Γεωμετρία Α΄ Γενικού Λυκείου

Απαντήσεις στα θέματα της Τράπεζας Θεμάτων

(2851, 3423, 5124, 5608, 5612, 5613, 5615, 5617, 5619, 5621, 5623, 5626, 5628, 5630, 5633, 5634, 5637, 5638, 5641, 5644, 5646, 5647, 5652, 5653, 5654, 5733, 6002, 6580, 6582, 6583, 6584, 6585, 6587, 6588, 6590, 6592, 6593, 6595, 6882, 6885, 6886, 7452, 7453)

Συγγραφή απαντήσεων: Αθανάσιος Τσιούμας

Χρησιμοποιήστε τους σελιδοδείκτες (bookmarks) στο αριστερό μέρος της οθόνης για την πλοήγηση μέσα στο έγγραφο.

Copyright© για τις απαντήσεις των θεμάτων
Σ. Πατάκης ΑΕΕΔΕ (Εκδόσεις Πατάκη), Αθήνα, 2014

2851

ΘΕΜΑ 2

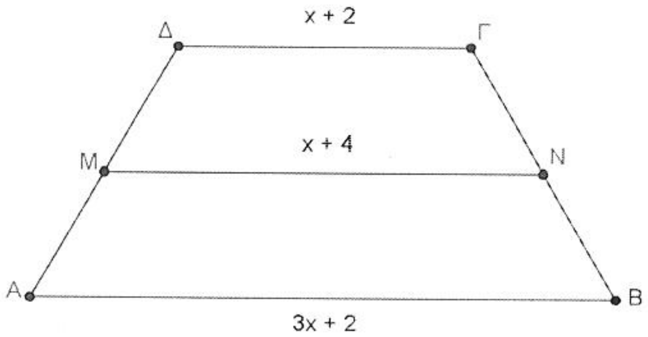
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB > \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$.

α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι $AB = 3x + 2$, $\Gamma\Delta = x + 2$ και το μήκος της διαμέσου του τραπεζίου είναι $MN = x + 4$, τότε να δείξετε ότι $x = 2$.

(Μονάδες 12)

β) Αν η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Το μήκος της διαμέσου του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι:

$$MN = \frac{AB + \Delta\Gamma}{2} \Leftrightarrow x + 4 = \frac{3x+2+x+2}{2} \Leftrightarrow 2x + 8 = 4x + 4 \Leftrightarrow$$

$$2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

β) Έχουμε $\hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και $\hat{\Gamma} + \hat{B} = 180°$ (ως εντός και επί τα αυτά μέρη)

άρα $2\hat{B} + \hat{B} = 180° \Leftrightarrow 3\hat{B} = 180° \Leftrightarrow \hat{B} = 60°$ οπότε $\hat{\Gamma} = 2 \cdot 60° = 120°$

Επειδή το τραπέζιο είναι ισοσκελές έχουμε:

$\hat{A} = \hat{B} = 60°$ και $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 120°$.

ΘΕΜΑ 2

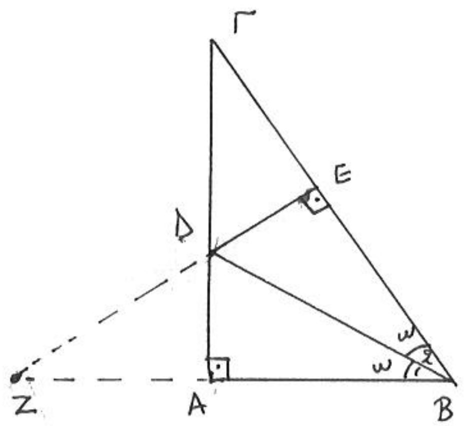
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^0$) και ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$. Από το Δ φέρουμε $ΔΕ \perp ΒΓ$, και έστω Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ (προς το Α).

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ=ΒΕ (Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

Λύση



α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΔΕ έχουν:

- $\hat{A} = \hat{E} = 90°$
- ΒΔ : κοινή
- $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \omega$

άρα είναι ίσα, οπότε ΑΒ=ΒΕ

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ έχουν:

- $\hat{A} = \hat{E} = 90°$
- $\hat{B}$: κοινή
- ΑΒ=ΒΕ από το α)

Επομένως $\overset{\triangle}{ΑΒΓ} = \overset{\triangle}{ΖΕΒ}$

ΘΕΜΑ 2

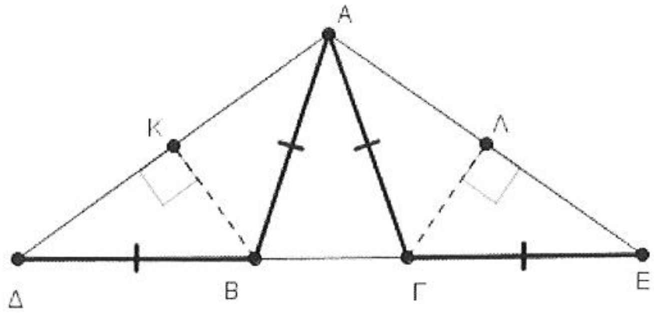
Στο ακόλουθο σχήμα ισχύουν ΑΒ=ΒΔ=ΑΓ=ΓΕ=5, ΒΚ⊥ΑΔ και ΓΛ⊥ΑΕ.

α) Να προσδιορίσετε, ως προς τις πλευρές, το είδος των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα. (Μονάδες 10)

γ) Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα ΚΛ.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Επειδή ΒΔ=ΒΑ το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές όμοιες και το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές αφού ΓΑ=ΓΕ

β) Η ΒΚ είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΒΑΔ άρα θα είναι και διάμεσος οπότε Κ το μέσο του ΑΔ, όμοια Λ το μέσο του ΑΕ αφού $\overset{\triangle}{\Gamma A E}$ ισοσκελές και ΓΛ ⊥ ΑΕ.

γ) Αφού Κ, Λ τα μέσα των ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα θα έχουμε

$$K\Lambda = \frac{\Delta E}{2} = \frac{\Delta B + B\Gamma + \Gamma E}{2} = \frac{BA + B\Gamma + A\Gamma}{2} = \frac{12}{2} = 6$$ (είναι ΔΒ = ΒΑ και ΓΕ = ΑΓ)

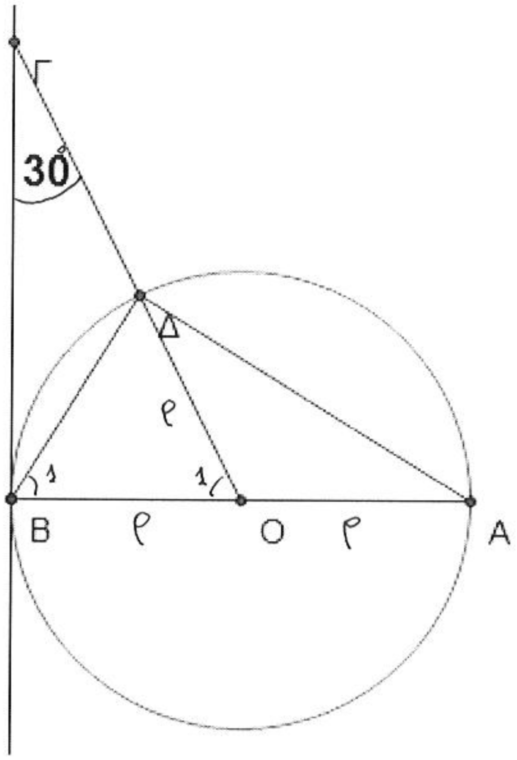
5608

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε κύκλο (Ο, ρ) και διάμετρό του ΑΒ. Στην εφαπτομένη του κύκλου στο Β θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε, η γωνία ΒΓΟ να είναι ίση με 30°. Αν η ΟΓ τέμνει τον κύκλο στο Δ να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{O\Gamma} = 2\mathrm{OA}$. (Μονάδες 12)

β) $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{A\Delta}$. (Μονάδες 13)



Λύση

α) Αφού ΓΒ εφαπτομένη του κύκλου θα είναι $\Gamma B \perp BA$ οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΟ θα έχουμε:
$OB = \frac{O\Gamma}{2} \Leftrightarrow O\Gamma = 2OB = 2\rho = 2OA$

β) Επειδή $\hat{O}_1 = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ το ισοσκελές τρίγωνο ΒΟΔ θα είναι ισόπλευρο άρα $\hat{B}_1 = 60^\circ$

Τα τρίγωνα ΒΟΓ και ΑΒΔ έχουν:

- $\Gamma\hat{B}O = B\hat{\Delta}A = 90^\circ$ ($B\hat{\Delta}A$ εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο)
- $\hat{B}_1 = \hat{O}_1 = 60^\circ$
- $B\Delta = BO = \rho$

Επομένως είναι ίσα, οπότε $B\Gamma = A\Delta$

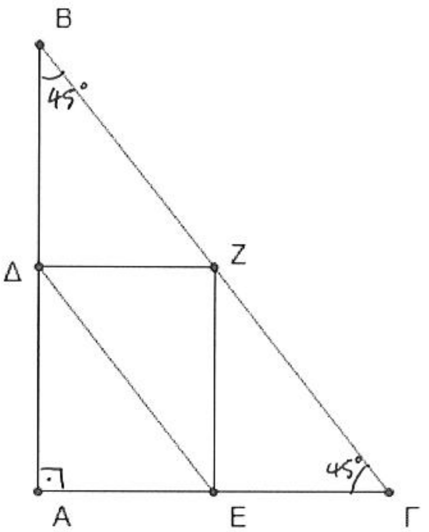
ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΕΔΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 13)



Λύση

α) είναι $ΔΖ \overset{//}{=} \frac{ΑΓ}{2}$ ή $ΔΖ \overset{//}{=} ΑΕ$ (αφού Ε το μέσο του ΑΓ)
οπότε το τετράπλευρο ΑΕΖΔ θα είναι παραλληλόγραμμο
και αφού $\hat{A} = 90°$ θα είναι ορθογώνιο

β) Αφού Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα θα έχουμε
ΔΕ // ΓΒ και επειδή $\hat{B} = \hat{Γ} = 45°$ (ΑΒΓ είναι ισοσκελές) το
τετράπλευρο ΕΔΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

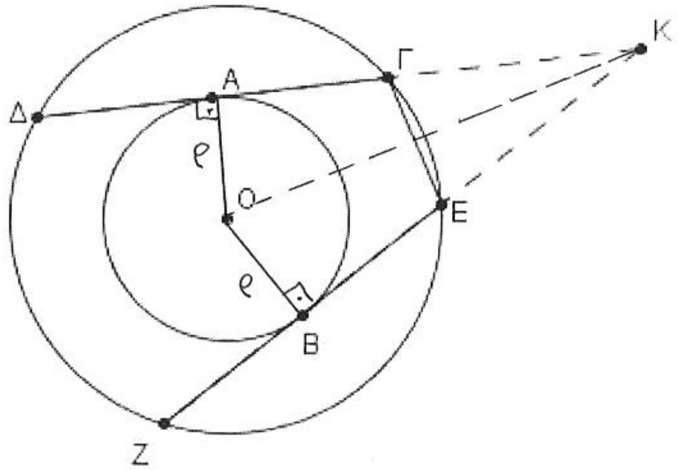
5613

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο Ο και ακτίνες ρ και R (ρ<R). Οι χορδές ΔΓ και ΖΕ του κύκλου (Ο,R) εφάπτονται του κύκλου (Ο, ρ) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι ΔΓ=ΖΕ. (12 Μονάδες)

β) Αν οι ΔΓ και ΖΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΕΓ είναι ισοσκελές. (13 Μονάδες)



Λύση

α) Οι ακτίνες ΟΑ και ΟΒ του κύκλου (Ο,ρ) είναι τα αποστήματα των χορδών ΔΓ και ΖΕ (αντίστοιχα) του κύκλου (Ο,R), επομένως ΔΓ = ΖΕ

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΚ και ΒΟΚ είναι ίσα, αφού έχουν ΟΑ=ΟΒ=ρ και ΟΚ: κοινή, επομένως ΚΑ=ΚΒ όμως ΑΓ=ΒΕ (μισά ίσων τμημάτων) οπότε ΚΑ−ΑΓ=ΚΒ−ΒΕ ή $\boxed{ΚΓ=ΚΕ}$ που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΚΕΓ είναι ισοσκελές.

5615

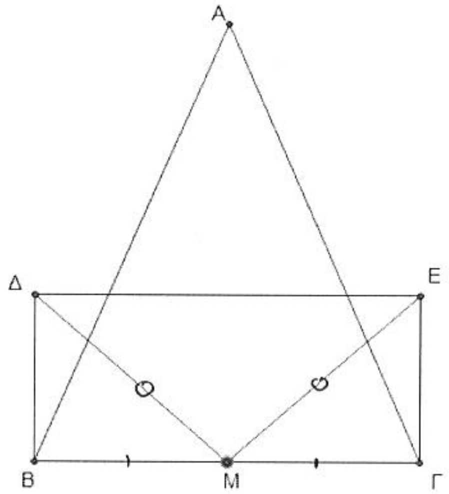
ΘΕΜΑ 2

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Στα σημεία Β και Γ φέρουμε κάθετες στη ΒΓ προς το ίδιο μέρος, και θεωρούμε σε αυτές σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, τέτοια ώστε $M\Delta = ME$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν:

- $\Delta\hat{B}M = M\hat{\Gamma}E = 90^\circ$
- $BM = M\Gamma$ (υπόθεση)
- $\Delta M = ME$ (υπόθεση)

άρα $B\Delta M = \Gamma E M$ που σημαίνει ότι $B\Delta = \Gamma E$

β) Από το α) έχουμε $B\Delta = \Gamma E$ και $B\Delta \parallel \Gamma E$ αφού $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}M = 90^\circ$
άρα το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο αφού $\Delta\hat{B}\Gamma = 90^\circ$.

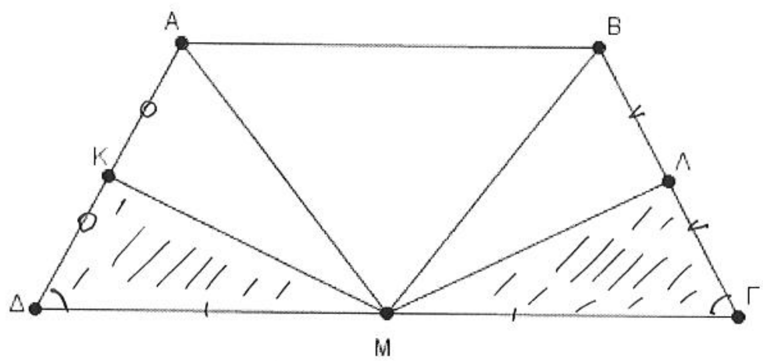
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΔΓ και τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΚΜ και ΛΜ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Τα τμήματα ΑΜ και ΒΜ είναι ίσα. (Μονάδες 13)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΚΔΜ και ΜΛΓ έχουν:

- ΜΔ = ΜΓ (Μ το μέσο του ΔΓ)
- ΔΚ = ΓΛ (ως μισά των ίσων πλευρών ΑΔ και ΒΓ)
- $\hat{Δ} = \hat{Γ}$ (αφού το ΑΔΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο)

άρα $\overset{\triangle}{ΚΔΜ} = \overset{\triangle}{ΜΛΓ}$ οπότε θα έχουν και ΚΜ = ΛΜ

β) Είναι $\overset{\triangle}{ΜΑΔ} = \overset{\triangle}{ΜΒΓ}$ αφού ΜΔ = ΜΓ, $\hat{Δ} = \hat{Γ}$ και ΑΔ = ΒΓ

Επομένως ΑΜ = ΒΜ.

5619

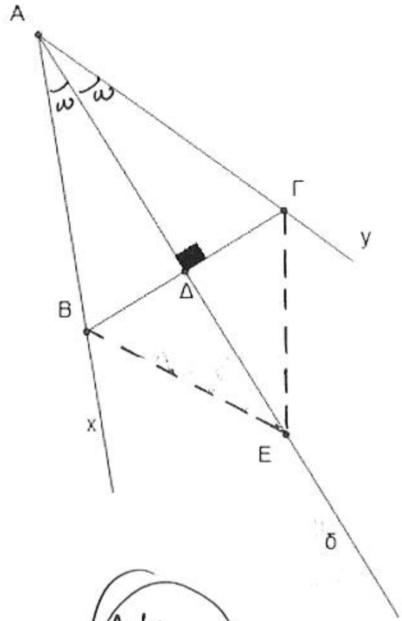
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία xAy και η διχοτόμος της Αδ. Από τυχαίο σημείο Β της Αx φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την Αδ στο Δ και την Αy στο Γ.

Να αποδείξετε ότι :

α) Τα τμήματα ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Το τυχαίο σημείο Ε της Αδ ισαπέχει από τα Β και Γ. (Μονάδες 13)



Λύση

α) Η ΑΔ είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ άρα αυτό θα είναι ισοσκελές δηλαδή ΑΒ=ΑΓ

β) Το ύψος ΑΔ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (από α)) θα είναι και διάμεσος, άρα η ΑΕ θα είναι μεσοκάθετος του ΒΓ επομένως ΕΒ=ΕΓ.

ΘΕΜΑ 2

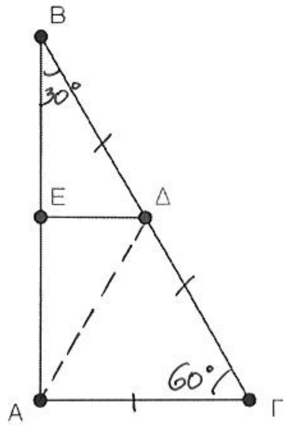
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ και $\hat{B} = 30^o$. Αν τα σημεία Ε και Δ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα με ΕΔ=1, να υπολογίσετε τα τμήματα:

α) ΑΓ...... (Μονάδες 8)

β) ΒΓ..... (Μονάδες 9)

γ) ΑΔ..... (Μονάδες 8)

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



Λύση

α) Επειδή Ε και Δ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα θα έχουμε $Ε\Delta = \frac{ΑΓ}{2} \Leftrightarrow ΑΓ = 2Ε\Delta = 2 \cdot 1 = 2$

β) Αφού $\hat{B} = 30^\circ$ και $\hat{A} = 90^\circ$ είναι $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$ άρα $ΒΓ = 2ΑΓ = 2 \cdot 2 = 4$

γ) Έχουμε $Α\Delta = \frac{ΒΓ}{2}$ ως διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ επομένως $Α\Delta = \frac{4}{2}$ ή $Α\Delta = 2$

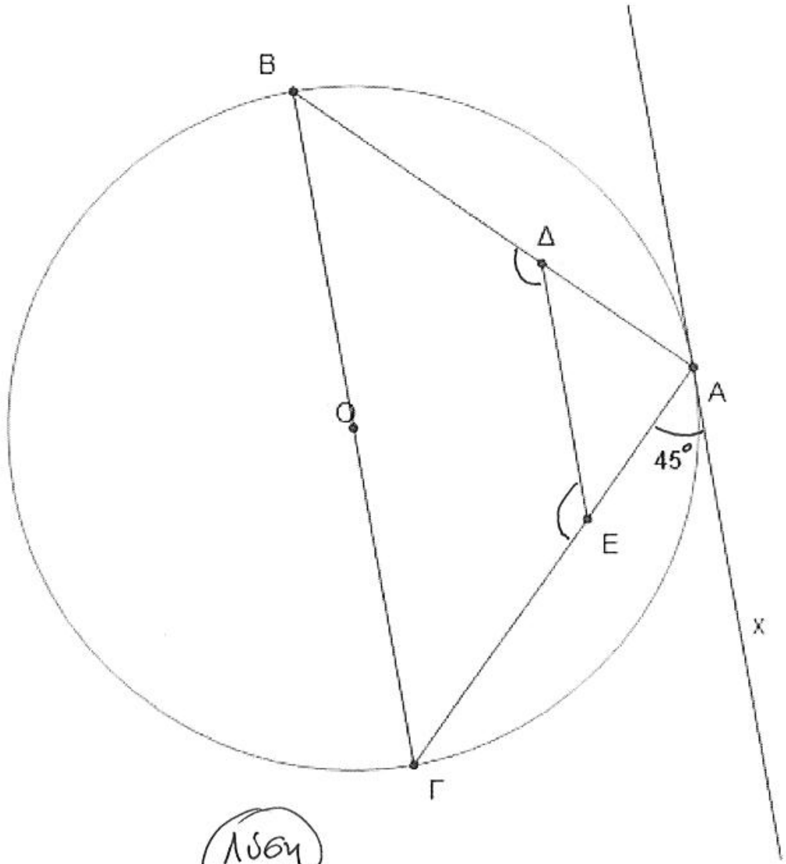
5623

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου ΒΓ. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Α ώστε να σχηματίζει με τη χορδή ΑΓ γωνία 45°. Φέρουμε επίσης μια παράλληλη ευθεία στη ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΓ. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του. (Μονάδες 15)



Λύση

α) είναι $B\hat{A}\Gamma = 90^{\circ}$ (εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο) και $\hat{B} = 45^{\circ}$ (γωνία χορδής – εφαπτομένης) οπότε η $\hat{\Gamma} = 45^{\circ}$ στο τρίγωνο ΑΒΓ.

β) επειδή ΔΕ // ΒΓ το τετράπλευρο ΒΓΕΔ θα είναι τραπέζιο και μάλιστα ισοσκελές διότι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^{\circ}$. Είναι $\Delta\hat{E}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^{\circ}$ (ως εντός και επί τα αυτά μέρη) άρα $\Delta\hat{E}\Gamma = 135^{\circ}$ ομοίως και $B\hat{\Delta}E = 135^{\circ}$

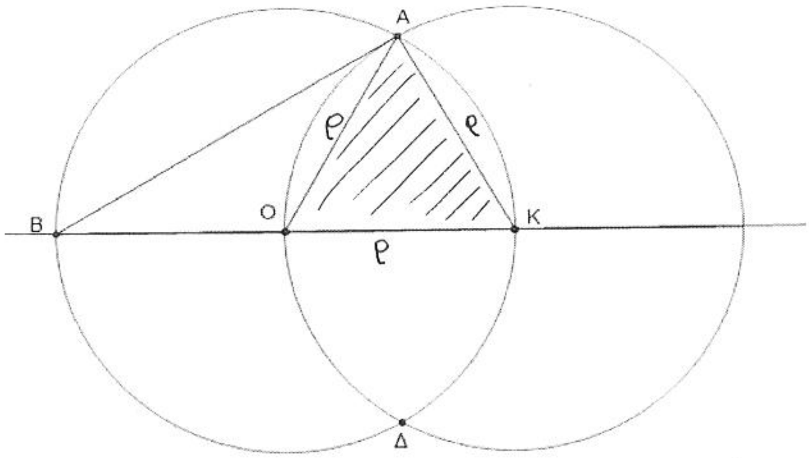
5626

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δυο ίσοι κύκλοι (Ο,ρ) και (Κ,ρ) με ΟΚ=ρ, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Δ.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΚ. (Μονάδες 15)



Λύση

α) Είναι $OA = KO = KA = \rho$ που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο.

β) Έχουμε $B\hat{A}K = 90^\circ$ (ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο)
επίσης $A\hat{K}B = 60^\circ$ αφού το $O\hat{A}K$ είναι ισόπλευρο, επομένως $\hat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

5628

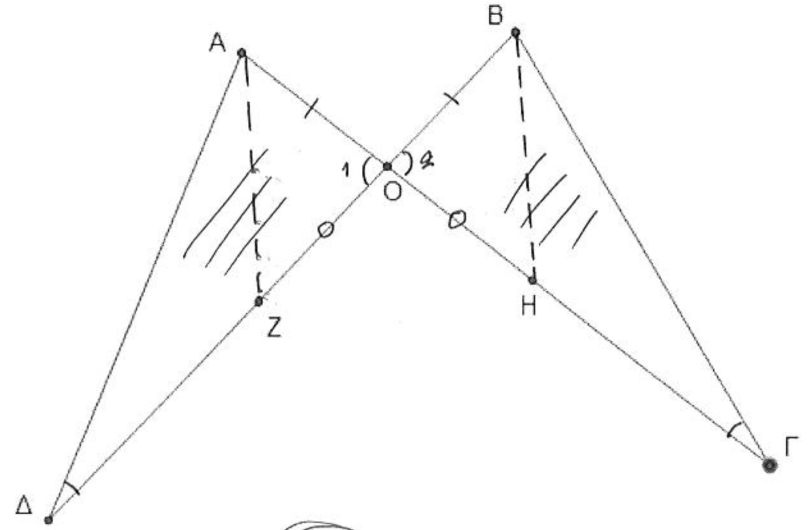
ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα τμήματα ΑΓ=ΒΔ που τέμνονται στο σημείο Ο έτσι ώστε ΟΑ=ΟΒ, και τα σημεία Η και Ζ στα τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΟΗ=ΟΖ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες $A\hat{\Delta}O$ και $B\hat{\Gamma}O$ είναι ίσες. (Μονάδες 12)

β) ΑΖ=ΒΗ . (Μονάδες 13)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ έχουν:

- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (ως κατακορυφήν)
- ΟΑ = ΟΒ (υπόθεση)
- ΟΔ = ΟΓ (αφού ΒΔ = ΑΓ και ΟΒ = ΟΑ)

οπότε $O\overset{\triangle}{A}\Delta = O\overset{\triangle}{B}\Gamma$ άρα $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$

β) Έχουμε $O\overset{\triangle}{A}Z = O\overset{\triangle}{B}H$ διότι $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, ΟΑ = ΟΒ και ΟΖ = ΟΗ

οπότε ΑΖ = ΒΗ.

5630

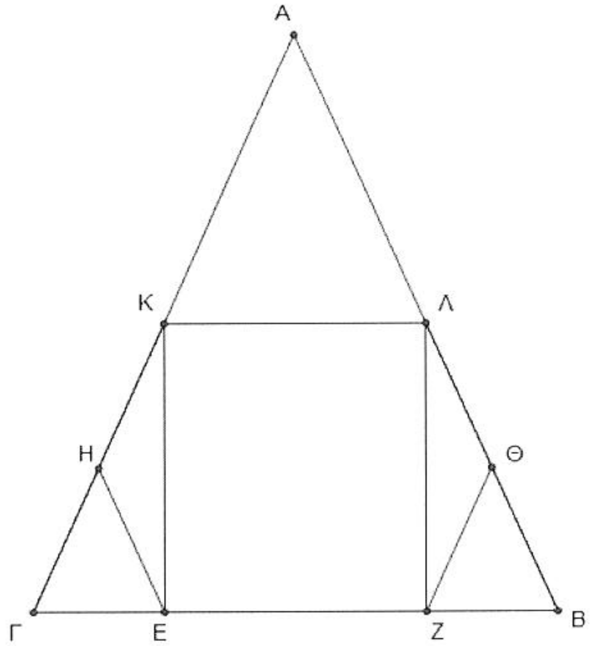
ΘΕΜΑ 2

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Από τα μέσα Κ και Λ των πλευρών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΚΕ και ΛΖ στην πλευρά ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\text{ΚΕΓ}}$ και $\overset{\Delta}{\text{ΛΖΒ}}$ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

β) ΕΗ=ΖΘ, όπου Η , Θ τα μέσα των τμημάτων ΚΓ, ΛΒ αντίστοιχα. (Μονάδες 10)



Λύση

α) είναι $\overset{\Delta}{\text{ΚΕΓ}} = \overset{\Delta}{\text{ΛΖΒ}}$ αφού είναι ορθογώνια ($\widehat{\text{ΚΕΓ}} = \widehat{\text{ΛΖΒ}} = 90^\circ$), $\hat{\Gamma} = \hat{B}$ (ΑΒΓ ισοσκελές) και ΚΓ = ΛΒ (ως μισά των ίσων πλευρών ΑΓ και ΑΒ)

β) Το ΕΗ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΚΕΓ άρα $ΕΗ = \frac{ΚΓ}{2}$ (1)

όμοια ΖΘ διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΛΖΒ άρα $ΖΘ = \frac{ΛΒ}{2}$ (2) όμως ΚΓ = ΛΒ οπότε από (1),(2) είναι ΕΗ = ΖΘ

5633

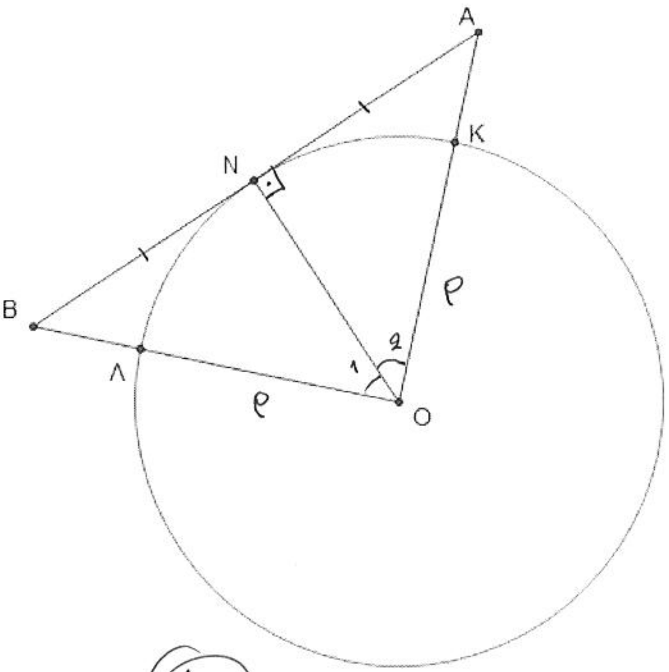
ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ. Σε σημείο N του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του N θεωρούμε σημεία A και B, τέτοια ώστε NA=NB. Οι OA και OB τέμνουν τον κύκλο στα K και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{AOB}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Το σημείο N είναι μέσο του τόξου ΚΛ. (Μονάδες 12)



Λύση

α) Η ΟΝ είναι διάμεσος (ΝΑ=ΝΒ) και ύψος (ΑΒ εφαπτομένη) του τριγώνου ΟΑΒ άρα αυτό θα είναι ισοσκελές.

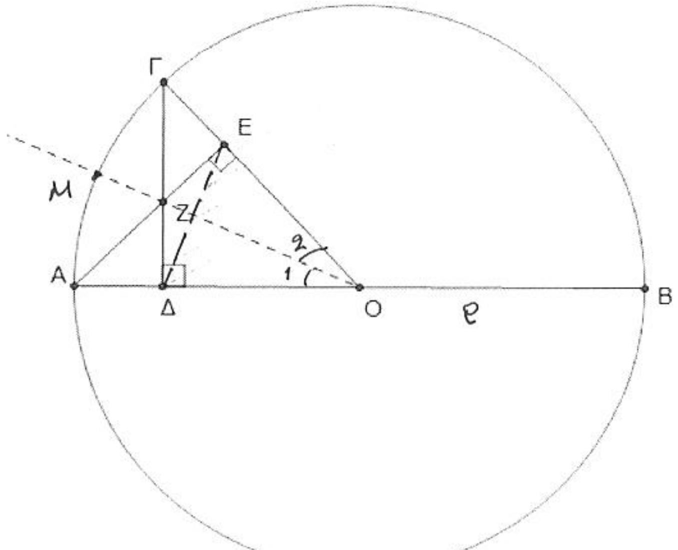
β) Η διάμεσος ΟΝ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΟΒ θα είναι και διχοτόμος δηλαδή $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ οπότε $\overset{\frown}{N\Lambda} = \overset{\frown}{NK}$ που σημαίνει ότι το Ν θα είναι το μέσο του τόξου ΚΛ.

ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν ΑΕ κάθετο στην ΟΓ και ΓΔ κάθετο στην ΑΟ να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Delta O E}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Η ΟΖ διχοτομεί τη γωνία $A\hat{O}\Gamma$ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου ΑΓ. (Μονάδες 12)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΕ έχουν:

- $\Gamma\hat{\Delta}O = A\hat{E}O = 90°$
- $\Gamma\hat{O}\Delta$: κοινή
- $O\Gamma = OA = \rho$

οπότε $\overset{\triangle}{O\Gamma\Delta} = \overset{\triangle}{OAE}$ άρα $OE = O\Delta$ δηλαδή το $\overset{\triangle}{\Delta O E}$ είναι ισοσκελές

β) Είναι $\overset{\triangle}{OEZ} = \overset{\triangle}{OZ\Delta}$ (ορθογώνια, ΟΖ κοινή και $OE = O\Delta$) άρα $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ που σημαίνει ότι ΟΖ διχοτόμος της $\Delta\hat{O}E$. Έχουμε $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{M\Gamma}$ διότι $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (επίκεντρες ίσες) άρα το Μ είναι το μέσο του τόξου ΑΓ.

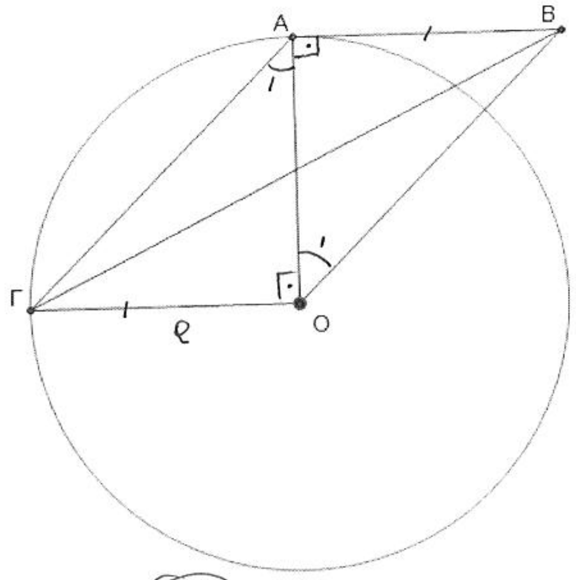
5635

ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε κάθετες ακτίνες ΟΑ , ΟΓ και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα ΑΒ με $AB = O\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΟ και ΒΓ διχοτομούνται. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΟΓ. (Μονάδες 15)



Λύση

α) Επειδή ΑΒ εφαπτόμενο τμήμα θα είναι $OA \perp AB$ επίσης είναι $OA \perp O\Gamma$ επομένως $AB // O\Gamma$. Έχουμε δηλαδή $AB =// O\Gamma$ που σημαίνει ότι το τετράπλευρο ΑΒΟΓ είναι παραλληλόγραμμο άρα οι διαγώνιες ΑΟ και ΒΓ διχοτομούνται.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΒ και ΑΟΓ είναι ισοσκελή ($AB = OA = \rho$ και $OA = O\Gamma = \rho$) άρα $A\hat{B}O = \hat{O}_1 = O\hat{\Gamma}A = \hat{A}_1 = 45^\circ$ και $\Gamma\hat{A}B = \Gamma\hat{O}B = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$.

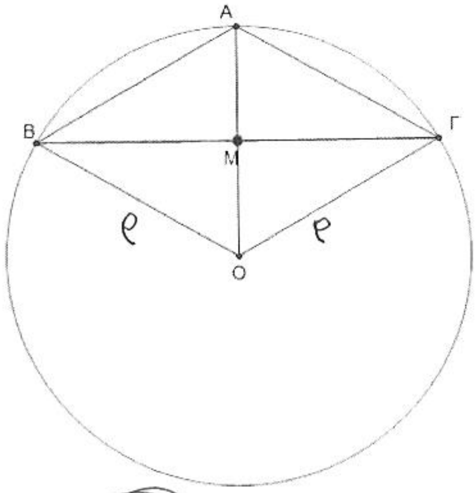
5637

ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε την ακτίνα ΟΑ και τη χορδή ΒΓ κάθετη στην ΟΑ στο μέσο της Μ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΟΒ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΟΒ. (Μονάδες 15)



Λύση

α) Το απόστημα ΟΜ της χορδής ΒΓ είναι και διάμεσος της άρα ΜΒ=ΜΓ επίσης ΜΑ=ΜΟ που σημαίνει ότι οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΓΟΒ διχοτομούνται και είναι κάθετοι ($ΟΑ \perp ΒΓ$) επομένως το ΑΓΟΒ είναι ρόμβος

β) Αφού το τετράπλευρο ΑΓΟΒ είναι ρόμβος, έχουμε $ΑΒ = ΟΑ = ΟΒ = ρ$ οπότε το τρίγωνο ΑΒΟ είναι ισόπλευρο άρα $\hat{Β} = 60° = \hat{Γ}$ και $Β\hat{Α}Γ = Β\hat{Ο}Γ = 120°$ ($180° - 60°$).

5638

ΘΕΜΑ 2

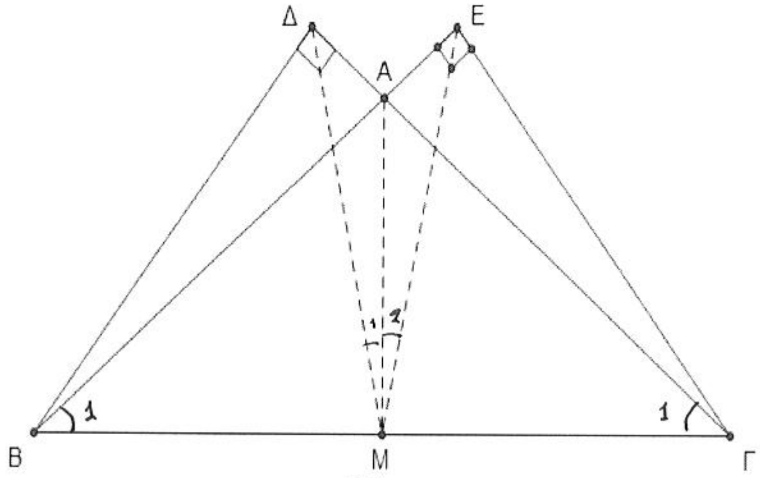
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ ($\mathrm{AB = A\Gamma}$). Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ προς το Α φέρνουμε τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{B\Delta = \Gamma E}$. (Μονάδες 10)

β) Αν Μ το μέσο της ΒΓ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{M\Delta = ME}$. (Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι η ΑΜ διχοτομεί τη γωνία $\mathrm{\Delta\hat{M}E}$ (Μονάδες 7)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ :

- $\hat{\Delta} = \hat{E} = 90^\circ$
- ΒΓ κοινή
- $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές)

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε ΒΔ = ΓΕ

β) i. Η ΔΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΔΒΓ οπότε $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2}$ ομοίως $EM = \frac{B\Gamma}{2}$ ως διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΕΒΓ επομένως ΜΔ = ΜΕ

ii. Είναι $\overset{\Delta}{A\Delta M} = \overset{\Delta}{AME}$ (ΑΜ κοινή, ΔΜ = ΜΕ και ΑΔ = ΑΕ αφού ΔΓ = ΒΕ, ΑΓ = ΑΒ)

οπότε $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ άρα η ΜΑ διχοτομεί τη γωνία $\Delta\hat{M}E$

5641

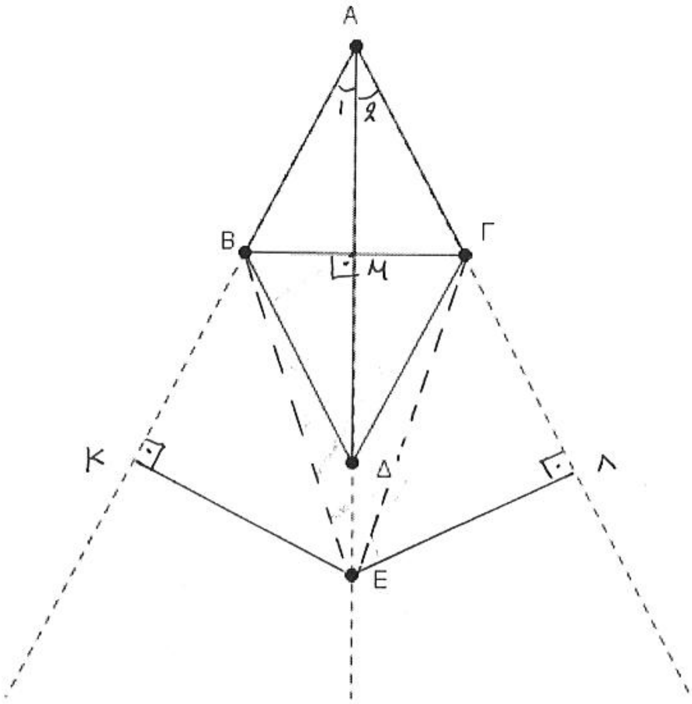
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ρόμβος ΑΒΔΓ. Στην προέκταση της διαγωνίου ΑΔ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο Ε ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ (προς το μέρος των Β και Γ αντίστοιχα). (Μονάδες 10)

β) Το σημείο Ε ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ. (Μονάδες 15)



Λύση

α) Επειδή το ΑΒΔΓ είναι ρόμβος η ΑΔ διχοτομεί τη γωνία Α άρα το Ε ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας Α, άρα ΕΚ = ΕΛ

β) οι διαγώνιες του ρόμβου ΑΒΔΓ διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα άρα ΕΜ διάμεσος και ύψος του τριγώνου ΕΒΓ οπότε θα είναι ισοσκελές, άρα ΕΒ = ΕΓ.

5644

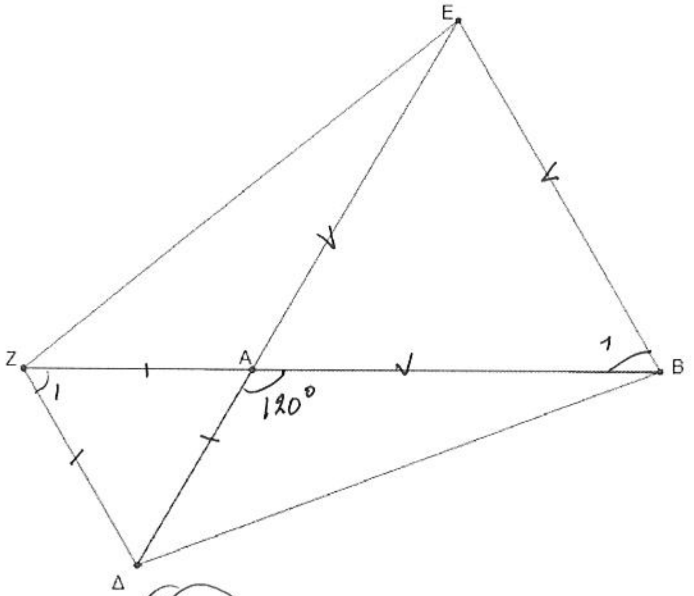
ΘΕΜΑ 2

Έστω τρίγωνο ΑΒΔ με $\hat{A} = 120^o$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AEB}$ και $\overset{\Delta}{AZ\Delta}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΒΔΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 13)



Λύση

α) Έχουμε $\overset{\Delta}{AEZ} = \overset{\Delta}{AB\Delta}$ διότι $\Delta\hat{A}B = Z\hat{A}E$ (κατακορυφήν), $AZ = A\Delta$ και $AE = AB$

β) Είναι $\hat{Z}_1 = \hat{B}_1 = 60^o$ επομένως $EB // Z\Delta$ ($\hat{Z}_1, \hat{B}_1$ εντός εναλλάξ) άρα το ΖΔΒΕ είναι τραπέζιο και επειδή $EZ = B\Delta$ θα είναι ισοσκελές τραπέζιο.

5646

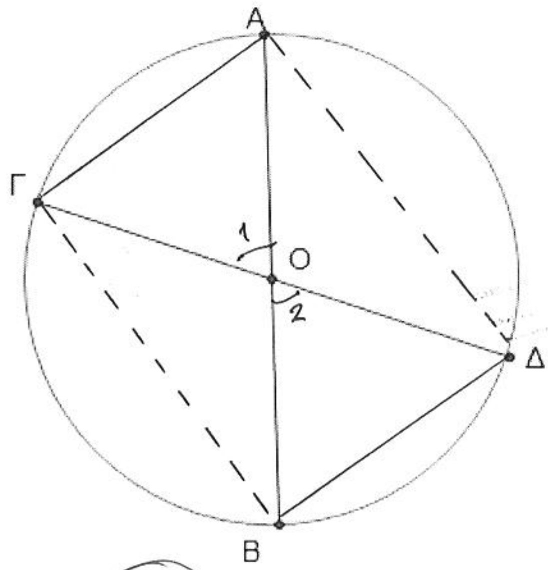
ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε δυο διαμέτρους του ΑΒ και ΓΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι χορδές ΑΓ και ΒΔ του κύκλου είναι ίσες. (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο ΑΓΒΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)



Λύση

α) Είναι $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ ως κατακορυφήν οπότε ΑΓ = ΒΔ

β) έχουμε ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ άρα οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ διχοτομούνται και είναι ίσες επομένως το ΑΓΒΔ είναι ορθογώνιο.

2ος τρόπος

Είναι $\hat{A} = \hat{\Gamma} = \hat{B} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένες σε ημικύκλια, άρα το ΑΓΒΔ είναι ορθογώνιο

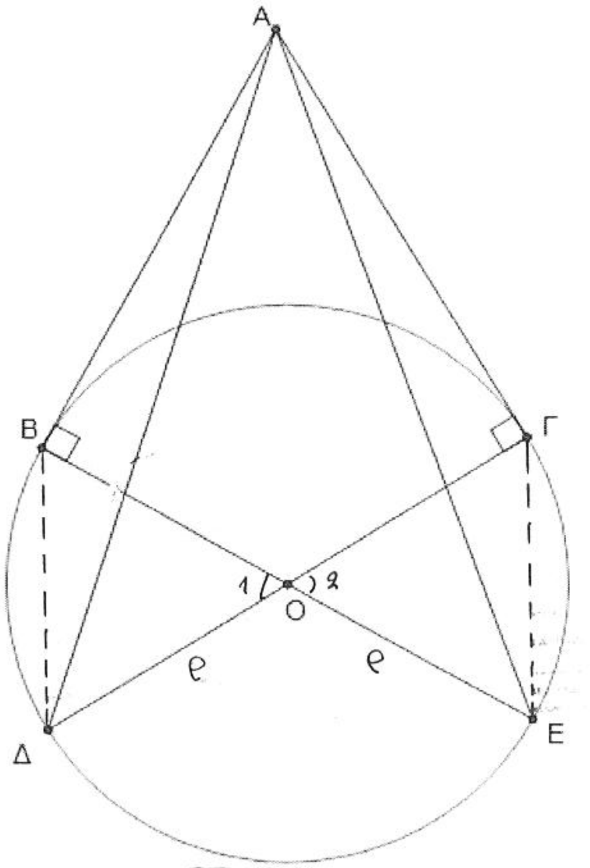
ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Από σημείο Α εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ. Τα σημεία Ε και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των Β και Γ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν:

- $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$
- $AB = A\Gamma$ (ως εφαπτόμενα τμήματα)
- $B\Gamma = \Delta\Gamma = 2\rho$

άρα τα τρίγωνα είναι ίσα

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $A\Delta = AE$ (αφού $AB\hat{E} = A\hat{\Delta}\Gamma$)
- $B\Delta = \Gamma E$ ($\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ ως κατακορυφήν)

Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα

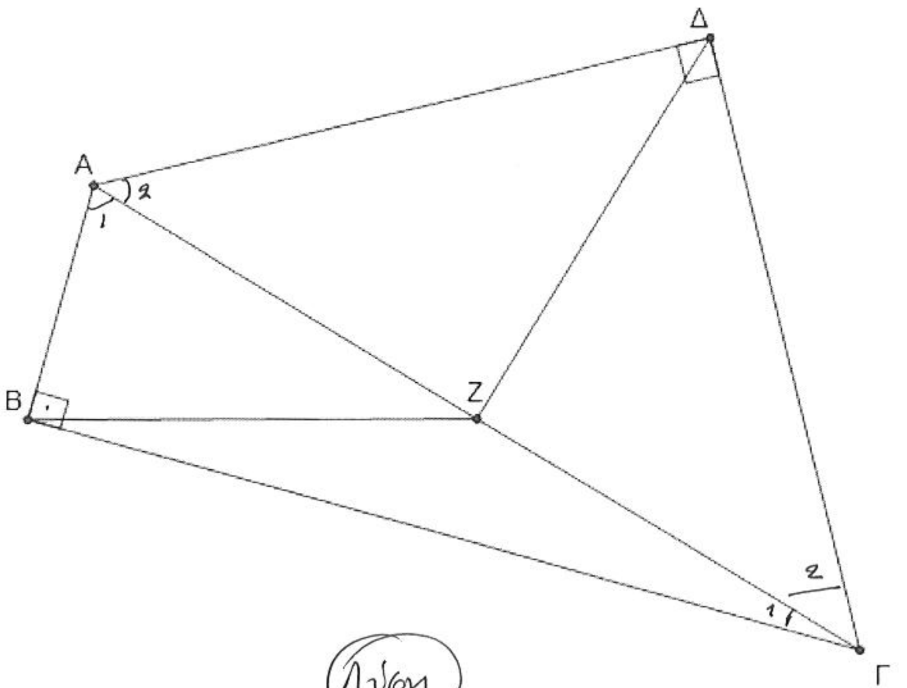
5652

ΘΕΜΑ 2

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Lambda}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με $\overset{\Lambda}{\mathrm{B}} = 90^o$ και Ζ το μέσο του ΑΓ. Με υποτείνουσα το ΑΓ κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta\Gamma}}$ με $\overset{\Lambda}{\Delta} = 90^{O}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{BZ} = \Delta\mathrm{Z}$. (Μονάδες 13)

β) Αν $\mathrm{A}\overset{\Lambda}{\Gamma}\mathrm{B} = 30^o$, να υπολογίσετε τις γωνίες ΒΑΔ και ΒΓΔ. (Μονάδες 12)



Λύση

α) Η ΒΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΒΑΓ άρα $BZ = \frac{ΑΓ}{2}$ (1) ομοίως $ΔZ = \frac{ΑΓ}{2}$ (2) (Ζ το μέσο της ΑΓ), άρα από (1),(2) είναι $BZ = ΔZ$

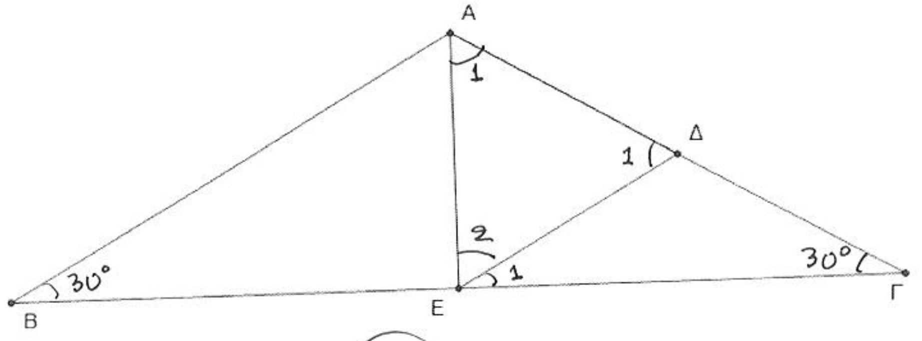
β) Επειδή $\hat{Γ}_1 = 30^\circ$ τότε $\hat{A}_1 = 60^\circ$ ($\hat{B} = 90^\circ$) και $\hat{A}_2 = \hat{Γ}_2 = 45^\circ$ διότι το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο, άρα:
$B\hat{A}Δ = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$ και $B\hat{Γ}Δ = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$

ΘΕΜΑ 2

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$, και γωνία $\hat{\mathrm{B}}$ ίση με 30^{O}. Θεωρούμε Δ και Ε τα μέσα των ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{E\Delta\Gamma}}$ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του. (Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta E}}$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 9)



Λύση

α) Επειδή Ε, Δ τα μέσα των ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα θα ισχύει ΕΔ//ΑΒ άρα $\hat{E}_1 = \hat{B} = 30° = \hat{\Gamma}$ οπότε το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές

2ος τρόπος

Η ΕΔ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΕΑΓ οπότε $E\Delta = \frac{A\Gamma}{2} = \Delta\Gamma$

β) Είναι $\hat{E}_2 = 90° - \hat{E}_1 = 60°$, $\hat{A}_1 = 90° - 30° = 60°$ και $\hat{\Delta}_1 = 60°$ οπότε το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισόπλευρο

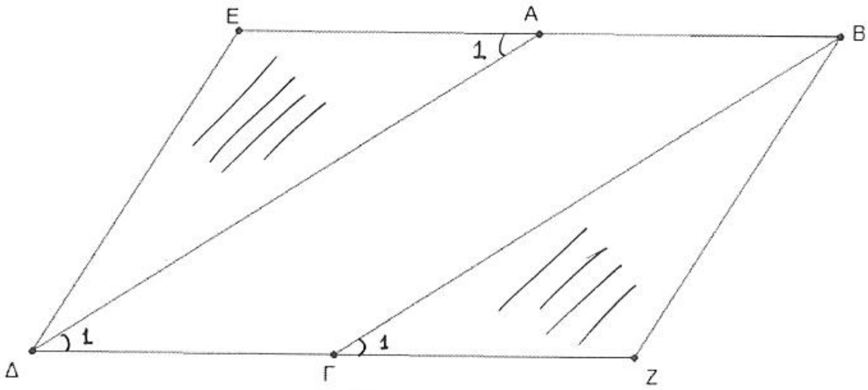
ΘΕΜΑ 2

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ (προς το Α) και την πλευρά ΔΓ (προς το Γ) κατά τμήματα $AE = AB$ και $ΓZ = ΔΓ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $BZ = EΔ$ (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΕΑΔ και ΒΓΖ έχουν:

- $AΔ = BΓ$ (αφού ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο)
- $AE = ΓZ$ (αφού $AE = AB$ και $ΓZ = ΔΓ$)
- $\hat{A}_1 = \hat{Γ}_1$ (αφού $\hat{A}_1 = \hat{Δ}_1$ εντός εναλλάξ και $\hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά)

άρα $\overset{\triangle}{EAΔ} = \overset{\triangle}{BΓZ}$ οπότε $BZ = EΔ$

β) Έχουμε $EB = 2AB$ και $ΔZ = 2ΔΓ$ άρα $EB = ΔZ$ και $BZ = EΔ$ από το α) Επομένως το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

5733

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το χάρτη μίας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Αx και Αy παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία Β και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια.

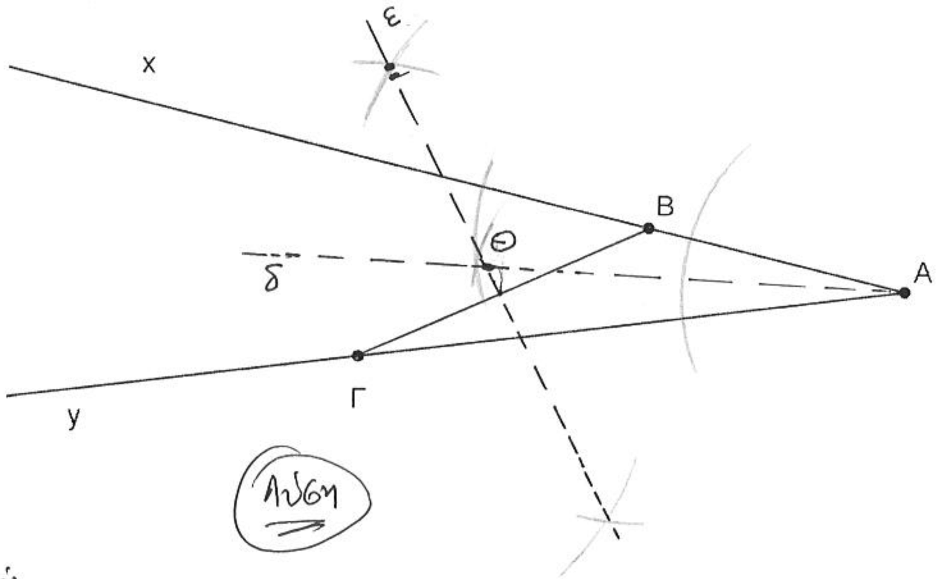
Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

α) ισαπέχει από τα δύο πλατάνια. (Μονάδες 9)

β) ισαπέχει από τα δύο ποτάμια. (Μονάδες 9)

γ) ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια. (Μονάδες 7)

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.



Λύση

α) Αφού θέλουμε να ισαπέχει από τα Β,Γ θα βρίσκεται στη μεσοκάθετη ε του τμήματος ΒΓ

β) επειδή θέλουμε να ισαπέχει από τις πλευρές Αx και Αy της γωνίας $x\hat{A}y$ θα ανήκει στη διχοτόμο δ της γωνίας $x\hat{A}y$

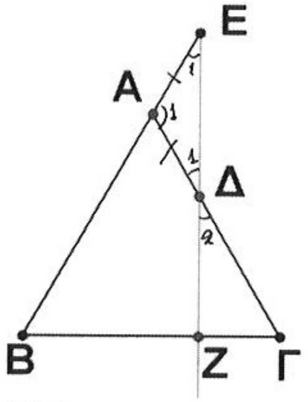
γ) Η θέση του θησαυρού θα είναι η τομή της ε με τη διχοτόμο δ

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε σημείο Ε στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς ΑΓ, ώστε ΑΕ=ΑΔ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 10)

β) Αν Ζ είναι το σημείο τομής της προέκτασης της ΕΔ (προς το Δ) με την ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΕΖ είναι κάθετη στην ΒΓ. (Μονάδες 15)



Λύση

α) Είναι $\hat{A}_1 = \hat{A}_{εξ} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ και $\hat{E}_1 = \hat{Δ}_1$ ($\overset{\triangle}{AEΔ}$: ισοσκελές)

οπότε $\hat{E}_1 = \hat{Δ}_1 = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

β) Έχουμε $\hat{Δ}_2 = \hat{Δ}_1 = 30^\circ$ (ως κατακορυφήν), $\hat{Γ} = 60^\circ$ οπότε

$\hat{Z} = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$ που σημαίνει ότι $EZ \perp BΓ$

ΘΕΜΑ 2

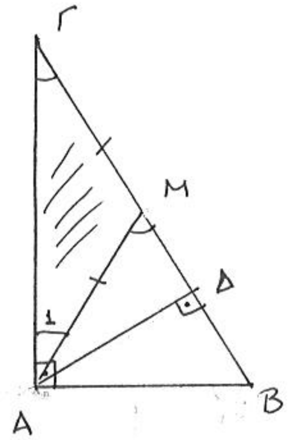
Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ και $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του ΑΔ και την διάμεσο ΑΜ στην πλευρά ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) οι γωνίες $\hat{B}$ και $\Gamma\hat{A}\Delta$ είναι ίσες, (Μονάδες 12)

β) $A\hat{M}\Delta = 2 \cdot \hat{\Gamma}$. (Μονάδες 13)

Λύση



α) είναι $\hat{B} = \Gamma\hat{A}\Delta$ ως οξείες με κάθετες πλευρές ($BA \perp A\Gamma$ και $B\Gamma \perp A\Delta$)

β) Έχουμε $A\hat{M}\Delta = \hat{\Gamma} + \hat{A}_1$ (1)
ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΜΓ.
Όμως $AM = M\Gamma$ (ΑΜ διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ) άρα $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ (2)
Από (1),(2) προκύπτει ότι $A\hat{M}\Delta = 2\hat{\Gamma}$

6582

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = 60^{o}$. Φέρουμε τα ύψη ΑΕ και ΒΖ του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία ΔΓ.

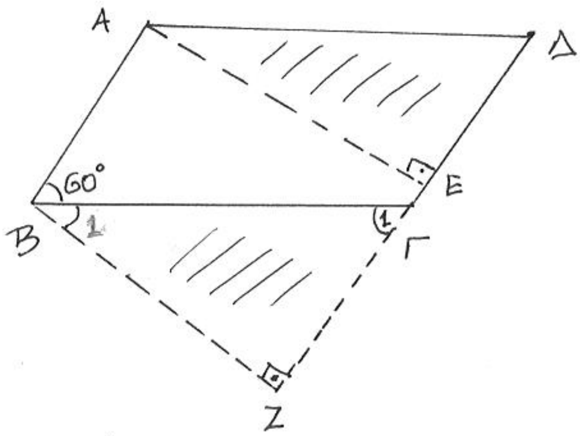
Να αποδείξετε ότι:

α) $ΓΖ = \frac{ΑΔ}{2}$, (Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ίσο με το τρίγωνο ΒΓΖ, (Μονάδες 9)

γ) το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

Λύση



α) Είναι $\hat{Γ}_1 = 60^\circ$ (ως εντός εναλλάξ) οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΓ η $\hat{B}_1 = 30^\circ$ οπότε $ΓZ = \frac{BΓ}{2} = \frac{AΔ}{2}$

β) Είναι $A\hat{Δ}E = B\hat{Γ}Z$ αφού είναι ορθογώνια, ΒΓ=ΑΔ και ΑΕ=ΒΖ (ως αποστάσεις των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ)

γ) Είναι ΑΒ//ΓΔ άρα ΑΒ//ΖΕ, ΑΕ//ΒΖ (κάθετες στην ίδια ευθεία) άρα είναι παραλ/μο με $\hat{Z} = 90^\circ$ άρα είναι ορθογώνιο

2ος τρόπος

Έχουμε $A\hat{B}Z = \hat{Z} = \hat{E} = 90^\circ$ οπότε το ΑΒΖΕ είναι ορθογώνιο

6583

ΘΕΜΑ 2

Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ν και Κ των ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΝ = ΚΓ .

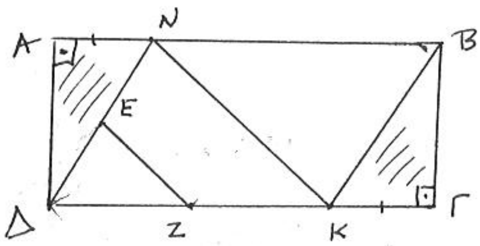
α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα , (Μονάδες 8)

ii. το τετράπλευρο ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Αν Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΝΔ και ΔΚ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΝΚΖΕ είναι τραπέζιο . (Μονάδες 9)

Λύση



α) i. Είναι $\overset{\triangle}{ΑΝΔ} = \overset{\triangle}{ΒΓΚ}$ αφού είναι ορθογώνια, ΑΝ=ΚΓ και ΑΔ=ΒΓ

ii. Έχουμε ΝΒ=ΑΒ-ΑΝ και ΔΚ=ΔΓ-ΚΓ όμως ΑΒ=ΔΓ και ΑΝ=ΚΓ άρα ΝΒ=ΔΚ, επίσης ΝΒ//ΔΚ οπότε το ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο

β) Αφού Ε, Ζ τα μέσα των ΔΝ και ΔΚ αντίστοιχα θα ισχύει ΕΖ//ΝΚ που σημαίνει ότι το τετράπλευρο ΝΚΖΕ είναι τραπέζιο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α. Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Ε.

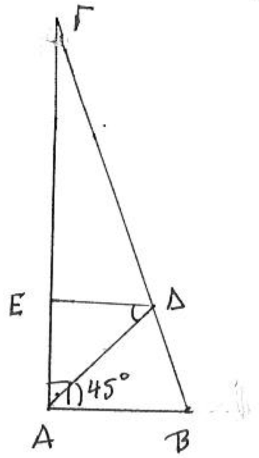
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΑΔΕ. (Μονάδες 9)

γ) Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20 μοίρες μεγαλύτερη της γωνίας $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{\Delta}\Gamma$.

(Μονάδες 7)

Λύση



α) Αφού ΕΔ//ΑΒ η $\hat{E} = \hat{A} = 90°$
(ως εντός εναλλάξ)
οπότε το ΕΔΓ είναι ορθογώνιο

β) Έχουμε $A\hat{\Delta}E = 45°$ (ως εντός εναλλάξ)

γ) είναι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90°$ και $\hat{B} = 20° + \hat{\Gamma}$ άρα $20° + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90° \Leftrightarrow$
$2\hat{\Gamma} = 70° \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 35°$ οπότε $\hat{B} = 55°$
Η γωνία $E\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B} = 55°$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη)

6585

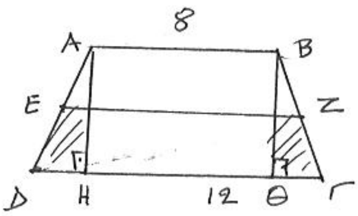
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ=8 και ΔΓ=12. Αν ΑΗ και ΒΘ τα ύψη του τραπεζίου,

α) να αποδείξετε ότι ΔΗ = ΘΓ. (Μονάδες 12)

β) να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπεζίου. (Μονάδες 13)

Λύση



α) Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΒΘΓ έχουν:

- $\hat{H} = \hat{\Theta} = 90°$
- ΑΔ = ΒΓ (ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο)
- $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ (" " ")

άρα είναι ίσα οπότε ΔΗ = ΘΓ

β) Έστω ΕΖ η διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ τότε έχουμε:

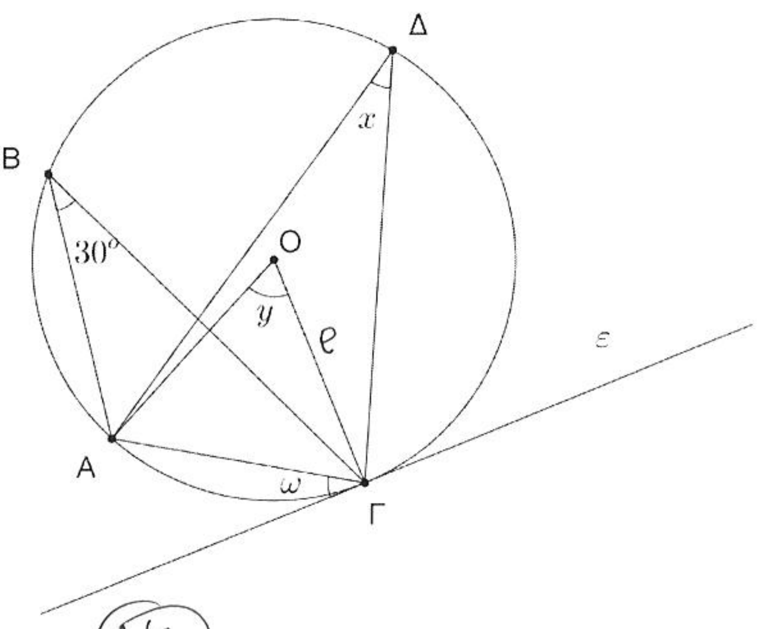
$$EZ = \frac{AB + \Delta\Gamma}{2} = \frac{8+12}{2} = 10$$

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου (Ο,ρ) στο σημείο Γ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες x,y και ω δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΟΑΓ ως προς τις πλευρές. (Μονάδες 10)



Λύση

α) Είναι :

- $x = \hat{B} = 30°$ (εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο)
- $\omega = 30°$ (γωνία χορδής-εφαπτομένης)
- $y = 2\hat{B} = 60°$ (y επίκεντρη και B εγγεγραμμένη στο ίδιο τόξο)

β) Είναι $ΟΑ = ΟΓ = ρ$ και $y = 60°$ άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο αφού $Ο\hat{Α}Γ = Ο\hat{Γ}Α = \frac{180° - 60°}{2} = 60°$.

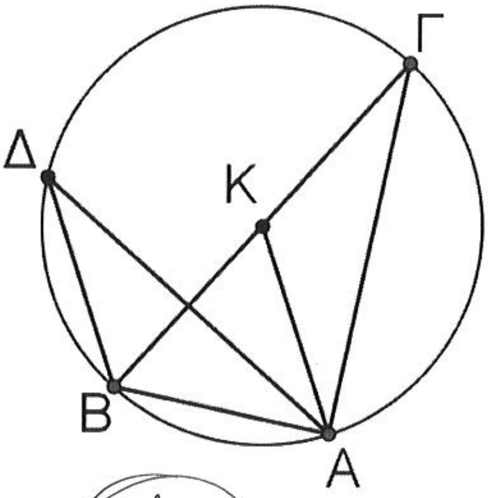
ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος κέντρου Κ, μια διάμετρός του ΒΓ και σημείο Α του κύκλου τέτοιο ώστε ΒΑ=ΚΓ. Αν Δ τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των Β και Γ,

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΚΑ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)

β) να υπολογίσετε την γωνία $B\hat{\Delta}A$. (Μονάδες 9)

γ) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ . (Μονάδες 9)



Λύση

α) είναι $BA = K\Gamma = KA = KB = \rho$ (ρ η ακτίνα του κύκλου)
επομένως το τρίγωνο ΒΚΑ είναι ισόπλευρο

β) έχουμε $B\hat{\Delta}A = \frac{B\hat{K}A}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ ($B\hat{\Delta}A$ εγγεγραμμένη και $B\hat{K}A$ επίκεντη στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{BA}$)

γ) είναι $\hat{A} = 90^\circ$ (εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο), $\hat{B} = 60^\circ$
άρα $\hat{\Gamma} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

ΘΕΜΑ 2

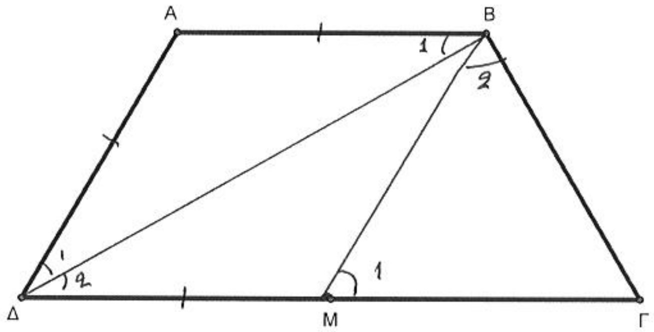
Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος έχουμε ΑΒ=ΑΔ=$\frac{ΓΔ}{2}$, $\hat{Δ} = 60°$ και Μ το μέσο της πλευράς ΓΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Δ}$, (Μονάδες 9)

β) η ΒΜ χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

(Μονάδες 16)



Λύση

α) Είναι $\hat{Δ}_1 = \hat{Β}_1$ αφού το $Α\overset{\triangle}{Δ}Β$ είναι ισοσκελές (ΑΔ=ΑΒ) και $\hat{Δ}_2 = \hat{Β}_1$ (ως εντός εναλλάξ) άρα $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2$ οπότε η ΔΒ διχοτομεί τη $\hat{Δ}$

β). Έχουμε ΔΜ=// ΑΒ άρα το τετράπλευρο ΑΒΜΔ είναι παραλληλόγραμμο και μάλιστα ρόμβος αφού η ΔΒ διχοτομεί τη $\hat{Β}$

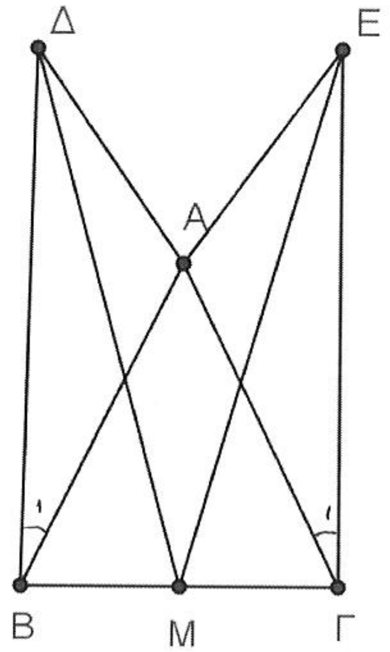
• Είναι $\hat{Μ}_1 = \hat{Δ} = 60°$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη)
επίσης ΜΒ=ΜΔ=ΜΓ άρα το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισόπλευρο αφού $\hat{Γ} = \hat{Β}_2 = \frac{180° - 60°}{2} = 60°$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Στα σημεία Β και Γ της ΒΓ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της ΒΓ, τα τμήματα $Β\Delta \perp ΒΓ$ και $ΓΕ \perp ΒΓ$ τέτοια ώστε ΒΔ=ΓΕ. Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα, (Μονάδες 12)

β) ΑΔ=ΑΕ. (Μονάδες 13)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν:

- $\Delta\hat{Β}Γ = Ε\hat{Γ}Β = 90°$
- ΒΜ = ΜΓ (Μ μέσο ΒΓ)
- ΒΔ = ΓΕ

άρα τα τρίγωνα είναι ίσα

β) Τα τρίγωνα ΒΑΔ και ΓΑΕ έχουν:

- ΒΔ = ΓΕ
- ΒΑ = ΓΑ
- $\hat{Β}_1 = 90° - \hat{Β}$ ενώ $\hat{Γ}_1 = 90° - \hat{Γ}$ άρα $\hat{Β}_1 = \hat{Γ}_1$

οπότε $Β\hat{Α}\Delta = Γ\hat{Α}Ε$ επομένως ΑΔ=ΑΕ.

6593

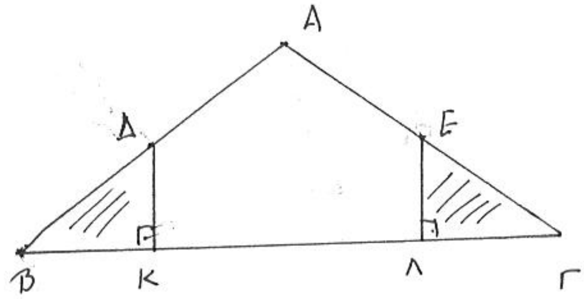
ΘΕΜΑ 2

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) .

α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ. (Μονάδες 13)

β) Αν $\hat{A} = 75° + \hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

Λύση



α) Έστω ΔΚ και ΕΛ οι αποστάσεις των Δ, Ε (αντίστοιχα) από τη ΒΓ τότε $\overset{\triangle}{\Delta BK} = \overset{\triangle}{E\Lambda\Gamma}$ αφού είναι ορθογώνια $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90°$, $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και ΒΔ = ΕΓ ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ, επομένως ΔΚ = ΕΛ

β) Έστω $\hat{B} = \hat{\Gamma} = x$ τότε $\hat{A} = 75° + x$ οπότε έχουμε:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180° \Leftrightarrow 75° + x + x + x = 180° \Leftrightarrow 3x = 105° \Leftrightarrow x = 35°$

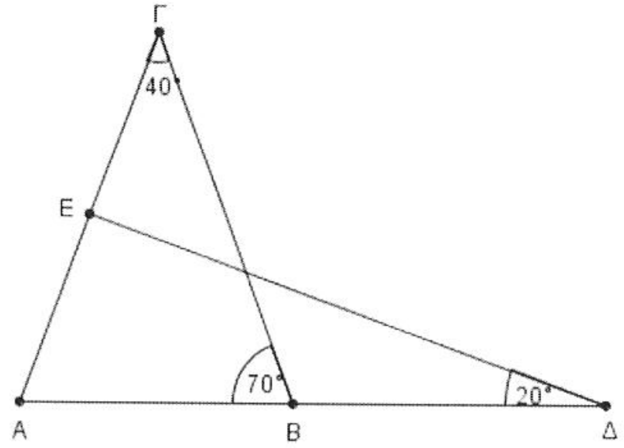
άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 35°$ και $\hat{A} = 75° + 35° = 105°$.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 12)

β) η γωνία ΑΕΔ είναι ορθή. (Μονάδες 13)



Λύση

α) Είναι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}+70^\circ+40^\circ=180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}=70^\circ=\hat{B}$
οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές

β) Έχουμε στο τρίγωνο ΑΕΔ: $\hat{A}=70^\circ$, $\hat{\Delta}=20^\circ$ και
$\hat{E}=180^\circ-(70^\circ+20^\circ)$ ή $\hat{E}=90^\circ$

6882

ΘΕΜΑ 2

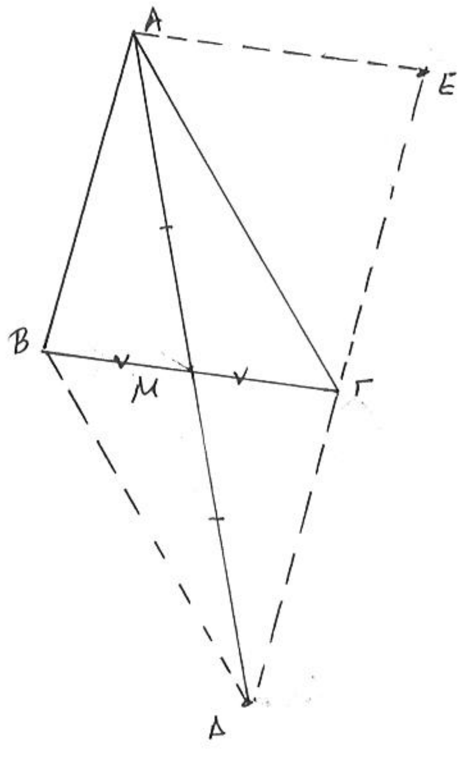
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και Μ το μέσο της ΒΓ. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα ΜΔ=ΜΑ. Από το Α φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 12)

β) $\mathrm{BM} = \frac{\mathrm{AE}}{2}$ (Μονάδες 13)

Λύση



α) Οι διαγώνιες ΑΔ και ΒΓ του τετραπλεύρου ΑΒΔΓ διχοτομούνται (ΑΜ=ΜΔ, ΒΜ=ΜΓ) άρα το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο

β) Είναι ΑΕ//ΒΓ και ΓΕ//ΑΒ άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο οπότε ΑΕ = ΒΓ = 2ΒΜ άρα

$ΒΜ = \frac{ΑΕ}{2}$

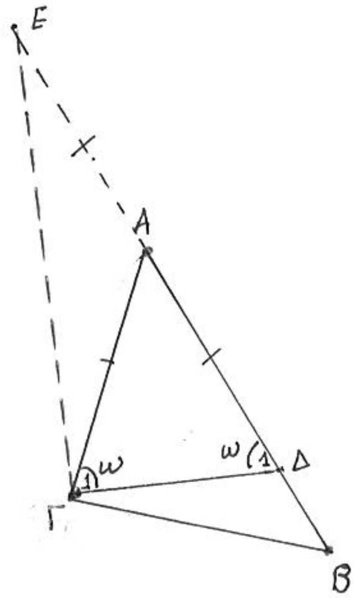
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε $ΑΓ < ΑΒ$. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $ΑΔ = ΑΓ$ και στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $ΑΕ = ΑΓ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $ΔΓ \perp ΕΓ$, (Μονάδες 12)

β) η γωνία ΕΑΓ είναι διπλάσια της γωνίας ΑΔΓ. (Μονάδες 13)



Λύση

α) Επειδή στο τρίγωνο ΓΕΔ η διάμεσος $ΓΑ = \frac{ΕΔ}{2}$ η γωνία $Δ\hat{Γ}Ε = 90^\circ$ άρα $ΔΓ \perp ΕΓ$

β) Έχουμε $Ε\hat{Α}Γ = \hat{Γ}_1 + \hat{Δ}_1 = ω + ω = 2ω$ δηλαδή (εξωτερική του $Α\overset{\triangle}{Γ}Δ$)

$Ε\hat{Α}Γ = 2\, Α\hat{Δ}Γ$

6886

ΘΕΜΑ 2

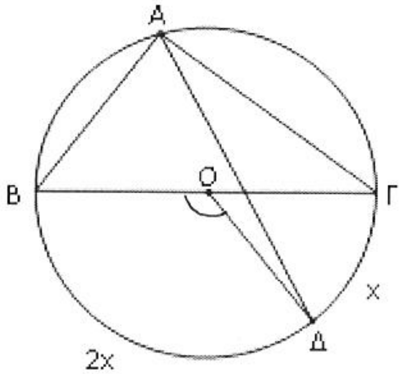
Έστω κύκλος κέντρου Ο και διαμέτρου ΒΓ. Θεωρούμε τα σημεία Α και Δ του κύκλου εκατέρωθεν της ΒΓ, τέτοια ώστε το τόξο ΒΔ να είναι διπλάσιο του τόξου ΔΓ.

Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο x του τόξου ΓΔ, (Μονάδες 8)

β) τη γωνία ΒΟΔ, (Μονάδες 9)

γ) τη γωνία ΒΑΔ. (Μονάδες 8)



Λύση

α) είναι $2x + x = 180^\circ \Leftrightarrow 3x = 180^\circ \Leftrightarrow x = 60^\circ$

β) Έχουμε $\hat{BO\Delta} = 2x = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$

γ) Είναι $\hat{BA\Delta} = \frac{\hat{BO\Delta}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$

(η εγγεγραμμένη είναι το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης)

7452

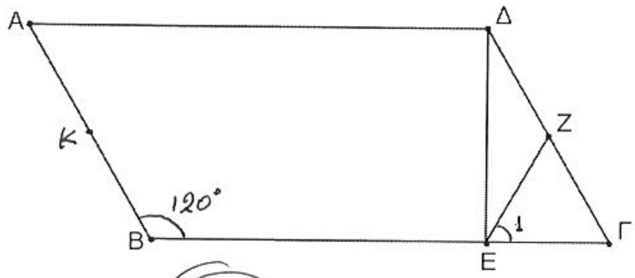
ΘΕΜΑ 2

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{B}=120^0$ και $\Delta E \perp B\Gamma$. Έστω ΕΖ η διάμεσος του τριγώνου ΔΕΓ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Α και Γ του παραλληλογράμμου. (Μονάδες 8)

β) Αν Κ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, να αποδείξετε ότι ΕΖ=ΑΚ. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΕΖΓ. (Μονάδες 8)



Λύση

α) Είναι
$\hat{B}+\hat{A}=180^\circ$ (ως εντός εναλλάξ) ή $120^\circ+\hat{A}=180^\circ$
οπότε $\hat{A}=60^\circ$ επίσης $\hat{\Gamma}=\hat{A}=60^\circ$

β) Η ΕΖ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΕΔΓ
άρα $EZ=\frac{\Delta\Gamma}{2}=\frac{AB}{2}=AK$

γ) Έχουμε $\hat{E}_1=\hat{\Gamma}=60^\circ$ αφού $EZ=\frac{\Delta\Gamma}{2}=Z\Gamma$ οπότε στο τρίγωνο ΖΕΓ η γωνία $E\hat{Z}\Gamma=60^\circ$.

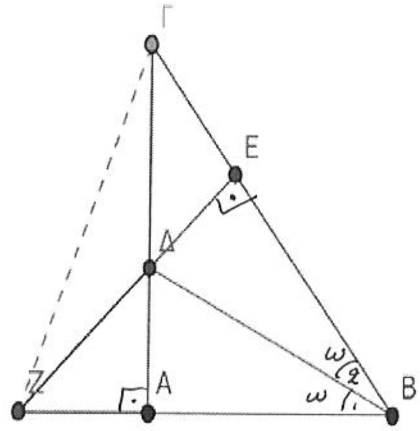
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A=90^0$) και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε ΔΕ⊥ΒΓ που τέμνει την προέκταση της ΑΒ (προς το Α) στο Ζ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΕ=ΑΒ, (Μονάδες 12)

β) το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΒΔΖ έχουν:

- $\hat{E} = \hat{A} = 90°$
- ΒΔ κοινή
- $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \omega$ (ΒΔ διχοτόμος της $\hat{B}$)

άρα $B\overset{\triangle}{\Delta}E = B\overset{\triangle}{\Delta}Z$ οπότε $BE = AB$

β) Τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΖΕΒ έχουν:

- $\hat{A} = \hat{E} = 90°$
- $AB = BE$ (από το α))
- $\hat{B}$: κοινή

άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε $ΓB = BZ$ που σημαίνει ότι το $\overset{\triangle}{BΓZ}$ είναι ισοσκελές.