

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\alpha x + \alpha + 1}{x - \ln x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Η f έχει ολικό μέγιστο το 1.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 0$.

β) i. Να βρείτε την ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

ii. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μοναδικό σημείο καμπής με τετμημένη η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(1, 2)$.

δ) i. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 > 1$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το ολικό μέγιστο της f .

ii. Υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , σε σημείο της με τετμημένη που βρίσκεται στο διάστημα $(1, x_0)$, η οποία να είναι παράλληλη στην εφαπτομένη (ε);

ε) Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$g : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{x-1}{x} f(x)$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$ με $\lambda > 1$. Να

υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} [E(\lambda+1) - E(\lambda)]$.