

Έστω η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \alpha(x+1) - \frac{\ln x}{x} - 1$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Η  $f$  παρουσιάζει ακρότατο στο  $x_0$  το 1.

- α) Να δείξετε ότι  $x_0 = 1$  και  $\alpha = 1$ .
- β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.  
ii. Να δείξετε ότι η ( $\varepsilon$ ) βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της  $f$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  εκτός από το σημείο επαφής.
- γ) i. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $f$ .  
ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την ασύμπτωτή της στο  $+\infty$  και την ευθεία  $x = e$ .
- δ) i. Να λύσετε την ανίσωση  $f(e^{1-x}) \geq f(x)$ .  
ii. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^e f^2(e^{1-x}) dx \geq 2E - e + 1$$

όπου  $E$  είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = 1$  και  $x = e$ .