

Δίνεται η συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\alpha}{x-1} + \beta \cdot \ln(x-1)$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της f έχει μοναδική οριζόντια εφαπτομένη (ε) στο σημείο της $(x_0, x_0 - 1)$ και μοναδικό σημείο καμπής με τετμημένη $x_0 + 1$.

- α)** Να δείξετε ότι $x_0 = 2$ και $\alpha = \beta = 1$.
- β)** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτες και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- γ)** Έστω F μια αρχική της f με $F(2) = 0$.
- i.** Να βρείτε τη συνάρτηση $g : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = F(x) + x$.
- ii.** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g έχει μοναδική εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία $y = 2x$.
- δ)** Έστω (ζ) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο καμπής της. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την (ε) και τις ευθείες $x = 2$ και $x = e + 1$.