

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha - x^2}{x^2 + 4}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0, f(0))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και έχει εξίσωση $y = \frac{1}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το ολικό της ακρότατο.

γ) Έστω η συνάρτηση $g(x) = (x^2 + 4)f(x)$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{g(x)} - 1}{1 - g(x)}$.

δ) Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία τομής της με την ευθεία $y = \frac{1}{5}$ τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$.

Schools.patakis.gr