Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x+(\alpha-x)e^{-x}$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\ln x+\beta$ όπου $\beta\in\mathbb{R}$.

Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα yy' και τη διχοτόμο (δ) της γωνίας $x\hat{O}y$ είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=x_0$ όπου x_0 η τετμημένη του κοινού σημείου των γραφικών παραστάσεων των f και g και της (δ).

α) Να δείξετε ότι $x_0=1$, $\alpha=1$ και $\beta=1$.

β) Να δείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(\kappa)<1$, όπου $\kappa\in\left(\ln\frac{3}{2},\ln 2\right)$. Δίνεται ότι $e>\frac{9}{4}$.

γ) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(x_0,f(x_0))$ τέμνει τη γραφική παράσταση της g και σε άλλο ένα σημείο.

δ) Έστω η συνάρτηση $h:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $h(x)=f(x)$.

i. Να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε την ασύμπτωτη της αντίστροφή της h^{-1} στο $+\infty$.

ii. Να ορίσετε τη συνάρτηση $g\circ h^{-1}$ και να δείξετε ότι $\int_1^e (g\circ h^{-1})(x)dx>1$.

schools.patakis.gr