

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \begin{cases} e^x + \alpha x + \beta & , x < 0 \\ \gamma & , x = 0 \\ x^2 - x^2 \ln x & , x > 0 \end{cases}$  όπου  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ .

- α) Να δείξετε ότι  $\alpha = -1$ ,  $\beta = -1$  και  $\gamma = 0$ .
- β) i. Να βρείτε το πρόσημο της  $f$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- ii. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο που παρουσιάζει τοπικό μέγιστο τέμνει ξανά τη γραφική παράσταση της  $f$ .
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο καμψής της και την ευθεία  $x = e$ .
- δ) i. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη ( $\zeta$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της  $f$  για κάθε  $x \in (0,1)$ .
- ii. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας  $\omega$  που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  με τον άξονα  $x'x$ , όταν συμπίπτει με τη ( $\zeta$ ).
- ε) Έστω  $E(\lambda)$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την ασύμπτωτή της στο  $-\infty$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = \lambda$  με  $\lambda < -1$ . Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E(\lambda)$ .