

Έστω η συνάρτηση $f : (0,1) \cup (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x+\alpha}{\ln x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $\left(\frac{1}{e}, f\left(\frac{1}{e}\right)\right)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο

με τετμημένη $\frac{1}{2e}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 0$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = e\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2e}\right)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μία μόνο εφαπτομένη η οποία τέμνει τον άξονα yy' σε σημείο με τεταγμένη ίση με 1.

δ) Σημείο $M(x, y)$ με $x > 1$ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης του σημείου από την αρχή των αξόνων, όταν το σημείο βρίσκεται στη θέση τοπικού ελαχίστου της f . Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου είναι σταθερός και ίσος με 1 cm/s.

ε) Έστω E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \sqrt{e}$ και $x = e^2$. Να βρείτε την ευθεία $x = \lambda$ με $\lambda \in (\sqrt{e}, e^2)$ η οποία χωρίζει το E σε δύο ισεμβαδικά χωρία.