & \text{αν} \quad x > 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$

Γ$_1$) Αφού $h(x) = g(x) - f(x) \neq 0$ και η h είναι **συνεχής** και $h(1) = g(1) - f(1) > 0$

είναι $h(x) > 0$ και άρα $f'(x) > 0$

Δηλαδή, η συνάρτηση f είναι **γνήσια αύξουσα** στο διάστημα $(0,+\infty)$

Γ$_2$) Από $1 < 2$ είναι και $f(1) < f(2)$

ή $\dfrac{\int_0^1 g(t)\,dt}{1} < \dfrac{\int_0^2 g(t)\,dt}{2}$

ή $2\int_0^1 g(x)\,dx < \int_0^2 g(x)\,dx$

Θ.8● Έστω οι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}_+$ συναρτήσεις **f** και **g**

Γνωρίζουμε ότι $f(x)\int_0^x g(t)\,dt + 2g(x)\int_0^x f(t)\,dt = 3e^{2x} - 3e^x + f(0) - 1,\ x \geq 0$

και $3f(x)\int_0^x g(t)\,dt + g(x)\int_0^x f(t)\,dt = 4e^{2x} - 4e^x + g(0) - 1,\ x \geq 0$

Α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = g(0) = 1$

Β) Να αποδείξετε ότι $f(x)\int_0^x g(t)\,dt = g(x)\int_0^x f(t)\,dt = e^{2x} - e^x,\ x \geq 0$

Γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$, για κάθε $x > 0$

Δ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = g(x) = e^x,\ x \geq 0$

Απάντηση

Α) Αν στη σχέση $f(x)\int_0^x g(t)\,dt + 2g(x)\int_0^x f(t)\,dt = 3e^{2x} - 3e^x + f(0) - 1$

βάλουμε όπου $x = 0$ προκύπτει $f(0) = 1$

και άρα $f(x)\int_0^x g(t)\,dt + 2g(x)\int_0^x f(t)\,dt = 3e^{2x} - 3e^x,\ x \geq 0$

Αν στη σχέση $3f(x)\int_0^x g(t)\,dt + g(x)\int_0^x f(t)\,dt = 4e^{2x} - 4e^x + g(0) - 1$

βάλουμε όπου $x = 0$ προκύπτει $g(0) = 1$

και άρα $3f(x)\int_0^x g(t)\,dt + g(x)\int_0^x f(t)\,dt = 4e^{2x} - 4e^x,\ x \geq 0$

Β) Από $3f(x)\int_0^x g(t)\,dt + g(x)\int_0^x f(t)\,dt = 4e^{2x} - 4e^x$

είναι και $6f(x)\int_0^x g(t)\,dt + 2g(x)\int_0^x f(t)\,dt = 8e^{2x} - 8e^x$

και από $f(x)\int_0^x g(t)\,dt + 2g(x)\int_0^x f(t)\,dt = 3e^{2x} - 3e^x$

αφαιρώντας παίρνουμε $5f(x)\int_0^x g(t)\,dt = 5e^{2x} - 5e^x$ ή $f(x)\int_0^x g(t)\,dt = e^{2x} - e^x$

Εντελώς ανάλογα προκύπτει και ότι $g(x)\int_0^x f(t)\,dt = e^{2x} - e^x$

Γ) Επειδή $e^{2x}-e^{x}=0$ μόνο αν $e^{2x}=e^{x} \Leftrightarrow 2x=x \Leftrightarrow x=0$

είναι προφανές ότι αν $f(x)\int_0^x g(t)\,dt=e^{2x}-e^{x}\neq 0$, για κάθε $x>0$

και άρα $f(x)\neq 0$, για κάθε $x>0$ και επειδή η f είναι συνεχής με $f(0)=1$

είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$ και συνεπώς $\int_0^x f(t)dt>0$, για κάθε $x>0$

Εντελώς ανάλογα προκύπτει

ότι $g(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$ και συνεπώς $\int_0^x f(t)dt>0$, για κάθε $x>0$

Δ) Οπότε, από $f(x)\int_0^x g(t)\,dt=e^{2x}-e^{x}$ και $g(x)\int_0^x f(t)\,dt=e^{2x}-e^{x}$

προκύπτει $f(x)\int_0^x g(t)\,dt=g(x)\int_0^x f(t)\,dt$ ή $\dfrac{f(x)}{\int_0^x f(t)\,dt}=\dfrac{g(x)}{\int_0^x g(t)\,dt}$, $x>0$

Οπότε και $\ln\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)'=\ln\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)'$

είναι $\ln\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)=\ln\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)+c$ ή $\ln\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)=\ln\left(e^{c}\int_0^x g(t)\,dt\right)$

ή $\int_0^x f(t)\,dt=e^{c}\int_0^x g(t)\,dt$

Παραγωγίζοντας προκύπτει $f(x)=e^{c}g(x)$, $x>0$

Οπότε και $\lim\limits_{x\to 0}(f(x))=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{c}g(x)\right)$ ή $f(0)=e^{c}g(0)$ ή $1=e^{c}$ και άρα $f(x)=g(x)$

Έτσι η σχέση $f(x)\int_0^x g(t)\,dt=e^{2x}-e^{x}$ γίνεται $2f(x)\int_0^x f(t)\,dt=2e^{2x}-2e^{x}$

ή $\left(\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2\right)'=\left(e^{2x}-2e^{x}\right)'$ ή $\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2=e^{2x}-2e^{x}+c$

Για $x=0$ προκύπτει $c=1$ και άρα $\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2=\left(e^{x}\right)^2-2e^{x}+1=\left(e^{x}-1\right)^2$

Οπότε και $\int_0^x f(t)\,dt=e^{x}-1$, αφού $f(x)>0$ και παραγωγίζοντας $f(x)=e^{x}$

Τελικά, προκύπτει και $g(x)=e^{x}$

Θ.**9**● Έστω η **παραγωγίσιμη** στο $\mathbf{R_+}$ και **γνήσια μονότονη** συνάρτηση $\mathbf{f}$

με το ίδιο **είδος μονοτονίας** και $\mathbf{f(f(x)) = \int_0^m f(t)\,dt\, x^{10} + x^9 + mx}$, $\mathbf{x \ge 0}$, $\mathbf{m \in R}$

A) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{\int_0^m f(t)\,dt = 0}$

Γνωρίζουμε τώρα, ότι **υπάρχει** αριθμός $\mathbf{\rho}$, ώστε $\mathbf{(f'(\rho))^9 = 1 - f'(\rho)}$

B$_1$) Να αποδείξετε ότι η $\mathbf{f}$ είναι **γνήσια αύξουσα**.

B$_2$) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(0) = 0}$

B$_3$) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(f(x)) = x^9}$

B$_4$) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f'(0) = 0}$

Απάντηση

Αφού η $\mathbf{f}$ είναι **γνήσια μονότονη** με το ίδιο **είδος μονοτονίας** και παραγωγίσιμη

ή θα είναι **γνήσια αύξουσα** και $\mathbf{f'(x) \ge 0}$

ή θα είναι **γνήσια φθίνουσα** και $\mathbf{f'(x) \le 0}$

Από $\mathbf{f(f(x)) = \int_0^m f(t)\,dt\, x^{10} + x^9 + mx}$, είναι $\mathbf{f'(f(x))f'(x) = 10\int_0^m f(t)\,dt\, x^9 + 9x^8 + m}$

Επειδή $\mathbf{f'(f(x))f'(x) \ge 0}$ είναι και $\mathbf{10\int_0^m f(t)\,dt\, x^9 + 9x^8 + m \ge 0}$, για κάθε $\mathbf{x \in R}$

αν ήταν $\mathbf{\int_0^m f(t)\,dt > 0}$, τότε και $\mathbf{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(10\int_0^m f(t)\,dt\, x^9 + 9x^8 + m\right) \ge 0}$

ή $\mathbf{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(10\int_0^m f(t)\,dt\, x^9\right) \ge 0}$ ή $\mathbf{-\infty \ge 0}$ **Άτοπο**

ενώ

αν ήταν $\mathbf{\int_0^m f(t)\,dt < 0}$, τότε και $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(10\int_0^m f(t)\,dt\, x^9 + 9x^8 + m\right) \ge 0}$

ή $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(10\int_0^m f(t)\,dt\, x^9\right) \ge 0}$ ή $\mathbf{-\infty \ge 0}$ **Άτοπο**

Οπότε, είναι $\int_0^m f(t)\,dt = 0$ και φυσικά $f(f(x)) = x^9 + mx$

B$_1$) Αφού **υπάρχει** αριθμός ρ, ώστε $(f'(\rho))^9 = 1 - f'(\rho)$ ή $(f'(\rho))^9 + f'(\rho) - 1 = 0$

θεωρώντας την $f(x) = x^9 + x - 1$, διαπιστώνουμε ότι έχει μοναδική ρίζα r

η οποία μάλιστα βρίσκεται στο διάστημα $(0,1)$ και συνεπώς $0 < r = f'(\rho) < 1$

Οπότε, είναι $f'(x) \geq 0$ και συνεπώς η συνάρτηση f θα είναι **γνήσια αύξουσα**.

B$_2$) Από $f(f(x)) = x^9 + mx$, αν ήταν $f(0) < 0$, θα ήταν $f(f(0)) < f(0)$ ή $0 < f(0)$

Άτοπο

αν ήταν $f(0) > 0$, θα ήταν $f(f(0)) > f(0)$ ή $0 > f(0)$

Άτοπο

Οπότε $f(0) = 0$

B$_3$) Αν $m > 0$, αφού η f είναι γνήσια αύξουσα, από $x > 0$ είναι και $f(x) > f(0) = 0$

και άρα $\int_0^m f(x)\,dx > 0$ **Άτοπο**

Αν $m < 0$, αφού η f είναι γνήσια αύξουσα, από $x > 0$ είναι και $f(x) > f(0) = 0$

και άρα $\int_0^m f(x)\,dx < 0$ **Άτοπο**

Άρα $m = 0$ και έτσι τελικά θα είναι και $f(f(x)) = x^9$

B$_4$) Από $f(f(x)) = x^9$, είναι και $f'(f(x))f'(x) = 9x^8$, $x \in R$

Οπότε και $f'(f(0))f'(0) = 0$ ή $(f'(0))^2 = 0$ ή $f'(0) = 0$

Θ.**10**● Έστω η ορισμένη στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$

ώστε $f(x)=e^x-(2m+1)x+x^2+m^2-m$, $x\in R$

και $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{hf(x)}\right)=\dfrac{2e^x-2}{e^x-x}$ και $0\le m<1$

Α) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$

Β) Να αποδείξετε ότι $\ln(f(x))=\ln(e^x-x)+\ln(m^2-m+1)$

Γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x-x$

Απάντηση

Α) $f(x)=e^x-(2m+1)x+x^2+m^2-m=(e^x-x-m)+(x+m)^2>0$

αφού $(x+m)^2\ge 0$

και η $\varphi(x)=e^x-x-m$ έχει ολικό ελάχιστο το $\varphi(0)=1-m>0$

αφού $\varphi'(x)=e^x-1$

Β) $\dfrac{2e^x-2}{e^x-x}=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{hf(x)}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{(f(x+h)-f(x-h))'}{(hf(x))'}\right)$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f'(x+h)+f'(x-h)}{f(x)}\right)=\frac{2f'(x)}{f(x)}$$

Οπότε $\dfrac{2f'(x)}{f(x)}=\dfrac{2e^x-2}{e^x-x}$ και ισοδύναμα $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$

Οπότε $(\ln(f(x)))'=(\ln(e^x-x))'$ και άρα $\ln(f(x))=\ln(e^x-x)+c$

Για $x=0$, έχουμε $\ln(f(0))=\ln 1+c$ και συνεπώς είναι $c=\ln(m^2-m+1)$

Για $x = 0$, έχουμε $\ln(f(0)) = \ln 1 + c$ και συνεπώς είναι $c = \ln\left(m^2 - m + 1\right)$

Οπότε $\ln(f(x)) = \ln\left(e^x - x\right) + \ln\left(m^2 - m + 1\right)$

Γ) Άρα $\ln\left(e^x - (2m+1)x + x^2 + m^2 - m\right) = \ln\left(e^x - x\right) + \ln\left(m^2 - m + 1\right)$

ή $\ln\left(e^x - (2m+1)x + x^2 + m^2 - m\right) = \ln\left(\left(m^2 - m + 1\right)e^x - \left(m^2 - m + 1\right)x\right)$

ή $e^x - (2m+1)x + x^2 + m^2 - m = \left(m^2 - m + 1\right)e^x - \left(m^2 - m + 1\right)x$

ή $e^x - (2m+1)x + x^2 + m^2 - m = \left(m^2 - m + 1\right)e^x - \left(m^2 - m + 1\right)x$

ή $\left(m^2 - m\right)e^x - x^2 - \left(m^2 - 3m\right)x + m - m^2 = 0$

Οπότε, αν $m > 0$

είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left(m^2 - m\right)e^x - x^2 - \left(m^2 - 3m\right)x + m - m^2\right) = 0$

ή $\left(m^2 - m\right)\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\right) - \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2 + \left(m^2 - 3m\right)x + m^2 - m\right) = 0$

ή $0 - \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\right) = 0$

ή $-\infty = 0$ **Άτοπο**

Οπότε $m = 0$

Δηλαδή $\ln(f(x)) = \ln\left(e^x - x\right)$

και ισοδύναμα $f(x) = e^x - x$

Θ.**11**● **Α**) Αν $F_1(x)+F_1'(x)=F_2(x)+F_2'(x)$, για κάθε $x \in R$ και $F_1(0)=F_2(0)$

να αποδείξετε ότι $F_1(x)=F_2(x)$, $x \in R$

Β) Να αποδείξετε ότι $\int_0^x \left(t^2e^t\right)dt = x^2e^x+2e^x-2xe^x-2$, $x \in R$

Γ) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$

ώστε $\int_0^x f(t)dt + f(x) = 2x^2e^x+2e^x-2xe^x-2$, $x \in R$

Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2e^x$, $x \in R$

Απάντηση

Α) Από $F_1(x)+F_1'(x)=F_2(x)+F_2'(x)$

έχουμε και $e^xF_1(x)+e^xF_1'(x)=e^xF_2(x)+e^xF_2'(x)$

ή $\left(e^xF_1(x)\right)' = \left(e^xF_2(x)\right)'$

Οπότε $e^xF_1(x)=e^xF_2(x)+c$

Για $x=0$, είναι $c=0$ και συνεπώς είναι $e^xF_1(x)=e^xF_2(x)$ ή $F_1(x)=F_2(x)$

Β) Έχουμε $\int_0^x \left(t^2e^t\right)dt = \int_0^x t^2(e^t)'\,dt$

$$= \left[t^2e^t\right]_0^x - 2\int_0^x t^2(e^t)'\,dt$$

$$= x^2e^x - 2\left[te^t\right]_0^x + 2\int_0^x e^t\,dt$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2\left[e^t\right]_0^x \qquad = x^2e^x+2e^x-2xe^x-2$$

Γ) Είναι $\int_0^x f(t)dt + f(x) = 2x^2e^x+2e^x-2xe^x-2$

Από $\int_0^x f(t)dt + f(x) = x^2e^x + \int_0^x t^2e^tdt$ και $F_1(x)+F_1'(x)=F_2(x)+F_2'(x)$

Θεωρήσαμε, ως $F_1(x)=\int_0^x f(t)dt$ με $F_1(0)=0$, $F_2(x)=\int_0^x t^2e^tdt$ με $F_2(0)=0$

Οπότε $F_1(x)=F_2(x)$ και άρα $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x t^2e^tdt$ ή τελικά $f(x)=x^2e^x$

Θ.**12**● Έστω η **συνεχής** στο **R** συνάρτηση **f**, με $f(x) > 0$

Α) Να **λύσετε** την εξίσωση $\int_{2-x}^{x^5} f(t)dt = 0$

Β) Να **λύσετε** την εξίσωση $\int_{2-x}^{x^5} \left(t^5 (e^t - 1)\right)dt = 2 - x - x^2$

Απάντηση

Α) Είναι $\int_{2-x}^{x^5} f(t)dt = \int_0^{x^5} f(t)\,dt - \int_0^{2-x} f(t)dt$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_0^{x^5} f(t)\,dt - \int_0^{2-x} f(t)dt$

Είναι $F'(x) = 5x^4 f(x^5) + f(2-x) > 0$

Οπότε, η συνάρτηση **F** είναι **γνήσια αύξουσα**.

Έτσι $\int_{2-x}^{x^5} f(t)dt = 0 \Leftrightarrow F(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) = F(1) \Leftrightarrow x = 1$

Α) Είναι $\int_{2-x}^{x^5} \left(t^5 (e^t - 1)\right)dt = 2 - x - x^2$

$$\Leftrightarrow \int_{2-x}^{x^5} \left(t^5 (e^t - 1)\right)dt = -\int_{2-x}^{x^5} 1\,dt$$

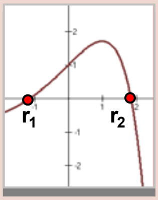
$$\Leftrightarrow \int_{2-x}^{x^5} \left(t^5 (e^t - 1) + 1\right)dt = 0$$

Θεωρούμε ως $F(x) = x^5 (e^x - 1) + 1$

Είναι προφανές ότι $F(x)$

Συνεπώς η εξίσωση $\int_{2-x}^{x^5} \left(t^5 (e^t - 1)\right)dt = 2 - x - x^2$ γράφεται $F(x) = 0 = F(1)$

και τελικά $x = 1$

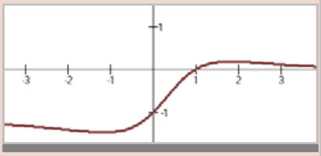


Θ.**13**● Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x-1}{e^x - x}$, $x \in R$

Έστω και η συνάρτηση $\varphi(x) = 2e^x - xe^x - 1$

Α) Να αποδείξετε ότι αυτή έχει **δύο ακριβώς ρίζες**, έστω τις $r_1 < r_2$

Β) Να αποδείξετε το **εμβαδόν Ε** του χωρίου που περικλείεται από το διάγραμμα της φ και τον $x'x$ είναι ίσο με $E = r_1 - e^{r_1} - r_2 + e^{r_2}$ τ.μ.



Γ$_1$) Να βρείτε την παράγωγο f'

Γ$_2$) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει **ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα**.

Απάντηση

Α) Από $\varphi(x) = 2e^x - xe^x - 1$

Έχουμε $\varphi'(x) = 2e^x - e^x - xe^x = e^x - xe^x = e^x(1-x)$

Έστω $\Delta_1 = (-\infty, 1]$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2e^x - xe^x - 1) = -1 - \lim\limits_{x\to-\infty} (xe^x) = -1 - \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x)'}{(e^{-x})'}$

$$= -1 - \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = -1$$

και $\varphi(1) = e - 1$

είναι $\varphi(\Delta_1) = (\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x), \varphi(1)] = (-1, e-1]$

Άρα, υπάρχει $r_1 < 1$, ώστε να είναι $\varphi(r_1) = 0$

Έστω $\Delta_2 = (1, +\infty)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2e^x - xe^x - 1) = -1 + \lim\limits_{x\to+\infty} e^x(2-x) = -\infty$

και $\lim\limits_{x\to1} \varphi(x) = e - 1$

είναι $\varphi(\Delta_2) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x), \lim\limits_{x\to1} \varphi(x)\right) = (-\infty, e-1)$

Άρα υπάρχει $1 < r_2$ και άρα $\varphi(r_2) = 0$

B) Αν $r_1 < x < 1$, είναι $\varphi(r_1) < \varphi(x)$ ή $\varphi(x) > 0$

Αν $1 < x < r_2$, είναι $\varphi(x) > \varphi(r_2)$ ή $\varphi(x) > 0$

Άρα $\varphi(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [r_1, r_2]$

Επίσης, είναι προφανές ότι $\varphi(x) \leq 0$ για κάθε $x \leq r_1$ ή $x \geq r_2$

Είναι $E = \int_{r_1}^{r_2} \varphi(x)dx = \int_{r_1}^{r_2} (2e^x - xe^x - 1)dx$

$$= 2\int_{r_1}^{r_2} e^x dx - \int_{r_1}^{r_2} x(e^x)' dx - \int_{r_1}^{r_2} 1dx$$

$$= 2[e^x]_{r_1}^{r_2} - [xe^x]_{r_1}^{r_2} + \int_{r_1}^{r_2} e^x dx - 1(r_2 - r_1)$$

$$= 2e^{r_2} - 2e^{r_1} - r_2 e^{r_2} + r_1 e^{r_1} + e^{r_2} e^{r_1} - r_2 + r_1$$

$$= 3e^{r_2} - 3e^{r_1} + r_1 e^{r_1} - r_2 e^{r_2} - r_2 + r_1$$

Επειδή $\varphi(r_1) = 0$ είναι $2e^{r_1} - r_1 e^{r_1} - 1 = 0$

και $\varphi(r_2) = 0$ είναι $2e^{r_{21}} - r_2 e^{r_2} - 1 = 0$

$$= 3e^{r_2} - 3e^{r_1} + 2e^{r_1} - 1 + 1 - 2e^{r_2} - r_2 + r_1$$

$$= e^{r_2} - e^{r_1} - r_2 + r_1$$

B$_1$) Είναι $f'(x) = \dfrac{(x-1)'}{(e^x - x)'}$

$$= \frac{(e^x - x) - (x-1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2}$$

$$= \frac{e^x - x - xe^x + x + e^x - 1}{* e^x - x)^4}$$

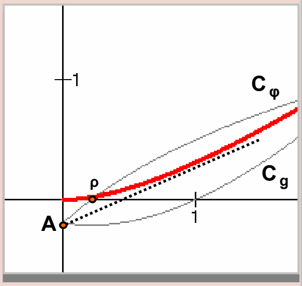
$$= \frac{2(e^x - xe^x - 1)}{(e^x - x)^2}$$

$$= \frac{\varphi(x)}{(e^x - x)^2}$$

B$_2$) Επομένως, η f έχει τοπικό **ελάχιστο** το $f(r_1)$ και τοπικό **μέγιστο** το $f(r_2)$

Θ.**14**● Έστω το κινητό $\mathbf{M(t, y(t))}$, $\mathbf{t \geq 0 : h}$ **κινείται** στη διάρκεια του χρόνου $\mathbf{t}$, πάνω σε ένα δρόμο ώστε ο **ρυθμός μεταβολής** της τεταγμένης $\mathbf{y(t)}$ να **αυξάνεται** με **ρυθμό** $\mathbf{\dfrac{t}{t+1}}$ **km/h**

Τη στιγμή $\mathbf{0}$, το $\mathbf{M}$ βρίσκεται στην αρχή $\mathbf{O(0,0)}$



A₁) Να αποδείξετε ότι ο **γεωμετρικός τόπος** των σημείων $\mathbf{M}$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{y(t) = t - \ln(t+1)}$, $\mathbf{t \geq 0}$

A₂) Να αποδείξετε ότι η $\mathbf{y}$ είναι **γνήσια αύξουσα** και **κυρτή**.

B₁) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\mathbf{\varphi(x) = \ln(x+1) + \dfrac{1}{2} - \ln 2}$ στο $\mathbf{[0,+\infty)}$ έχει **μοναδική ρίζα** ένα αριθμό $\mathbf{\rho \in (0,1)}$

B₂) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\mathbf{g(x) = (x+1)\ln(x+1) + \left(\dfrac{1}{2} - \ln 2\right)(x+1) - x}$ στο $\mathbf{[0,+\infty)}$ έχει **μοναδική ρίζα** το $\mathbf{1}$

Γ) Να αποδείξετε ότι καθώς τα σημεία κινούνται, ένας παρατηρητής που βρίσκεται στη θέση $\mathbf{A\left(0, \dfrac{1}{2} - \ln 2\right)}$ **σταματάει** να έχει **οπτική επαφή** με τα σημεία $\mathbf{M}$ **μετά** από **μία ώρα**.

Απάντηση

A₁) Έχουμε $\mathbf{g(t)} = \displaystyle\int_0^t \frac{x}{x+1}\,dt + c$

$$= \int_0^t \frac{x+1-1}{x+1}\,dt + c$$

$$= \int_0^t \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dt + c = \int_0^t 1\,dt - \int_0^t \left(\frac{1}{x+1}\right)dx + c$$

$$= t - 0 - \ln[x+1]_0^t + c$$

$$= t - \ln(t-1) + c$$

A$_2$) Είναι $\varphi(t) = t - \ln(t+1)$, με $\varphi'(t) = \dfrac{t}{t+1} > 0$

Οπότε, η φ είναι γνήσια **αύξουσα**

Επειδή είναι και $\varphi''(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2} > 0$, διαπιστώνουμε ότι η f είναι **κυρτή**.

B$_1$) Η φ είναι γνήσια **αύξουσα** και συνεχής στο $[0,1]$

Επίσης, είναι $\varphi(0)\varphi(1) = \left(\dfrac{1}{2} - \ln 2\right)\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$

Επειδή $\dfrac{1}{2} < \ln 2$ ή $\ln e^{\frac{1}{2}} < \ln 2$ ή $\sqrt{e} < 2$

Άρα, η φ έχει μία **ακριβώς ρίζα** ρ, η οποία μάλιστα είναι $\rho \in (0,1)$

B$_2$) Έχουμε $g(1) = 0$ και $g'(x) = \ln(x+1) + 1 + \dfrac{1}{2} - \ln 2 - 1$

Αν $x < \rho$, τότε $\varphi(x) < \varphi(0)$ με $g'(x) < 0$

και άρα g γνήσια **φθίνουσα** στο $[0,\rho]$

Αν $x > \rho$, τότε $\varphi(x) > \varphi(0)$ με $g'(x) > 0$

και άρα g γνήσια **αύξουσα** στο $[\rho,+\infty)$

Οπότε $0 < x < \rho$ ή $0 > g(0) > g(x)$ ή $g(x) < 0$

Άρα $g(0) = \dfrac{1}{2} - \ln 2 < 0$ και άρα έχει **μοναδική** ρίζα το 1

Γ) Έχουμε $(\varepsilon): \varphi - \varphi(t_o) = \varphi'(t_o)(t - t_o)$ ή $\varphi - t_o t \ln(t_o + 1) = \dfrac{t}{t_o + 1}(t - t_o)$

Για $t = 0$ και $\varphi = \dfrac{1}{2} - \ln 2$ είναι $\dfrac{1}{2} - \ln 2 - t_o + \ln(t_o + 1) = \dfrac{-t_o^2}{t_o + 1}$

ή $\left(\dfrac{1}{2} - \ln 2\right)(t_o + 1) - t_o^2 - t_o + (t_o + 1)\ln(t_o + 1) = -t_o^2$

ή $(t_o + 1)\ln(t_o + 1) + \left(\dfrac{1}{2} - \ln 2\right)(t_o + 1) - t_o = 0$ ή $g(t_o) = 0$ ή $t_o = 1$