Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου

Πανελλαδικές Εξετάσεις

2016 – 2024

Περιεχόμενα

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε το

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\alpha)-G(\beta)$$

β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x)$$

γ) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

δ) Μια συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

ε) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **Β1, Β2, Β3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη σχέση $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Γ3. Αν $f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

Γ4. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Γ3,** να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$$

όταν $x\in[0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x\,dx=\pi$
- $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=1$
- $e^{f(x)}+x=f\left(f(x)\right)+e^{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(\pi)=\pi$ και $f'(0)=1$.

Δ2. **α)** Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$.

Δ4. Να δείξετε ότι $0<\int_1^{e^{\pi}}\dfrac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_o)=0$.

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Α3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y=\ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{συν}x-1}{x}=1$.

β) Αν $f(x)=\ln|x|$ για κάθε $x\neq 0$, τότε $f'(x)=\dfrac{1}{|x|}$ για κάθε $x\neq 0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_o τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o

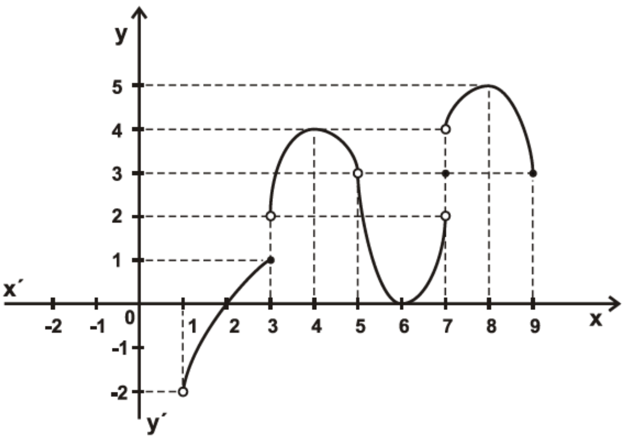
δ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\nu\geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

ε) Για κάθε συνάρτηση f, συνεχή στο $[\alpha,\beta]$, ισχύει:

$$\text{αν } \int_\alpha^\beta f(x)dx>0, \text{ τότε } f(x)>0 \text{ στο } [\alpha,\beta].$$

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

Β2. Να βρείτε αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 5}f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 7}f(x)$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 9}f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Β3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{f(x)}$ β) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{f(x)}$ γ) $\lim\limits_{x\to 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

B4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

B5. Να βρείτε τα σημεία x_o του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_o)=0$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1-1$ και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει: $f(\eta\mu x)>f\left(x-\dfrac{1}{6}x^3\right)$.

Γ3. Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3,\ x\ge 0$ με $x=x(t)$ και $y=y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\ge 0$.

Γ4. Αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x}, & 0<x<1\\ 1, & x=1\\ \dfrac{\ln x}{x-1}, & x>1\end{cases}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Δ2. Να αποδείξετε ότι το $x_o=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

Δ3. **i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

ii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=x_o$, όπου x_o η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι

$$E=\frac{-x_o^2-2x_o+2}{2}$$

Δ4. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[1,+\infty)$ να αποδείξετε ότι

$$(x+1)F(x)>xF(1)+F(x^2),\ \text{για κάθε } x>1$$

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x|\ \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ ισχύει $(\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Α2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$.

β) Το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f, για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g.

γ) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f.

δ) Για κάθε συνάρτηση f που είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ ισχύει $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \Delta$.

ε) Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha x - 1}{x+1}$, $x \neq -1$, όπου το α είναι ένας πραγματικός αριθμός.

Β1. Να βρείτε την τιμή του α, ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(3,2)$.

Αν $\alpha = 3$ τότε:

Β2. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.

Β3. Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3-x}$, $x \neq 3$.

Β4. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1 - \dfrac{1}{x-2}$, $x > 2$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο διάστημα $(2,+\infty)$.

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες $y = x+1$, $x = \lambda$ και $x = \lambda + 1$ με $\lambda > 2$.

Γ4. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in (2,+\infty)$ ισχύει $E(\lambda) > \ln 2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x=0 \\ \dfrac{\ln x}{x-1} & , \quad 0<x\neq 1 \\ 1 & , \quad x=1 \end{cases}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,+\infty)$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)+\ln x$.

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(e^x\right)}{e^{f(x)}}$.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α.**

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=0$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η $g\circ f$ ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

γ) Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$.

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$, $x>0$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$, $x\neq 1$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

Β2. Αν $h(x)=(f\circ g)(x)=\ell n\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$, $x\in(0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Β3. Αν $\varphi(x)=h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Β4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\eta\mu x,\ x\in[0,\pi]$, και το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτομένες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το A, τις οποίες και να βρείτε.

Γ2. Αν $(\varepsilon_1): y=-x$ και $(\varepsilon_2): y=x-\pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος **Γ1,** τότε να σχεδιάσετε τις $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ και τη γραφική παράσταση της f, και να αποδείξετε ότι $\frac{E_1}{E_2}=\frac{\pi^2}{8}-1$, όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες και
- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx>e-1-\pi$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,0)\\ e^x\eta\mu x, & x\in[0,\pi]\end{cases}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα στο διάστημα $[-1,\pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τη γραφική παράσταση της g, με $g(x)=e^{5x},\ x\in\mathbb{R}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=\pi$.

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_o)=0$.

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν για κάποιο $x_o \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x_o)=0$, τότε το x_o είναι θέση σημείου καμπής της f».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α,** αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ,** αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α).**

Α3. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$, τότε

α) η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει λύση στο (α,β).

β) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α,β).

γ) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α,β).

δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=0$ στο (α,β).

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\beta^\alpha f(x)dx=G(\alpha)-G(\beta)$.

β) Μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$, ώστε $f(x_1)<f(x_2)$.

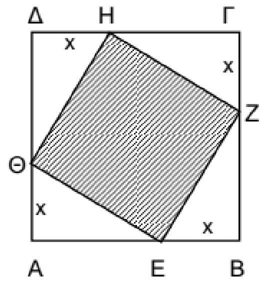
γ) Αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο $M'(\beta,\alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1}.

δ) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), αν $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

ε) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2 cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ:



Β1. Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x.

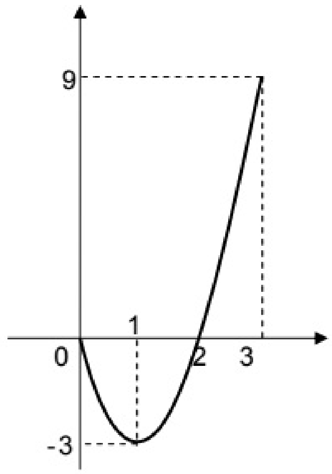
Β2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση: $f(x)=2x^2-4x+4,\ 0\le x\le 2$.

Β3. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

Β4. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_o\in[0,2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_o)$ του αντίστοιχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με $4e^{x_o}+1\,cm^2$.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:



- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο διπλανό σχήμα:
- $f(0)=2,\ f(1)=0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x=0$ και $x=3$ ισούται με 8 τ.μ.
- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0,3]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(3)=2,\ f(2)=-2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)-2}$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Γ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f.

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o\in(2,3)$ για το οποίο δεν υπάρχει δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(x)}$.

Γ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\eta\mu x}{x}+\alpha &,\ -\dfrac{\pi}{2}\le x<0 \\ 2 &,\ x=0 \\ x^3-3x^2+2 &,\ x>0 \end{cases}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f στο διάστημα ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

Δ2. Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$.

Δ3. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f.

Δ4. Να αποδείξετε ότι: $\pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{2} f(x)dx < \frac{3\pi}{2} - 1$.

Δ5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(\frac{-\pi}{2}\cdot x\right) = f\left(\frac{-\pi}{2}\cdot e^{-x}\right)$ έχει μοναδική λύση στο $(0,1)$.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_o)=0$.

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν για κάποιο $x_o \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x_o)=0$, τότε το x_o είναι θέση σημείου καμπής της f».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α,** αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ,** αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α).**

Α3. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$, τότε

α) η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει λύση στο (α,β).

β) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α,β).

γ) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α,β).

δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=0$ στο (α,β).

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\beta^\alpha f(x)dx = G(\alpha)-G(\beta)$.

β) Μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$, ώστε $f(x_1)<f(x_2)$.

γ) Αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο $M'(\beta,\alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1}.

δ) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), αν $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

ε) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$, $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

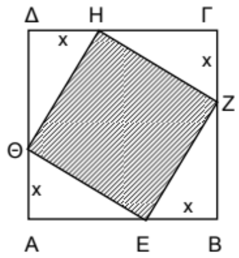
Β2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της h.

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h.

Β4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^x h(x)dx$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2 cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ:



Γ1. Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x.

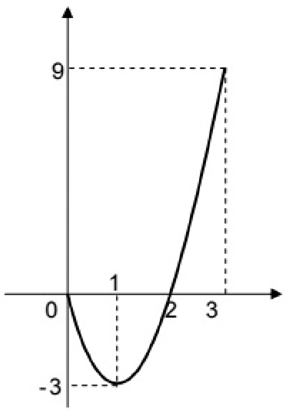
Γ2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση: $f(x)=2x^2-4x+4$, $0\le x\le 2$.

Γ3. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

Γ4. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_o\in[0,2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_o)$ του αντίστοιχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με $4e^{x_o}+1\,cm^2$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:



- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο διπλανό σχήμα:
- $f(0)=2$, $f(1)=0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x=0$ και $x=3$ ισούται με 8 τ.μ.
- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0,3]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(3)=2$, $f(2)=-2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{\ln x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(x)-2}$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Δ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f.

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o\in(2,3)$ για το οποίο δεν υπάρχει δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(x)}$.

Δ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι $1-1$ είναι και γνησίως μονότονη.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α.**

Α3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ με $x\in\mathbb{R}$ έχει μόνο μία θέση ολικού μεγίστου.

β) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

γ) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$.

δ) Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

ε) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\dfrac{4}{x^2},\ x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι

$$E(x)=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},\ x\in(0,8)$$

Γ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα το εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με $5\ \text{m}^2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2$, $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha>1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha>1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη στο (α,x_2).

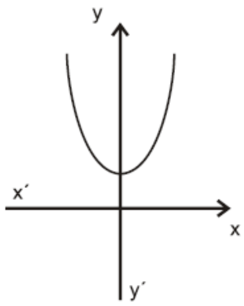
Δ4. Αν $\alpha=2$ να αποδείξετε ότι: $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx>-\frac{32}{15}$.

ΘΕΜΑ Α

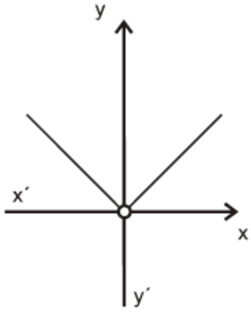
Α1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_o)\cup(x_o,\beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

Α2. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;

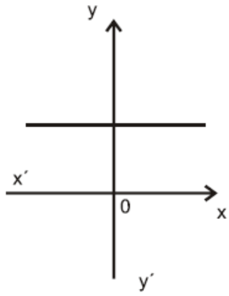
Α3. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T.



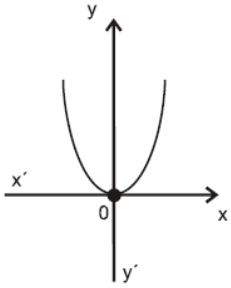
(f)



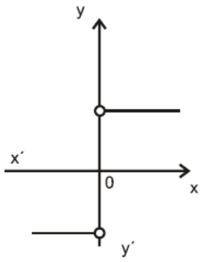
(g)



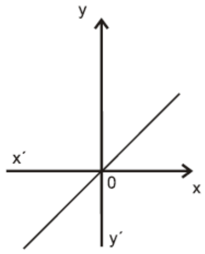
(F)



(G)



(H)



(T)

Να γράψετε στο τετράδιό σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g.

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=0$».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α,** αν είναι **αληθής,** ή το γράμμα **Ψ,** αν είναι **ψευδής.**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.

β) Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι $1-1$, τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $[0,1]$ και σύνολο τιμών το $[2,3]$, τότε ορίζεται η $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $[0,1]$ και σύνολο τιμών το $[2,3]$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & , \quad x>1 \\ x^2+\alpha & , \quad x\le 1 \end{cases}$.

Β1. Να υπολογίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha = 1$.

Β2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},4\right]$.

Β3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=2\eta\mu x - x$.

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_o \in [0,\pi]$ η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A(x_o, f(x_o))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x\, dx$.

Γ4. **α)** Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$.

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(f(x)-f(2x)\right)\cdot \ln x\right]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\ln(1+x)>\frac{x}{x+1}$, για κάθε $x>0$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(0,1)$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)>2^{f(x)}-1$, για κάθε $x>0$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-1}+\frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}+\frac{ημ(πα)}{x}=0,\ \text{όπου}\ \ 0<\alpha<1,$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x, μια στο διάστημα $(0,1)$ και μία στο διάστημα $(1,2)$.

Δ5. Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $(0,+\infty)$ με $F(e)=e\cdot\ln 2$, να αποδείξετε ότι

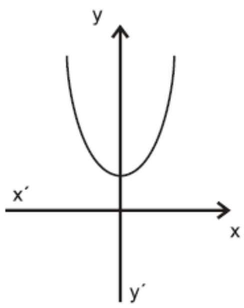
$\ln 2<F(1)<\ln\left(\frac{2^{e+1}}{e+1}\right)$.

ΘΕΜΑ Α

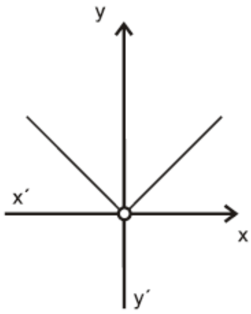
A1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_o)\cup(x_o,\beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

A2. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;

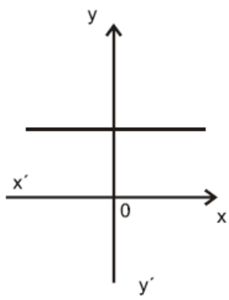
A3. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T.



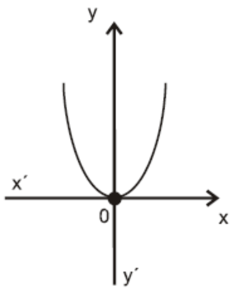
(f)



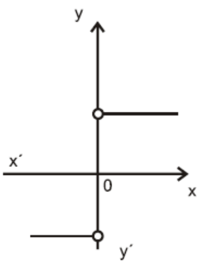
(g)



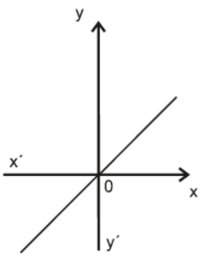
(F)



(G)



(H)



(T)

Να γράψετε στο τετράδιό σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g.

A4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=0$».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α,** αν είναι **αληθής,** ή το γράμμα **Ψ,** αν είναι **ψευδής.**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.

β) Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι $1-1$, τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $[0,1]$ και σύνολο τιμών το $[2,3]$, τότε ορίζεται η $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $[0,1]$ και σύνολο τιμών το $[2,3]$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & , \quad x>1 \\ x^2+\alpha & , \quad x\le 1 \end{cases}$.

Β1. Να υπολογίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha=1$.

Β2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},4\right]$.

Β3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{e^x}{x}$.

Γ1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(e,+\infty)$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-1}+\frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}+\frac{\eta\mu\alpha-2}{x}=0,\ \text{όπου}\ \alpha>e,$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x, μια στο διάστημα $(0,1)$ και μία στο διάστημα $(1,2)$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)+1>e+\ln f(x)$ για κάθε $x>1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=2\eta\mu x-x$.

Δ1. Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).

Δ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_o\in[0,\pi]$ η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A(x_o,f(x_o))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Δ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx$.

Δ4. **α)** Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$.

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(f(x)-f(2x)\right)\cdot\ln x\right]$.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.

α) Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;

β) i. Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη;

ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του **(i),** πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f;

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης.

Α3. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

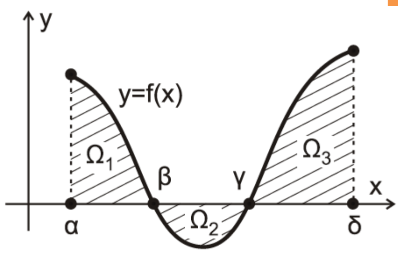
Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο A.

β) Για κάθε συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_o \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_o.

Α5. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος. Αν για τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 ισχύει ότι $E(\Omega_1) = 2$, $E(\Omega_2) = 1$ και $E(\Omega_3) = 3$, τότε το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με:



α) 6 **β)** -4 **γ)** 4 **δ)** 0 **ε)** 2

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{-x} + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο την ευθεία $y = 2$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - x = 0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2,3)$.

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι $1-1$ και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της.

Β4. Έστω $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$, $x > 2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha & , \quad x\geq 1 \\ e^{x-1}+\beta x & , \quad x<1 \end{cases}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=1$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ2. **i.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία είναι αρνητική.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)-x_0 f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$.

Γ4. Ένα σημείο $M(x,y)$ κινείται κατά μήκος της καμπυλης $y=f(x)$, $x\geq 1$.

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο $A(3,10)$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΜΟΚ τη χρονική στιγμή t_0 όπου $K(x,0)$ και $O(0,0)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)+\alpha x+\beta$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $(\varepsilon): y=-x+2$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1,1)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=2$.

Δ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

Δ3. **i.** Να αποδείξετε ότι $f'(x)\geq -1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι $f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2}$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=-x^3-x+2$, $x\in\mathbb{R}$ έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_o) και $f'(x)<0$ στο (x_o,β), να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Α2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω στον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα.

β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, ισχύει:

Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$ τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

γ) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)>0$ τότε $f(x)>0$ για x κοντά στο x_o.

ε) Μια πολυωνυμική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2+1$ και $g:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x-2}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g\circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ και τύπο $(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2-1}$.

Β2. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $g\circ f$ στο $+\infty$.

Β3. Να εξετάσετε εάν υπάρχει το όριο στο $x_o=2$ της συνάρτησης $h:A-\{2\}\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\dfrac{(g\circ f)(x)}{x-2}$.

Β4. Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=\begin{cases}(g\circ f)(x), & x\in A\\ 1-x^2, & x\in(-1,1)\end{cases}$.

Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση $t(x)=\varphi(x)\cdot\eta\mu(\pi x)$ στο διάστημα $[0,2]$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f(x)\cdot f'(x)=\frac{1}{2}$ για κάθε $x>0$ και της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$. Έστω το σημείο $A\left(\frac{3}{2},0\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το μοναδικό σημείο της C_f που απέχει από το σημείο A την μικρότερη απόσταση.

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την εφαπτομένη της C_f στο σημείο M και τον άξονα $x'x$.

Γ4. Δίνεται επιπλέον μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $0<g(x)<1$ για κάθε $x\geq 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μοναδική ρίζα x_o, η οποία ανήκει στο $(0,1)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{x^3}{3x^2-3x+1}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)+f(1-x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$ ισούται με $\frac{1}{2}$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 2f^2(x)dx<1$.

Δ4. Να λύσετε στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση: $f(\eta\mu^2 x)+f(\sigma\upsilon\nu^2 x)=f\left(\varepsilon\varphi x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}\right)$.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_o) και $f'(x)<0$ στο (x_o,β), να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Α2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω στον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα.

β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, ισχύει:

Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$ τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

γ) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)>0$ τότε $f(x)>0$ για x κοντά στο x_o.

ε) Μια πολυωνυμική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2+1$ και $g:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x-2}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g\circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ και τύπο $(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2-1}$.

Β2. Να εξετάσετε εάν υπάρχει το όριο στο $x_o=2$ της συνάρτησης $h:A-\{2\}\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\dfrac{(g\circ f)(x)}{x-2}$.

Β4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g\circ f$ στο σημείο με τετμημένη $x_1=\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f(x)\cdot f'(x)=\frac{1}{2}$ για κάθε $x>0$ και της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$. Έστω το σημείο $A\left(\frac{3}{2},0\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το μοναδικό σημείο της C_f που απέχει από το σημείο A την μικρότερη απόσταση.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M είναι κάθετη στην ευθεία AM.

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$, την ευθεία $x=1$ και την ευθεία $x=2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{x^3}{3x^2-3x+1}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)+f(1-x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$ ισούται με $\frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$.

Α2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f, ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x)>0$».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α,** αν είναι **αληθής,** ή το γράμμα **Ψ,** αν είναι **ψευδής.**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α).**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}\right)=+\infty$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B, αντίστοιχα, τότε η $g\circ f$ ορίζεται, αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{|x|}$, $x\in\mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

δ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

ε) Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ της C_f, του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f:(1,+\infty)\to\mathbb{R},\ \text{με τύπο } f(x)=\frac{x+2}{x-1} \quad \text{και} \quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \text{με τύπο } g(x)=e^x$$

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

Β2. Αν $(f\circ g)(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$, με $x>0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f\circ g$ είναι «1 – 1» και να βρείτε την αντίστροφή της.

Β3. Αν $\varphi(x)=(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, με $x>1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία.

Β4. Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Β3,** να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{x\to 1^+}\varphi(x)$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\varphi(x)$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}-\ln\lambda & , \quad x\le 0\\ \etaμx+\lambdaσυνx & , \quad 0<x<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$, με $\lambda>0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=1$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,1)$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\frac{\pi}{4}$.

Γ3. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f.

Γ4. Ένα σημείο $M(\alpha,f(\alpha))$, με $\alpha\le 0$ κινείται στη γραφική παράσταση της f. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t)=-\frac{\alpha(t)}{3}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο M τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Β. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου B τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία το σημείο M έχει τετμημένη -1.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^x+x^2-ex-1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$, στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι: $f(x_0)=x_0^2-(e+2)x_0+e-1$.

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]$.

Δ3. Αν x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος Δ1 που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+x=x_0$ για $x\in(x_0,1)$ έχει μοναδική ρίζα ρ.

Δ4. Αν x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος Δ1 που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος Δ3, να αποδείξετε ότι $f(x_0)>f(\rho)(f'(k)+1)$ για κάθε $k\in(\rho,1)$.

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, και ισχύει $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

A2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η πρώτη παράγωγος της f **;**

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

A4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ ή $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α,** αν είναι **αληθής,** ή το γράμμα **Ψ,** αν είναι **ψευδής.**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **(α).**

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)>0$ για κάθε x κοντά στο x_0.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε $f(\alpha)\neq f(\beta)$.

γ) Για κάθε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}$, $x\in\mathbb{R}-\{3\}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R}-\{3\}$.

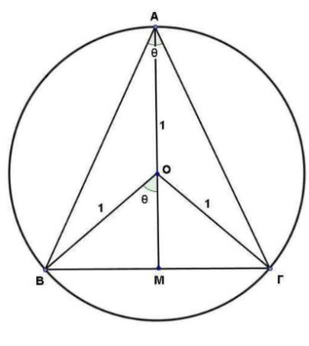
B2. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

B3. Να αποδείξετε ότι $(f\circ f)(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{3\}$.

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\left(f(x)\,\eta\mu\dfrac{1}{3x+1}\right)$.

ΘΕΜΑ Γ

Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα 1, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου και $B\hat{O}M=\theta$, τότε:



Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση της γωνίας θ είναι:

$$E(\theta)=(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta,\ \theta\in(0,\pi)$$

Γ2. Να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta\in(0,\pi)$, για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται.

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο γωνίες θ_1, θ_2, με $\theta_1<\theta_2$, για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με $\frac{3}{4}$.

Γ4. Για τις γωνίες θ_1, θ_2, του ερωτήματος **Γ3,** να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2\in(0,\pi)$ τέτοια, ώστε:

$$\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right)E'(\xi_1)=\left(\frac{\pi}{3}-\theta_2\right)E'(\xi_2)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=x\ln x-\ln(\lambda x),\ \ x\in(0,+\infty),\ \lambda\in(0,+\infty)\ \ \text{και}$$

$$g(x)=x^x,\ \ x\in(0,+\infty)$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$, το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια, να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκει το σημείο ακρότατου της f, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $(0,+\infty)$.

Δ2. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda>0$ για την οποία ισχύει $x^x\geq\lambda x$, για κάθε $x>0$.

Για τα ερωτήματα Δ3 και Δ4 θεωρήστε ότι $\lambda=1$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=\lambda x$ είναι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_g της g, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Δ4. Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $h(x)=\begin{cases}x^x &, x>0\\ 1 &, x=0\end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι:

i. Η h είναι συνεχής

ii. Η εξίσωση $x^{2020}\left(3-2\int_1^2 g(t)dt\right)+(1-x)\int_0^1 h(1-t)dt=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Κάθε συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

β) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=-\infty$.

γ) Για κάθε συνάρτηση f, το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της f, εφόσον υπάρχουν, είναι το ολικό μέγιστο της f.

δ) $\left(\ln|x|\right)'=-\dfrac{1}{x}$, για κάθε $x<0$.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+\alpha$ και $g(x)=x+\beta$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $(f\circ g)(x)=x^2-2x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=-1$.

Β2. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι $1-1$ και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτησή τους, εφόσον αυτή υπάρχει.

Β3. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g^{-1}\circ f$ και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $\varphi(x)=\sqrt{(g^{-1}\circ f)(x)}$.

Β4. Έστω η συνάρτηση $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x)+2\le h(x)\le g(x)+2$, για κάθε $x\in[0,1]$.

i. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to1} h(x)=2$.

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4}$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $N(-2,f(-2))$ διέρχονται δύο ακριβώς εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

Γ2. Έστω $(\varepsilon): y=3x-2$ η μία από τις δύο εφαπτομένες του ερωτήματος **Γ1.** Έστω ακόμα ευθεία (ζ) η οποία είναι παράλληλη στην (ε) και διέρχεται από το σημείο $M(0,\alpha)$ με $-2<\alpha<2$. Να αποδείξετε ότι ανάμεσα στις ευθείες $x=-1$ και $x=1$ υπάρχει ακριβώς ένα σημείο τομής της (ζ) με τη γραφική παράσταση της f.

Γ3. Ένα υλικό σημείο $M(x,x^3)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3$ με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t)>0$. Το σημείο Μ ξεκινά από το σημείο $N(-2,-8)$ και καταλήγει στην αρχή των αξόνων Ο. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του;

ΘΕΜΑ Δ

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x)\cdot \sigma\upsilon\nu^3 x + f'(x)\cdot \sigma\upsilon\nu^2 x\cdot \eta\mu x - 1 = 0$, για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
- $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot \eta\mu x - \varepsilon\varphi x$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι σταθερή.

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{\eta\mu x}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο στο $x_0=\frac{\pi}{4}$, το οποίο και να βρείτε.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=3\sqrt{2}$ στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι $f'(\rho_2)(4\rho_2-\pi)>4\sqrt{2}$, όπου ρ_2 η ρίζα του ερωτήματος **Δ3.**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x_0)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x_0)<0$ στο (x_0,β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Α3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x=x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α,** αν είναι **αληθής,** ή το γράμμα **Ψ,** αν είναι **ψευδής.**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **(α).**

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$ ισχύει $f\circ g=g\circ f$.

β) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και $f(x)<g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0, ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ) Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, η οποία δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό και $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές στο $[\alpha,\beta]$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=(x+\alpha)^2-1,\ x\in[-1,+\infty),\ \alpha\in\mathbb{R}$ και $g(x)=x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Αν η κλίση της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=2$ είναι ίση με 2, τότε:

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της f^{-1}.

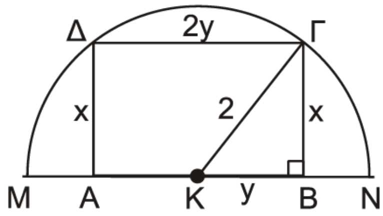
Αν $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}-1,\ x\in[-1,+\infty)$, τότε:

Β3. Να βρείτε τη συνάρτηση $f^{-1}\circ g$.

Β4. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f^{-1}(x)+1}{(f^{-1}\circ g)(x)}$, όπου $(f^{-1}\circ g)(x)=|x|-1,\ x\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Γ

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο με κέντρο Κ και διάμετρο $MN = 4$ cm. Ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις x cm και $2y$ cm είναι εγγεγραμμένο στο ημικύκλιο.



Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ως συνάρτηση του x, είναι $E(x) = 2\sqrt{4x^2 - x^4}$, $x \in (0,2)$.

Γ2. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ώστε το εμβαδόν του να γίνεται μέγιστο.

Γ3. Να βρείτε τις τιμές του x ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ να είναι ίσο με $2\sqrt{3}$ cm^2.

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \left(E(x) - 2\sqrt{3}\right)e^x$, $x \in (0,2)$ έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο διάστημα $\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ να ισχύει:

$x \cdot f(x) = \text{συν}x - 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{συν}x - 1}{x}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Δ2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2020 \cdot \text{συν}x - x = 2020$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Δ5. Έστω F μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ με $F(0) = \rho$, όπου ρ η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **(Δ4).** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει: $\pi \cdot |F(x)| \le 2 \cdot |x|$.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Κάθε συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

β) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = -\infty$.

γ) Για κάθε συνάρτηση f, το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της f, εφόσον υπάρχουν, είναι το ολικό μέγιστο της f.

δ) $\left(\ln|x|\right)' = -\dfrac{1}{x}$, για κάθε $x<0$.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x+1$ και $g(x)=x+2$, για τις οποίες ισχύει $f\circ g=g\circ f$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η αντίστροφή της, f^{-1}.

Β3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Β4. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{f(x)}-2}{x^2-9}$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1}+\alpha x & , \; x\ge 0\\ x^2-\alpha & , \; x<0\end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$.

Γ2. Να εξετάσετε αν το σημείο $x_0=0$ είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f.

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Γ4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $N(-2,f(-2))$ διέρχονται δύο ακριβώς εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

Δ3. Ένα υλικό σημείο $M(x,x^3)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3$ με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t)>0$. Το σημείο Μ ξεκινά από το σημείο $N(-2,-8)$ και καταλήγει στην αρχή των αξόνων Ο. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του;

ΘΕΜΑ Α

Α1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Α3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x=x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α,** αν είναι **αληθής,** ή το γράμμα **Ψ,** αν είναι **ψευδής.**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **(α).**

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$ ισχύει $f\circ g=g\circ f$.

β) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ και $f(x)<g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0, ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

δ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, ισχύει $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{|x|}$.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, τότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$$

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=(x+\alpha)^2-1$, $x\in[-1,+\infty)$, $\alpha\in\mathbb{R}$ και $g(x)=x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$.

Αν η κλίση της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=2$ είναι ίση με 2, τότε:

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της f^{-1}.

Β3. Αν $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}-1$, $x\in[-1,+\infty)$, τότε να βρείτε τη συνάρτηση $f^{-1}\circ g$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{\alpha x}$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\{0\}$ και $g(x)=e\ln(x+1)$, $x\in(-1,+\infty)$.

Η ευθεία $(\varepsilon): y=ex$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g στο διάστημα $(-1,+\infty)$.

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ να ισχύει:

$x\cdot f(x)=\sigma\upsilon\nu x-1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}, & x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\\ 0, & x=0\end{cases}$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\geq 1$ για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2020\cdot\sigma\upsilon\nu x-x=2020$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Α3. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει $|ημx|<|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

β) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A ισχύει ότι $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$, για κάθε $x\in A$.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

δ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

ε) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[α,β]$, τότε η f παίρνει στο $[α,β]$ μια μέγιστη τιμή, Μ, και μια ελάχιστη τιμή , m.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+1)=(x+1)\cdot e^{-x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι $f(x)=x\cdot e^{1-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, αν υπάρχουν.

Β4. Να βρείτε:

(i) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f,

(ii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=λ$, για τις διάφορες τιμές του $λ\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} αx^3-3x^2-x+1 &, \quad x\le 0 \\ συνx &, \quad 0<x\le \dfrac{3π}{2} \end{cases}$, με $α<-3$.

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Γ2. **(i)** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$.

(ii) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi)=0$.

Γ3. Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Γ4. Να δείξετε ότι $f(x)\geq -1$, για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x=\frac{1}{x}$ (1) έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία ανήκει στο $(1,e)$.

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) και η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ έχει τύπο $f(x)=(\ln x_0)\cdot(x+1)-\ln x-1$.

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0, το $f(x_0)=0$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=x\cdot e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$ και $h(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$, $x\in\mathbb{R}$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

Δ4. Έστω η συνάρτηση $\varphi:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, συνεχής, με $f(x)>\varphi(x)$, για κάθε $x>0$. Θεωρούμε τα σημεία $A(x,f(x))$ και $B(x,\varphi(x))$ με $x>0$. Αν η απόσταση των σημείων A και B γίνεται ελάχιστη στο $x=x_0$, να δείξετε ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης φ.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f, g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A\cap B$.

β) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0)=0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), παρουσιάζει στο σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$ καμπή, τότε $f''(x_0)=0$.

δ) Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, ισχύει ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$ και η συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση

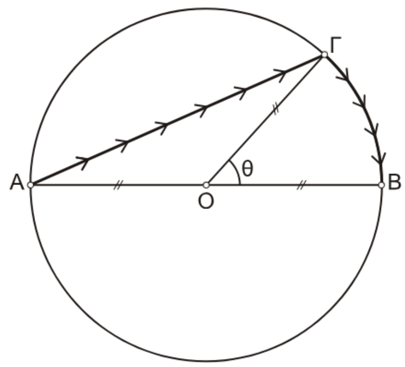
$$f^{-1}(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2,\quad x<0.$$

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h=g\circ f^{-1}$ είναι η $h(x)=\dfrac{x-1}{x}$, $x<0$.

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης της συνάρτησης h του ερωτήματος Β2.

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^{-h(x)}\cdot \eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$, όπου h είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Β2.

ΘΕΜΑ Γ



Κυκλική λίμνη έχει κέντρο Ο και ακτίνα $R = 1$ km. Ένας μαθητής μπορεί να κωπηλατεί με σταθερή ταχύτητα $v_1 = 2$ Km / h και μπορεί να βαδίζει με σταθερή ταχύτητα $v_2 = 4$ Km / h.

Ο μαθητής θέλει να κάνει μια βόλτα στη λίμνη, ξεκινώντας από το σημείο Α του σχήματος και καταλήγοντας στο αντιδιαμετρικό του σημείο Β.

Ο μαθητής μπορεί:

I. Να συνδυάσει κωπηλασία και βάδισμα, κωπηλατώντας ευθύγραμμα από το σημείο Α σε σημείο Γ της περιφέρειας της λίμνης, τέτοιο ώστε η γωνία $B\hat{O}\Gamma = \theta, \theta \in (0, \pi)$ και στη συνέχεια να βαδίσει κατά μήκος του τόξου ΓΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

II. Να κωπηλατήσει ευθύγραμμα από το σημείο Α στο σημείο Β $(\theta = 0)$.

III. Να βαδίσει στην περιφέρεια της λίμνης από το Α στο Β $(\theta = \pi)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι ο χρόνος (σε ώρες) που χρειάζεται, για να διανύσει την παραπάνω διαδρομή, ως συνάρτηση της γωνίας θ (σε ακτίνια) είναι: $t(\theta) = \frac{1}{4}\theta + \sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}$, $\theta \in [0, \pi]$.

Δίνεται ότι σε έναν κύκλο ακτίνας R το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία θ (σε ακτίνια) είναι $S = R \cdot \theta$.

Γ2. Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ ώστε ο χρόνος της βόλτας του μαθητή να γίνεται μέγιστος.

Γ3. Σε ποια από τις επιλογές (I), (II) ή (III) ο χρόνος μετάβασης από το σημείο Α στο σημείο Β είναι ο ελάχιστος δυνατός; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x$ και συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = -x^2 + \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$, για την οποία το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{-g(x)} + \alpha x\right)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που διέρχεται από το σημείο $M(-1, 0)$ είναι η ευθεία $(\varepsilon): y = x + 1$.

Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) > g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{f(x-1) - x}{x - k} + \frac{f(x) - g(x)}{x - k - 1} = 0$, $k \in \mathbb{R} - \{1\}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(k, k+1)$.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f, g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A\cap B$.

β) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0)=0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), παρουσιάζει στο σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$ καμπή, τότε $f''(x_0)=0$.

δ) Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, ισχύει ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$ και η συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x)=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2,\quad x<0$.

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h=g\circ f^{-1}$ είναι η $h(x)=\dfrac{x-1}{x}$, $x<0$.

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης της συνάρτησης h του ερωτήματος Β2 .

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

Γ1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ2. Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Γ3. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Γ4. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του k.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπους $f(x)=e^x$, $g(x)=-x^2-x$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που διέρχεται από το σημείο $M(-1,0)$ είναι η ευθεία $(\varepsilon): y=x+1$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) του ερωτήματος **Δ1** εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)>g(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε οτι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, με $c\in\mathbb{R}$.

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Α3. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=0$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και ισχύει $f'(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in(0,1)$, τότε $f(0)\neq f(1)$.

γ) Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $R_2=\mathbb{R}-\{x\,|\,\eta\mu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$.

δ) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=1$.

ε) Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^4-2x^2+1$ και η συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h=f\circ g$.

Β2. Αν $h(x)=(x-1)^2$, $x\in[0,1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι «1 – 1» και να βρείτε την αντίστροφη h^{-1} συνάρτηση της h.

Β3. Έστω $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{h^{-1}(x)}{1-x}, & x\in[0,1)\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}$.

i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$, όπου $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δίνεται ακόμη ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ και για την παράγωγο f' της f ισχύει ότι:

$$f'(x)=\begin{cases}-2 & , \quad x<-1\\ 3x^2-1 & , \quad x>-1\end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\begin{cases}-2x-2 & , \quad x\le -1\\ x^3-x & , \quad x>-1\end{cases}$.

Γ2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης f σε σημείο $A(x_0,f(x_0))$ με $x_0>-1$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2.

Γ3. Έστω $y=2x-2$ η εξίσωση της ευθείας (ε) του ερωτήματος Γ2. Ένα σημείο $M(x,y)$ με $x>2$ κινείται κατά μήκος της ευθείας (ε). Έστω ακόμα E το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΓ, όπου K είναι η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$ και Γ είναι το σημείο με συντεταγμένες $(2,0)$. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $B(3,4)$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E τη χρονική στιγμή t_0.

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\dfrac{f(-x)}{1-x^3}\right]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x-\ln(3x)$.

Δ1. **i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1,x_2, με $x_1<1<x_2$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ1.

Δ2. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι:

$$E=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2)$$

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $f(2-x_1)<0$.

Δ4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση: $2f(x)+\ln 3=1+f'(x_2)(x-x_2)$ έχει λύση.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Α2. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) του Διαφορικού Λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

β) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$.

γ) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0)=0$.

δ) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$.

ε) Η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{|x|},\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}^*$$

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ και $g(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\ln x$.

Β1. Να βρείτε, αν υπάρχουν τις κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (e,e^2).

Β3. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $\varphi=g\circ f$.

Β4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση με τύπο $h(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$. Αν $\varphi(x)=\ln x-\ln(x-1)$, $x\in(1,+\infty)$, να εξετάσετε αν $\varphi=h$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\eta\mu x}{x}=0$.
- $f'(x)f''(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. **i.** Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$ και $f'(0)=1$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ3. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1 – 1» και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}-x^3+3x+1 & , \quad -1\le x\le 0\\ x^x & , \quad 0\le x\le \dfrac{2}{e}\end{cases}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Δ2. **i.** Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\left[-1,\dfrac{2}{e}\right]$ υπάρχει $\xi\in\left[-1,\dfrac{2}{e}\right]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} xf(x)dx>\left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}}-\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου

Πανελλαδικές Εξετάσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Α2. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) του Διαφορικού Λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

β) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$.

γ) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0)=0$.

δ) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$.

ε) Η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{|x|},\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}^*$$

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^3-3x+1$.

Β1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση f.

Β2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$.

Β3. Να υπολογίσετε το $I=\int_1^2\dfrac{f(x)}{x}dx$.

Β4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ και $g(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\ln x$.

Γ1. Να βρείτε, αν υπάρχουν τις κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (e,e^2).

Γ3. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $\varphi = g \circ f$.

Γ4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση με τύπο $h(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$. Αν $\varphi(x) = \ln x - \ln(x-1)$, $x \in (1, +\infty)$, να εξετάσετε αν $\varphi = h$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - \eta\mu x}{x} = 0$.
- $f'(x) f''(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ3. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1 – 1» και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Α2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$.

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ, ισχύει ότι $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

δ) Αν η είναι μία «1 – 1» συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθειά $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.

ε) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\dfrac{4-e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\ln x$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f=g\circ h$.

Έστω $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x}$, $x>0$.

Β2. **i)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{4-\pi^2}{4-e^2}>\dfrac{\pi}{e}$.

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτηση f.

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3 & , \quad x<1 \\ \dfrac{1}{x}+\alpha & , \quad x\geq 1 \end{cases}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι

$$\int_2^3 xf(x)dx = 1$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.

Γ2. **i)** Να αποδείξετε ότι ορίζεται η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1 – 1» και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ4. Έστω $(\varepsilon): y = -x + 2$ η εξίσωση της εφαπτομένης της ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με $x \geq 1$, την ευθεία (ε), τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,2) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 2x}{x - 1} = \ell \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{1}{3}$.

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ2.

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (0,1)$, στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ισούται με $\dfrac{2f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$.

Δ4. Αν επιπλέον F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης f στο διάστημα $(0,2)$ με $F(x_1) = G(x_2) = 0$, να αποδείξετε ότι:

i) $F(x_2) + G(x_1) = 0$

ii) η εξίσωση $x_1F(x) + x_2G(x) = x_1 + x_2 - 2x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (x_1, x_2).

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$, για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ.

Α2. Πότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι σύνθετες συναρτήσεις $g\circ f$ και $f\circ g$ δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

β) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{συν}x-1}{x}=1$.

γ) Εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η σύνθεσή τους $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

δ) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, με $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)=0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g, h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπους $g(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ και $h(x)=\ln x$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f=g\circ h$.

Β2. Αν $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $x>1$, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f^{-1}=f$ (όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f).

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Β4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x)=\text{συν}x$ έχει λύση στο $(1,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και για την οποία ισχύουν:

- $f(1)=0$
- $f(2)=2$
- $f'(2)=1$

- $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[1,2]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f

i. έχει κοινό σημείο με την ευθεία $(\varepsilon_1): y=-x+2$ και

ii. εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon_2): y=x$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

Γ3. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{f(x)}{x-1}>\dfrac{2-f(x)}{2-x}$, για κάθε $x\in(1,2)$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x)\geq 2x-2$, για κάθε $x\in[1,2]$.

ii. $1<\int_1^2 f(x)dx<\dfrac{3}{2}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} e^x & , \ x\geq 0 \\ -e^{-x}+2 & , \ x<0 \end{cases}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $A(x_1,f(x_1))$ με $x_1>0$, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$, έχει εξίσωση $y=e\cdot x$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) του ερωτήματος $\Delta 1$ και η γραφική παράσταση της f έχουν, εκτός από το σημείο επαφής A, ακριβώς ένα ακόμα κοινό σημείο $B(x_0,f(x_0))$.

Δ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και την εφαπτομένη της του ερωτήματος $\Delta 1$, ανάμεσα στις ευθείες $x=x_0$ και $x=1$. Να δώσετε την απάντησή σας ως συνάρτηση του x_0.

Δ4. Δύο κινητά ξεκίνησαν ταυτόχρονα από το σημείο B του ερωτήματος $\Delta 2$. Το ένα κινήθηκε κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος BO, όπου O είναι η αρχή των αξόνων, και το άλλο κινήθηκε κατά μήκος της γραφικής παράστασης της f, έτσι ώστε οι τεταγμένες των θέσεών τους να παραμένουν ίσες μεταξύ τους κάθε χρονική στιγμή. Ποια είναι η μέγιστη δυνατή απόσταση ανάμεσα στα κινητά κατά τη διάρκεια της κίνησής τους;

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano.

Α3. Πότε λέμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες;

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μία «1 – 1» συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.

β) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

γ) Για κάθε ζεύγος f, g συνεχώς συναρτήσεων στο $[\alpha,\beta]$ ισχύει ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx$$

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

ε) Οι γραφικές παραστάσεις πολυωνυμικών συναρτήσεων βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 έχουν ασύμπτωτες.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

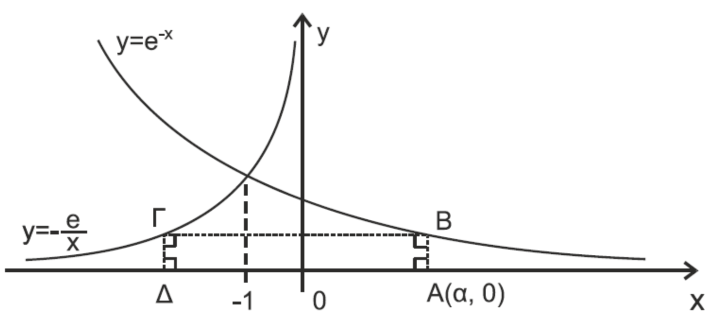
Β1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Β3. Να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{2}\right]$.

Β4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.

ΘΕΜΑ Γ



Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$ με τύπους $f(x)=e^{-x}$ και $g(x)=-\frac{e}{x}$. Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει τις κορυφές Α και Δ πάνω στον άξονα $x'x$ και τις κορυφές Β και Γ πάνω στις C_f και C_g, αντίστοιχα. Έστω το σημείο $A(\alpha,0)$ με $\alpha>-1$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου Γ είναι $\left(-e^{1+\alpha},e^{-\alpha}\right)$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, δίνεται, ως συνάρτηση του α, από τον τύπο

$$E(\alpha)=e+\alpha\cdot e^{-\alpha}$$

Γ3. Να βρείτε τη θέση του σημείου Α για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ μεγιστοποιείται.

Γ4. Να εξετάσετε αν υπάρχει θέση του σημείου Α ώστε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ να έχει εμβαδόν 4 τ.μ.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x^2\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=\eta\mu x$, για κάθε $x\neq 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x} &, \quad x\neq 0\\ 0 &, \quad x=0\end{cases}$.

Δ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $O(0,0)$.

Δ3. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Δ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-1}^{1}f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx$.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό ζ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\zeta$.

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ;

Α3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η σύνθεση της f με τη g, δηλαδή η συνάρτηση $g\circ f$, ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

β) Ισχύει ότι $|\eta\mu x|\leq x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Ισχύει $(\sigma\varphi x)'=\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x\in\mathbb{R}-\{x\,|\,\eta\mu x=0\}$.

δ) Για κάθε συνάρτηση ισχύει ότι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα είναι το ολικό της μέγιστο.

ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$g:[1,+\infty)\to\mathbb{R} \text{ με τύπο } g(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}} \quad\text{και}\quad h:[1,+\infty)\to\mathbb{R} \text{ με τύπο } h(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Β1. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f=\dfrac{g}{h}$ και $r=g\cdot h$.

Για τα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $x>1$ και $r(x)=x-\dfrac{1}{x}$, $x\geq 1$.

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι $f^{-1}=f$, όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f.

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης r.

Β4. Να λύσετε την εξίσωση $\left(f^{-1}(f(x))\right)^2=1+4r(x)$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -2x+4+e^{\lambda} & , \quad 0\le x<2 \\ -x^2+4x-3+\lambda & , \quad x\ge 2 \end{cases}$, με $\lambda\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=0$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και στη συνέχεια να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατά της.

Γ3. **i)** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα $[0,3]$.

ii) Να βρείτε, αν υπάρχει, $\xi\in(0,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $\Gamma(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0,f(0))$ και $E(3,f(3))$.

Γ4. Κινητό σημείο Μ ξεκινά από το σημείο $A(2,0)$ και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα $\upsilon=0,5$ μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο. Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η γωνία $\hat{\omega}=A\hat{O}M$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό σημείο Μ θα συναντήσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{\ln x+\alpha x}{x}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

Δίνεται ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f\big((0,+\infty)\big)=\left(-\infty,1+\dfrac{1}{e}\right]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα, x_0, η οποία είναι ανήκει στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

Δ3. **i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f(4)$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x_1=2$ και $x_2=4$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $2^x\le x^2$ στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Δ4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=f(e^x)\cdot\dfrac{1-x}{e^x}$.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $x=-\ln 2$ και $x=0$, και περικλείεται από αυτές, τον άξονα $x'x$ και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.