# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ
# ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

# ΚΡΟΥΣΕΙΣ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

## ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

### Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.5α, 1.6δ, 1.7α, 1.8γ, 1.9α, 1.10α, 1.11β, 1.12γ, 1.13δ, 1.14β, 1.15β, 1.16α, 1.17α, 1.18β, 1.19α, 1.20γ, 1.21β, 1.22δ, 1.23β, 1.24δ, 1.25γ, 1.26γ, 1.27γ, 1.28α, 1.29γ, 1.30δ, 1.31α, 1.32β, 1.33γ, 1.34γ

### Ερωτήσεις κατανόησης

**1.35** β: Επειδή $m_1 = m_2$, οι σφαίρες ανταλλάσσουν ταχύτητες:

$\upsilon_2' = \upsilon_1$ και $\upsilon_1' = 0$

$K_1 = K_1' + K_2'$ ή $K_2' = K_1$

Άρα: $\pi_K\% = \dfrac{K_2'}{K_1}\cdot 100\% = \dfrac{K_1}{K_1}\cdot 100\% = 100\%$

**1.36** α: $K_1 + K_2 = K_1' + K_2'$ ή

$K_1' - K_1 = K_2 - K_2'$ ή $\Delta K_1 = -\Delta K_2$

**1.37** α: $\upsilon_1' = \dfrac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2 + \dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1$ ή

$\upsilon_1' = \dfrac{2m_2}{3m_2}\dfrac{\upsilon_1}{2} + \dfrac{m_2}{3m_2}\upsilon_1$ ή $\upsilon_1' = \dfrac{2\upsilon_1}{3}$

**1.38** β: $\upsilon_1' = \dfrac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2 + \dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 =$

$= \dfrac{2m_2}{4m_2}(-\upsilon) + \dfrac{2m_2}{4m_2}\upsilon = 0$

$\upsilon_2' = \dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 + \dfrac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_2 =$

$= \dfrac{6m_2}{4m_2}\upsilon + \dfrac{-2m_2}{4m_2}(-\upsilon) = 2\upsilon$

**1.39** α: $\upsilon_2' = \dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 = \dfrac{2m_1}{8m_1}\upsilon_1 = \dfrac{\upsilon_1}{4}$

$\pi_K\% = \dfrac{K_2'}{K_1}\cdot 100\% = \dfrac{\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}\cdot 100\% =$

$= \dfrac{7m_1\frac{\upsilon_1^2}{16}}{m_1\upsilon_1^2}\cdot 100\% = 43{,}75\%$

**1.40** γ: $\upsilon_1' = \dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 = \dfrac{-10m_1}{12m_1}\upsilon_1 = -\dfrac{5}{6}\upsilon_1$

$\pi_K\% = \dfrac{K_1'}{K_1}\cdot 100\% = \dfrac{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}\cdot 100\% =$

$= \dfrac{\frac{1}{2}m_1\left(-\frac{5}{6}\upsilon_1\right)^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}\cdot 100\% = 69{,}44\%$

**1.41** α: Επειδή η κρούση είναι κεντρική ελαστική και οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες, ανταλλάσσουν ταχύτητες. Άρα:

$\upsilon_A' = 10\,m/s$ και $\upsilon_B' = 20\,m/s$

**1.42** α: $\upsilon_1' = \dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 = \dfrac{3m_2}{5m_2}\upsilon_1 = \dfrac{3}{5}\upsilon_1$

$p_1' = m_1\upsilon_1' = \dfrac{3}{5}m_1\upsilon_1 = \dfrac{3}{5}p_1$ ή $3p_1 = 5p_1'$

**1.43** α: $\upsilon_1' = \dfrac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2 + \dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 =$

$= \dfrac{4m_1}{3m_1}\upsilon + \dfrac{-m_1}{3m_1}2\upsilon = \dfrac{2}{3}\upsilon = \dfrac{\upsilon_1}{3}$

$\pi_K\% = \dfrac{K_1' - K_1}{K_1}\cdot 100\% =$

$= \left(\dfrac{\upsilon_1'^2}{\upsilon_1^2} - 1\right)\cdot 100\% = -88{,}88\%$

**1.44** γ: Επειδή τα σώματα συγκρούονται, ισχύει: $\upsilon_1 > \upsilon_2$

$K_1 = K_2$ ή $\dfrac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = \dfrac{1}{2}m_2\upsilon_2^2$ ή $m_1 < m_2$

**1.45** β: $\Delta p_1 = p_1' - p_1$ ή $p_1' = \Delta p_1 + p_1$ ή

$p_1' = \dfrac{2}{3}p_1$ ή

$m_1\upsilon_1' = \dfrac{2}{3}m_1\upsilon_1$ ή $\upsilon_1' = \dfrac{2}{3}\upsilon_1$ (1)

$\upsilon_1' = \dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε: $\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2} = \dfrac{2}{3}$ ή

$3m_1 - 3m_2 = 2m_1 + 2m_2$ ή $m_1 = 5m_2$

**1.46** β: $K_1 = K_1' + K_2'$ ή

$$K_1' = K_1 - K_2' = K_1 - \frac{9}{25}K_1 = \frac{16}{25}K_1 \quad ή$$

$$\frac{1}{2}m_1 υ_1'^2 = \frac{16}{25}\cdot\frac{1}{2}m_1 υ_1^2 \quad ή \quad υ_1' = \pm\frac{4}{5}υ_1$$

$υ_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1 > 0$ (1), επειδή: $m_1 > m_2$

Άρα: $υ_1' = \dfrac{4}{5}υ_1$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε: $\dfrac{4}{5}υ_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1$

ή $4m_1 + 4m_2 = 5m_1 - 5m_2$ ή $m_1 = 9m_2$

**1.47** γ: Από το ΘΜΚΕ έχουμε: $\dfrac{1}{2}mυ_1^2 = mgh$

ή $υ_1 = \sqrt{2gh} = 6\,m/s$

Επειδή $m_1 = m_2$, οι σφαίρες ανταλλάσσουν ταχύτητες, δηλαδή: $υ_2' = υ_1 = 6\,m/s$

Για τη σφαίρα μάζας $m_2$ έχουμε:

$$ΣF = m_2 α \quad ή \quad α = \frac{ΣF}{m_2} = \frac{T}{m_2} = \frac{μm_2 g}{m_2} = 1\,m/s^2$$

$$υ_2'' = υ_2' - αΔt \quad ή \quad Δt = \frac{υ_2'}{α} = 6s$$

**1.48** β: Από το ΘΜΚΕ έχουμε:

$$\frac{1}{2}m_1 υ_1^2 - 0 = m_1 g\ell \quad ή \quad υ_1 = \sqrt{2g\ell}$$

$$υ_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1 = -\frac{2m_1}{4m_1}υ_1 = -\frac{υ_1}{2} = -\frac{\sqrt{2g\ell}}{2}$$

$$ΣF = F_κ \quad ή \quad T - w_1 = \frac{m_1 υ_1'^2}{\ell} \quad ή$$

$$T = w_1 + \frac{m_1}{\ell}\cdot\frac{2g\ell}{4}$$

$$ή \quad T = m_1 g + \frac{m_1 g}{2} = \frac{3m_1 g}{2}$$

**1.49** γ: Για τη σφαίρα Α ισχύει:

$$\frac{1}{2}m_A υ_A^2 = m_A gh \quad ή \quad υ_A = \sqrt{2gh}$$

$$υ_A' = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}υ_A = -\frac{m_A}{3m_A}υ_A = -\frac{υ_A}{3}$$

Μετά την κρούση: $\dfrac{1}{2}m_A υ_A'^2 = m_A g h_A$ ή

$$\frac{1}{2}m_A \frac{υ_A^2}{9} = m_A g h_A \quad ή$$

$$\frac{m_A gh}{9} = m_A g h_A \quad ή \quad h_A = \frac{h}{9}$$

**1.50** β: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_x + \vec{p}_y + \vec{p}_z$ ή

$0 = \vec{p}_x + \vec{p}_y + \vec{p}_z$ ή

$\vec{p}_z = -\left(\vec{p}_x + \vec{p}_y\right)$

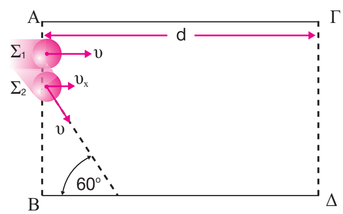
Άρα: $\vec{p}_z = \vec{p}_B$

**1.51** β: $υ_1' = -υ_2'$ ή

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1 = -\frac{2m_1}{m_1 + m_2}υ_1 \quad ή$$

$$m_1 - m_2 = -2m_1 \quad ή \quad 3m_1 = m_2 \quad ή \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$$

**1.52**




α: Για το σώμα $Σ_2$ έχουμε:

$υ_x = υσυν60° = \dfrac{υ}{2}$ (σταθ.)

$d = υt_1$ και $d = υ_x t_2$, άρα: $υt_1 = υ_x t_2$ ή

$υt_1 = \dfrac{υ}{2}t_2$ ή $t_2 = 2t_1$

**1.53** α: $υ_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}υ_1 = \dfrac{3}{5}υ$

$T - w_2 = F_\kappa$ ή $T = m_2 g + \frac{m_2 \upsilon_2'^2}{\ell}$ ή

$T = mg + \frac{25m\upsilon^2}{9\ell}$

**1.54** β: ΘΚΜΕ για τη $\Sigma_1: \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - 0 = m_1 g\ell$ ή

$\upsilon_1 = \sqrt{2g\ell}$

$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -\frac{2m}{4m}\sqrt{2g\ell} = -\frac{\sqrt{2g\ell}}{2}$

$T_1 - m_1 g = F_{\kappa_1}$ ή $T_1 = m_1 g + \frac{m_1\upsilon_1^2}{\ell}$ ή $T_1 = 3mg$

$T_1' - m_1 g = F_{\kappa_1}'$ ή $T_1' = m_1 g + \frac{m_1\upsilon_1'^2}{\ell}$ ή

$T_1' = \frac{3mg}{2}$

Άρα: $2T_1' = T_1$

**1.55** α: ΘΚΜΕ για τη $\Sigma_1$ μέχρι την κρούση:

$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - 0 = m_1 g\ell(1 - \sigma\upsilon\nu 60^\circ)$ ή $\upsilon_1 = \sqrt{g\ell}$

$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -\frac{2m_1}{4m_1}\sqrt{g\ell} = -\frac{\sqrt{g\ell}}{2}$

$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{2m_1}{4m_1}\sqrt{g\ell} = \frac{\sqrt{g\ell}}{2}$

ΘΚΜΕ για τη $\Sigma_1$ μετά την κρούση:

$0 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = -Ts_1$ ή $\frac{1}{2}m_1\frac{g\ell}{4} = \mu m_1 g s_1$ ή

$s_1 = 1{,}25\,\ell$

Ομοίως προκύπτει: $s_2 = 1{,}25\ell$

Άρα: $s = s_1 + s_2 = 2{,}5\ell$

**1.56** α: Μετά τις κρούσεις στους τοίχους έχουμε:

$\upsilon_1' = \upsilon_1 = \upsilon$ και $\upsilon_2' = -\upsilon_2 = -2\upsilon$

Μετά την κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών έχουμε:

$\upsilon_2'' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1' + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2' =$

$= \frac{2m}{3m}\upsilon + \frac{m}{3m}(-2\upsilon) = 0$

$\Delta p = p_2'' - p_2 = m_2\upsilon_2'' - m_2\upsilon_2 =$

$= 0 - 2m \cdot 2\upsilon = -4m\upsilon$

**1.57** γ: Για την πλαστική κρούση ισχύει:

$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή $m_1\upsilon = (m_1 + m_2)\upsilon_\kappa$ ή $\upsilon_\kappa = \frac{\upsilon}{4}$

Από ΑΔΜΕ: $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_\kappa^2 = (m_1 + m_2)gh$ ή

$h = \frac{\upsilon_\kappa^2}{2g} = \frac{\upsilon^2}{32g}$ (1)

Εάν η κρούση ήταν ελαστική, θα ίσχυε:

$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{\upsilon}{2}$

Από ΑΔΜΕ: $\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = m_2 g h'$ ή $h' = \frac{\upsilon_2'^2}{2g}$ ή

$h' = \frac{\upsilon^2}{8g} = 4h$

**1.58** α: Τα σώματα συγκρούονται τη χρονική στιγμή $t = 4s$.

Πριν από την κρούση έχουμε:

$\upsilon_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = 2$ m/s και $\upsilon_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = 0$ m/s

Μετά την κρούση έχουμε:

$\upsilon_1' = \frac{\Delta x_1'}{\Delta t_1'} = -1$ m/s και $\upsilon_2' = \frac{\Delta x_2'}{\Delta t_2'} = 1$ m/s

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής.

$\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} = \vec{p}_{\alpha\rho\chi}$ ή $m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2'$ ή

$m_2 = \frac{m_1\upsilon_1 - m_1\upsilon_1'}{\upsilon_2'} = 3kg$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν και μετά την κρούση είναι:

$K = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = 2J$

$K' = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = 2J$

Επειδή K = K′, η κρούση είναι ελαστική.

**1.59** α: $\upsilon_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \dfrac{\upsilon_1}{3}$

$$\pi_K\% = \frac{K_1'}{K_1}100\% = \frac{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}100\% =$$

$$= \frac{100}{9}\% = 11{,}11\%$$

**1.60** α: Η ταχύτητα της σφαίρας $\Sigma_1$ ακριβώς πριν από την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - 0 = m_1 g\ell \text{ ή } \upsilon_1 = \sqrt{2g\ell} \text{ ή } \upsilon_1 = 4\ \text{m/s}$$

Μετά την κρούση έχουμε:

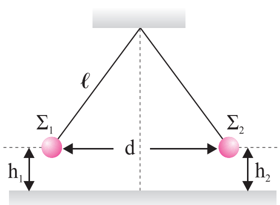
$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -2\ \text{m/s}$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = 2\ \text{m/s}$$

Οι σφαίρες $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ μετά την κρούση σταματούν στιγμιαία σε ύψη $h_1$ και $h_2$ αντίστοιχα.

$$0 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = -m_1 g h_1 \text{ ή } h_1 = \frac{\upsilon_1'^2}{2g} \text{ ή } h_1 = 0{,}2\ \text{m}$$

$$0 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = -m_2 g h_2 \text{ ή } h_2 = \frac{\upsilon_2'^2}{2g} \text{ ή } h_2 = 0{,}2\ \text{m}$$




$$\ell^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + (\ell - h_1)^2 \text{ ή } \frac{d^2}{4} = \ell^2 - (\ell - h_1)^2 \text{ ή}$$

$$d_2 = 4[\ell^2 - (\ell - h_1)^2] \text{ ή } d = 1{,}06\ \text{m}$$

**1.61** γ: Όταν κινείται η $\Sigma_1$ και η $\Sigma_2$ είναι ακίνητη, ισχύει:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} \text{ και } \Pi_1\% = \frac{K_2'}{K_1}100\% \text{ ή}$$

$$\Pi_1\% = \frac{\frac{1}{2}m_2 \cdot \left(\frac{2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}\right)^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}100\% \text{ ή}$$

$$\Pi_1\% = \frac{m_2 \cdot \frac{4m_1^2\upsilon_1^2}{(m_1 + m_2)^2}}{m_1\upsilon_1^2}100\% \text{ ή}$$

$$\Pi_1\% = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}100\%$$

Όταν κινείται η $\Sigma_2$ και η $\Sigma_1$ είναι ακίνητη, ισχύει:

$$\upsilon_1' = \frac{2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} \text{ και } \Pi_2\% = \frac{K_1'}{K_2}100\% \text{ ή}$$

$$\Pi_2\% = \frac{\frac{1}{2}m_1 \cdot \left(\frac{2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}\right)^2}{\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2}100\% \text{ ή}$$

$$\Pi_2\% = \frac{m_1 \cdot \frac{4m_2^2\upsilon_2^2}{(m_1 + m_2)^2}}{m_2\upsilon_2^2}100\% \text{ ή}$$

$$\Pi_2\% = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}100\% = \Pi_1\%$$

**1.62** γ: Από την αρχή διατήρησης της ορμής, έχουμε: $\vec{p}_{πριν} = \vec{p}_{μετά}$ ή $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$

$$p_1 + 0 = \frac{p_1}{5} + p_2' \text{ ή } p_2' = \frac{4p_1}{5}$$

Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, άρα ισχύει:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad (1)$$

Επειδή $p_1' = \dfrac{p_1}{5}$ έχουμε:

$$m_1\upsilon_1' = \frac{m_1\upsilon_1}{5} \text{ ή } \upsilon_1' = \frac{\upsilon_1}{5} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{5} \text{ ή}$$

$$5m_1 - 5m_2 = m_1 + m_2 \text{ ή } 4m_1 = 6m_2 \text{ ή } m_1 = \frac{3}{2}m_2$$

$$\Pi_K\% = \frac{K_2'}{K_1}100\% = \frac{\frac{p_2'^2}{2m_2}}{\frac{p_1^2}{2m_1}}100\% =$$

$$= \frac{m_1 p_2'^2}{m_2 p_1^2}100\% =$$

$$= \frac{\frac{3}{2}m_2}{m_2} \cdot \frac{\frac{16p_1^2}{25}}{p_1^2}100\% = 96\%$$

## Ασκήσεις

**1.63** α) $\upsilon_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -16m/s$ (το $m_1$ μετά την κρούση κινείται στην αντίθετη κατεύθυνση από την αρχική)

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = 4m/s$$

β) $\Delta K_1 = \dfrac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 - \dfrac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = -72J$

$\Delta K_1 + \Delta K_2 = 0$, άρα: $\Delta K_2 = 72J$

γ) $\Delta x_1 = |\upsilon_1'|\,\Delta t = 32m$ και $\Delta x_2 = 8m$

$d = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 40m$

**1.64** α) $\pi_{K_1}\% = \dfrac{K_1' - K_1}{K_1}100\% =$

$$= \frac{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}100\% =$$

$$= \frac{\upsilon_1'^2 - \upsilon_1^2}{\upsilon_1^2}100\% = -75\% \text{ ή } \upsilon_1' = \frac{\upsilon_1}{2} \quad (1)$$

(Επειδή $m_1 > m_2$: $\upsilon_1' > 0$)

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad (2)$$

Από (1) και (2): $m_1 = 3m_2$

β) $\pi_{p_1}\% = \dfrac{m_1\upsilon_1' - m_1\upsilon_1}{m_1\upsilon_1}100\% = \dfrac{\frac{\upsilon_1}{2} - \upsilon_1}{\upsilon_1}100\% = -50\%$

**1.65** α) Ορίζουμε θετική τη φορά προς τα δεξιά.

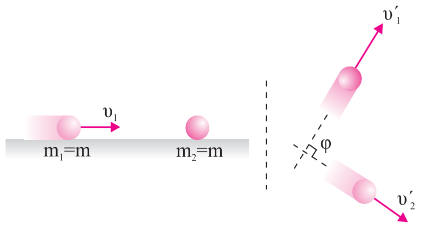
$$\upsilon_1' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -16m/s$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 = 2m/s$$

Μετά την κρούση το $m_1$ κινείται προς τα αριστερά και το $m_2$ προς τα δεξιά.

β) $F_1 = \dfrac{\Delta p_1}{\Delta t} = \dfrac{m_1\upsilon_1' - m_1\upsilon_1}{\Delta t} = -960N$

**1.66** α)




$K_{αρχ} = K_{τελ}$ ή $\dfrac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \dfrac{1}{2}m\upsilon_1'^2 + \dfrac{1}{2}m\upsilon_2'^2$ ή

$\upsilon_1^2 = \upsilon_1'^2 + \upsilon_2'^2 \quad (1)$

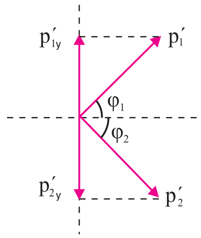
$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m\vec{\upsilon}_1 = m\vec{\upsilon}_1' + m\vec{\upsilon}_2'$ ή

$\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_1' + \vec{\upsilon}_2'$

ή $\upsilon_1^2 = \upsilon_1'^2 + \upsilon_2'^2 + 2\upsilon_1'\upsilon_2'συνφ \quad (2)$

Από (1) και (2): $2\upsilon_1'\upsilon_2'συνφ = 0$ ή συνφ = 0 ή φ = 90°

β) Πρέπει




$p_{1y}' = p_{2y}'$ ή

$m\upsilon_1'ημφ_1 = m\upsilon_2'ημφ_2 \quad (3)$

$φ_1 + φ_2 = 90°$, άρα:

$ημφ_2 = συνφ_1 \quad (4)$

Από (3) και (4):

$$εφφ_1 = \frac{\upsilon_2'}{\upsilon_1'}$$

**1.67** α) Από ΘΜΚΕ για το $m_1$ από την αρχική του θέση μέχρι να συγκρουστεί με το $m_2$:

$\dfrac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \dfrac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = -T\Delta x_1$ ή

$m_1\upsilon_1^2 - m_1\upsilon_0^2 = -2\mu m_1 g\Delta x_1$ ή $\upsilon_1 = 6m/s$

β) $\upsilon_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -3m/s$ και

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = 3m/s$$

Από ΘΜΚΕ για τα σώματα από τη θέση της σύγκρουσης μέχρι να σταματήσουν έχουμε:

Για το $m_1$: $0 - \dfrac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = -\mu g m_1 s_1$ ή $s_1 = 2{,}25m$

και ομοίως για το $m_2$: $s_2 = 2{,}25m$
Επειδή μετά την κρούση τα σώματα κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις:
$\Delta s = s_1 + s_2 = 4{,}5m$

**1.68** α) $\Delta x_1 = \upsilon_1 t = 20m$
β) $\Delta x_2 = \Delta x - \Delta x_1 = 4m$

$\Delta x_2 = \frac{1}{2}\alpha_2 t^2$ ή $\alpha_2 = 2m/s^2$

γ) $\upsilon_2 = \alpha_2 t = 4m/s$
Ορίζουμε θετική τη φορά προς τα δεξιά.

$$\upsilon_1' = \frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 = -8{,}67m/s$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_2 = 5{,}33m/s$$

**1.69** α) $\upsilon_1' = -\upsilon_1$ και $\upsilon_2' = -\upsilon_2$

$\Delta p_1 = m_1\upsilon_1' - m_1\upsilon_1 = 80kg \cdot m/s$

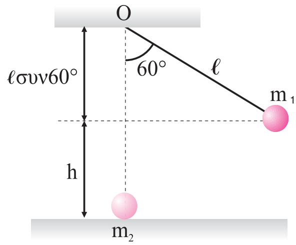
$\Delta p_2 = m_2\upsilon_2' - m_2\upsilon_2 = -40kg \cdot m/s$

β) $$\upsilon_1'' = \frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2' + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1' = -2m/s$$

$$\upsilon_2'' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1' + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_2' = 28m/s$$

**1.70** α) $h = \ell - \ell\,συν60° = 0{,}2m$

Από ΑΔΜΕ: $m_1gh = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2$ ή $\upsilon_1 = 2m/s$




β) $$\upsilon_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 = \frac{2}{3}m/s$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 = \frac{8}{3}m/s$$

γ) Από ΘΜΚΕ για το $m_2$ από τη θέση της σύγκρουσης μέχρι να σταματήσει:

$$0 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = -Ts \quad ή \quad \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = \mu m_2 gs$$

ή $s = \frac{32}{9}m$

$\Sigma F = m|\alpha|$ ή $|\alpha| = \mu g = 1m/s^2$

$\upsilon = \upsilon_2' - |\alpha|t$ και για $\upsilon = 0$: $t = \frac{8}{3}s$

**1.71** α) $\upsilon_1 = 3\ m/s$ (βλέπε άσκηση 1.70)

β) $\upsilon_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 = -1m/s$ και

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 = 2m/s$$

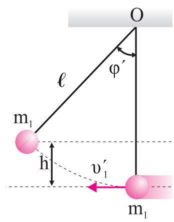
γ) $T_2 = w_2 = m_2 g = 20N$

$T_2' = m_2 g + m_2\frac{\upsilon_2'^2}{\ell} = 28{,}89N$ (βλέπε παρατηρήσεις)

δ) Από ΑΔΜΕ για το $m_1$:

$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = m_1gh$ ή $h = 0{,}05m$

$συνφ' = \frac{\ell - h}{\ell} = 0{,}944$




**1.72** α) $\upsilon_1 = \sqrt{2gh_1} = 4m/s$

και $\upsilon_2 = \sqrt{2gh_2} = 6m/s$

β) Ορίζουμε θετική τη φορά προς τα δεξιά.

$$\upsilon_1' = \frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 = -1m/s$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_2 = 9m/s$$

γ) $$\pi_{K_1}\% = \frac{K_1'-K_1}{K_1}100\% = \frac{\upsilon_1'^2-\upsilon_1^2}{\upsilon_1^2}100\% = -93{,}75\%$$

και ομοίως $\pi_{K_2}\% = 125\%$

## Προβλήματα

**1.73** α) ΘΜΚΕ για το $m_1$ από την οριζόντια στην κατακόρυφη θέση:

$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = m_1 g\ell$ ή $\upsilon_1 = 10m/s$

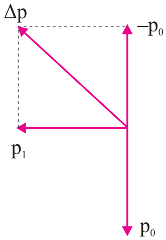
β) $p_0 = m_1\upsilon_0 = 8kg \cdot m/s$ και

$p_1 = m_1 υ_1 = 10 kg \cdot m/s$

$Δ\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$, άρα:

$Δp = \sqrt{p_0^2 + p_1^2} =$

$= 2\sqrt{41} kg \cdot m/s$




γ) $υ_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} υ_1 = 5 m/s$

$W_{F_2} = ΔK_2 = \dfrac{1}{2} m_2 υ_2'^2 - 0 = 37,5 J$

**1.74** α) $υ_A' = \dfrac{m_A - m_B}{m_A + m_B} υ_A = -6 m/s$

$υ_B' = \dfrac{2m_A}{m_A + m_B} υ_A = 4 m/s$

β) $Δp_A = p_A' - p_A = m_A(υ_A' - υ_A) = -16 kg \cdot m/s$

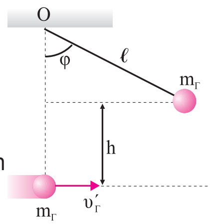
και $Δp_B = p_B' - 0 = 16 kg \cdot m/s$

γ) $υ_B'' = \dfrac{m_B - m_Γ}{m_B + m_Γ} υ_B' = 0$

$F_B = \dfrac{|Δp_B'|}{Δt} = \dfrac{|0 - p_B'|}{Δt} = 80 N$

δ) $υ_Γ' = \dfrac{2m_B}{m_B + m_Γ} υ_B' =$

$= 4 m/s$




Από ΑΔΜΕ:

$m_Γ g h = \dfrac{1}{2} m_Γ υ_Γ'^2$ ή $h = 0,8 m$

συνφ $= \dfrac{\ell - h}{\ell} = \dfrac{1}{2}$,

άρα: $φ = 60^o$

**1.75** α) Από ΑΔΜΕ για το $m_1$:

$m_1 g R = \dfrac{1}{2} m_1 υ_0^2$ ή $υ_0 = 7 m/s$

β) ΘΜΚΕ για το $m_1$ από την αρχή του οριζόντιου επιπέδου μέχρι τη σύγκρουση με το $m_2$:

$\dfrac{1}{2} m_1 υ_1^2 - \dfrac{1}{2} m_1 υ_0^2 = -TΔx$ ή

$\dfrac{1}{2} m_1 υ_1^2 - \dfrac{1}{2} m_1 υ_0^2 = -μ m_1 g Δx$

ή $υ_1 = 3 m/s$

γ) $υ_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} υ_1 = 1 m/s$

$υ_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} υ_1 = 4 m/s$

δ) $π\% = \dfrac{|W_T|}{m_1 g R} 100\% = \dfrac{μ m_1 g Δx}{m_1 g R} 100\% = 81,63\%$

**1.76** α) Από ΑΔΜΕ υπολογίζουμε τα μέτρα των ταχυτήτων:

$m_1 g \ell_1 ημφ_1 = \dfrac{1}{2} m_1 υ_1^2$ ή $υ_1 = 3 m/s$

$m_2 g \ell_2 ημφ_2 = \dfrac{1}{2} m_2 υ_2^2$ ή $υ_2 = 2 m/s$

β) Επειδή τα σώματα έχουν ίσες μάζες, μετά την κρούση ανταλλάσσουν ταχύτητες. Ορίζοντας θετική τη φορά προς τα δεξιά, έχουμε:

$υ_1' = -2 m/s$ και $υ_2' = 3 m/s$

γ) $π_{K_1}\% = \dfrac{K_1' - K_1}{K_1} 100\% = \dfrac{υ_1'^2 - υ_1^2}{υ_1^2} 100\% = -55,56\%$

δ) $π\% = \dfrac{K_1'}{K_1} 100\% = 44,44\%$

**1.77** α) $m_1 g h_1 + \dfrac{1}{2} m_1 υ_0^2 = \dfrac{1}{2} m_1 υ_1^2$ ή $υ_1 = 18 m/s$

β) $υ_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} υ_1 = 12 m/s$

$υ_3' = \dfrac{2m_2}{m_2 + m_3} υ_2' = 8 m/s$

γ) Από ΑΔΜΕ για το $m_3$:

$\dfrac{1}{2} m_3 υ_3'^2 = m_3 g h_3$ ή $h_3 = 3,2 m$

δ) $π\% = \dfrac{m_3 g h_3}{m_1 g h_1 + \dfrac{1}{2} m_1 υ_0^2} 100\% = 79\%$

**1.78** α) Μετά την πρώτη κρούση:

$υ_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} υ_1$ και $υ_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} υ_1$

Μετά τη σύγκρουση της σφαίρας $m_2$ με τον τοίχο, η σφαίρα $m_2$ έχει ταχύτητα $υ_2'' = -υ_2'$.

Για να διατηρούν οι δύο σφαίρες σταθερή απόσταση μεταξύ τους, πρέπει:

$\upsilon_1' = \upsilon_2''$ ή $\upsilon_1' = -\upsilon_2'$ ή

$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1$ ή $m_2 = 3m_1$

β) $K_1 = K_1' + K_2'$ ή $K_2' = K_1 - K_1'$

Η $K_2'$ είναι μέγιστη, όταν $K_1' = 0$. Αυτό συμβαίνει για $m_1 = m_2$.

**1.79** α) Από ΑΔΜΕ για το $m_1$:

$\frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + m_1 g 2\ell$ ή $\upsilon_1 = 6m/s$

β) Η ταχύτητα του $\Sigma_2$ μετά τη σύγκρουση με το σώμα μάζας $m_1$ είναι: $\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = 2m/s$

Το όχημα Μ και το $\Sigma_2$ αποκτούν κοινή ταχύτητα $\upsilon_\kappa$ που δίνεται από τη σχέση: $m_2\upsilon_2' = (m_2 + M)\upsilon_\kappa$ ή $\upsilon_\kappa = 0,5$ m/s

(βλέπε βασική άσκηση 1.3)

$K = \frac{1}{2}(M + m_2)\upsilon_\kappa^2 = 2,5J$

γ) $W_T = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} =$

$= \frac{1}{2}(M + m_2)\upsilon_\kappa^2 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = -7,5J$

**1.80** α) $m_1 gh = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2$ ή $\upsilon_1 = 3m/s$

$m_2 g\ell\eta\mu\varphi = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2$ ή $\upsilon_2 = 4m/s$

β) Από αρχή διατήρησης της ορμής και ορίζοντας θετική τη φορά προς τα αριστερά έχουμε:

$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon_\kappa$ ή $\upsilon_\kappa = \frac{2}{3}m/s$

γ) $\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_\kappa^2 = U_{\varepsilon\lambda_{max}}$ ή

$U_{\varepsilon\lambda_{max}} = 32,66J$

**1.81** $mgh_1 = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ ή $\upsilon = 6m/s$

Τα σώματα φτάνουν στο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητες $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon = 6m/s$.

Το $m_1$ μετά την πρόσκρουση στο οριζόντιο επίπεδο αρχίζει να ανέρχεται με ταχύτητα $\upsilon_1' = -\upsilon_1 = -6m/s$. Μετά τη σύγκρουσή του με το $m_2$, η ταχύτητα της σφαίρας $m_2$ είναι $\upsilon_2' = -6m/s$.

(Οι δύο σφαίρες ανταλλάσσουν ταχύτητες.)

Από ΑΔΜΕ για τη σφαίρα $m_2$:

$m_2 gh_2 = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2$ ή $h_2 = 1,8m$

**1.82** α) $\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = m_1 g\ell$ ή $\upsilon_1 = 4m/s$

$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -3m/s$ και

$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = 1m/s$

β) Μετά την επαφή του με το ελατήριο, το $m_2$ επιβραδύνεται, ενώ το $m_3$ επιταχύνεται. Στιγμιαία τα δύο σώματα αποκτούν κοινή ταχύτητα.

Από ΑΔΟ: $m_2\upsilon_2' = (m_2 + m_3)\upsilon_\kappa$ ή $\upsilon_\kappa = 0,5m/s$

γ) Τη χρονική στιγμή που τα $m_2$, $m_3$ αποκτούν κοινή ταχύτητα έχουμε μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, άρα και μέγιστη ενέργεια του ελατηρίου.

Από ΑΔΜΕ για το σύστημα:

$\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\upsilon_\kappa^2 + U_{max}$ ή $U_{max} = 1,75J$

**1.83** α) $\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = m_1 g\sigma\upsilon\nu\eta\mu 30°$ ή $\upsilon_1 = 2m/s$

$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -1m/s$ και

$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = 1m/s$

β) Μετά τη σύγκρουσή του με το $m_2$, το σώμα $m_1$ κινείται στην αντίθετη κατεύθυνση.

$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = m_1 gh_{max}$ ή $h_{max} = 0,05m$

γ) $m_2 = m_3$, άρα $\upsilon_3' = \upsilon_2' = 1$ m/s και $\upsilon_2'' = 0$

Εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ, έχουμε:

$K_{\tau\varepsilon\lambda}' - K_{\alpha\rho\chi} = W_{F_{\varepsilon\lambda}}$ ή

$0 - \frac{1}{2}m_3\upsilon_3'^2 = 0 - \frac{1}{2}kx_{max}^2$ ή

$x_{max} = \frac{\sqrt{3}}{10}m$

**1.84** α) $\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -5m/s$ και

$p_1' = m_1\upsilon_1' = -15kg \cdot m/s$

$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = 5m/s$ και

$p_2' = m_2\upsilon_2' = 45kg \cdot m/s$

β) $\pi\% = \frac{\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2} \cdot 100\% = 75\%$

γ) $t_1 = \frac{d}{|\upsilon_1'|} = 1s$

Για $t_1 = 1s$: $s_2 = \upsilon_2' t_1 = 5m$

Άρα οι σφαίρες απέχουν: $d' = d + s_2 = 10m$

δ) $K_1'' = \frac{64}{100}K_1'$ ή $\frac{1}{2}m_1\upsilon_1''^2 = \frac{64}{100} \cdot \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2$ ή

$\upsilon_1'' = 4m/s$

$\Delta s = \upsilon_2'\Delta t - \upsilon_1''\Delta t$ και για $\Delta t = 1s$ έχουμε:

$\Delta s = 1m$

**1.85** α) Από ΘΜΚΕ έχουμε:

$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - 0 = Fd - Td$ ή $\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = Fd - \mu m_1 gd$

ή $\upsilon_1 = 3m/s$

β) $\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = 2m/s$

$T_2 - m_2 g = m_2\frac{\upsilon_2'^2}{\ell}$ ή $T_2 = 40N$

γ) $\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -1m/s$

Από ΘΜΚΕ για το $\Sigma_1$ από τη θέση της σύγκρουσης μέχρι να σταματήσει έχουμε:

$0 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = -Ts_1$ ή $s_1 = 0,5m$

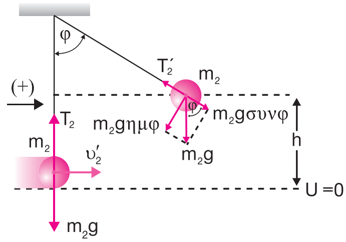
δ) $K_{τελ} - K_{αρχ} = W_B$ ή $0 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = -m_2 gh$ ή

$h = 0,2m$

$συνφ = \frac{\ell - h}{\ell} = \frac{1}{2}$ ή $φ = 60°$

Όταν η $\Sigma_2$ σταματά στιγμιαία, ισχύει:

$T_2' - m_2 gσυνφ = 0$ ή $T_2' = 10N$




**1.86** α) Στην κατακόρυφη θέση:

$T - m_1 g = \frac{m_1\upsilon_1^2}{\ell}$ ή $\upsilon_1 = 6m/s$

Από ΑΔΜΕ έχουμε:

$\frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 + m_1 gh_1 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2$ ή $\upsilon_0 = 4m/s$

β) Επειδή $m_1 = m_2$ και η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, οι σφαίρες ανταλλάσσουν ταχύτητες κατά την κρούση.

Άρα: $\upsilon_1' = 0$ και $\upsilon_2' = 6m/s$

$\pi\% = \frac{\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 + m_1 gh_1} \cdot 100\% = 100\%$

γ) Από ΘΜΚΕ από το σημείο Α μέχρι να σταματήσει η $\Sigma_2$ στιγμιαία έχουμε:

$0 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_{2_A}^2 = -m_2 g(h_2 - R)$ ή $\upsilon_{2_A} = 3m/s$

δ) Από ΘΜΚΕ από τη θέση της σύγκρουσης μέχρι το σημείο Α έχουμε:

$\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2_A}^2 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = -m_2 gR - |W_T|$ ή

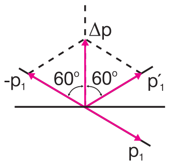
$|W_T| = 1{,}5J$

$Q = |W_T| = 1{,}5J$

**1.87** α) $\Delta\vec{p} = \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = \vec{p}_1' + (-\vec{p}_1)$ ή

$\Delta p = \sqrt{p_1^2 + p_1'^2 + 2p_1p_1'\sigma\upsilon\nu 120^\circ} =$

$= p_1 = m_1\upsilon_1 = 20kg\cdot m/s$




β) $|F_1| = \dfrac{|\Delta p_y|}{\Delta t} = \dfrac{|2m_1\upsilon_{1_y}|}{\Delta t} = \dfrac{2m_1\upsilon_1\sigma\upsilon\nu 60^\circ}{\Delta t} = 100N$

γ) Έστω ότι η $\Sigma_2$ σταματά στιγμιαία σε ύψος h από το οριζόντιο επίπεδο.

$|W_2| = |-m_2gh| = \dfrac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = 96J \quad (1)$

Για την κεντρική ελαστική κρούση των σφαιρών έχουμε:

$\upsilon_2' = \dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 \quad (2)$

Από (1) και (2): $m_2 = 3kg$

δ) Από (2): $\upsilon_2' = 8m/s$

$T_2 = m_2g = 30N$

$T_2' = m_2g + m_2\dfrac{\upsilon_2'^2}{\ell} = 222N$

$\pi\% = \dfrac{T_2' - T_2}{T_2}\cdot 100\% = 640\%$

**1.88** α) Η κρούση είναι κεντρική ελαστική και το σώμα μάζας $m_2$ είναι αρχικά ακίνητο.

$\upsilon_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1$ ή $-9 = \dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\cdot 15$ ή

$\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{1}{4}$

β) $\upsilon_2' = \dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 = 6m/s$

γ) $\pi\% = \dfrac{\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}\cdot 100\% = 64\%$

δ) ΘΜΚΕ $(m_1)$: $0 - \dfrac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = -\mu m_1 g s_1$ ή

$s_1 = 40{,}5m$

ΘΜΚΕ $(m_2)$: $0 - \dfrac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = -\mu m_2 g s_2$ ή

$s_2 = 18m$

$d = s_1 + s_2 = 58{,}5m$

**1.89** α) Από το ΘΜΚΕ έχουμε:

$K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_w$ ή

$\dfrac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - 0 = m_1g(\ell - \ell\sigma\upsilon\nu\varphi)$ ή

$\dfrac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = m_1g\dfrac{\ell}{2}$ ή $\upsilon_1 = \sqrt{g\ell}$ ή

$\upsilon_1 = 2m/s$

β) $\upsilon_1' = \dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 = -1m/s,$

$\upsilon_2' = \dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 = 1m/s$

γ) Για το $\Sigma_1$ ισχύει:

$\Sigma F = F_\kappa$ ή $T - w_1 = m_1\dfrac{\upsilon_1'^2}{\ell}$ ή

$T = m_1g + m_1\dfrac{\upsilon_1'^2}{\ell} = 12{,}5N$

δ) Για την κρούση των σωμάτων $\Sigma_2$ και $\Sigma_3$ έχουμε:

$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\epsilon\lambda}$ ή $m_2\upsilon_2' = (m_2+m_3)\upsilon_\kappa$ ή

$\upsilon_\kappa = \dfrac{m_2\upsilon_2'}{m_2+m_3} = 0{,}25m/s$

$$\pi_{K_2}\% = \frac{K_2'' - K_2'}{K_2'} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}m_2 u_\kappa^2 - \frac{1}{2}m_2 u_2'^2}{\frac{1}{2}m_2 u_2'^2} \cdot 100\% = -93{,}75\%$$

**1.90** α$_1$) $s_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 t_1^2 = \frac{1}{2}\frac{F}{m_1}t_1^2 = 2m$ και

$s_2 = u_2 t_1 = 10m$

Άρα, τα σώματα απέχουν απόσταση:

$d_1 = d + s_2 - s_1 = 20m$

α$_2$) $s_1' - s_2' = d$ ή $\frac{1}{2}\alpha_1 t_2^2 - u_2 t_2 = d$ ή

$\frac{1}{2}\frac{F}{m_1}t_2^2 - u_2 t_2 = d$ ή

$2t_2^2 - 10t - 12 = 0$ ή $t_2^2 - 5t - 6 = 0$

Άρα: $t_2 = -1s$ (απορρίπτεται) ή $t_2 = 6s$

Για $t_2 = 6s$ έχουμε: $u_1 = \alpha_1 t_2 = 24 m/s$

β$_1$) $u_1' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}u_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}u_1 = 3m/s$

$u_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}u_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}u_2 = 17m/s$

β$_2$) $\pi_{K_1}\% = \frac{K_1' - K_1}{K_1} \cdot 100\% =$

$$= \frac{\frac{1}{2}m_1 u_1'^2 - \frac{1}{2}m_1 u_1^2}{\frac{1}{2}m_1 u_1^2} \cdot 100\% = -98{,}43\%$$

**1.91** α) Το σώμα $\Sigma_1$ εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα επάνω:

$h_1 = u_0 t_1 - \frac{1}{2}g t_1^2$ ή $5t_1^2 - 40t_1 + 60 = 0$ ή

$t_1^2 - 8t_1 + 12 = 0$

Από την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης προκύπτει:

$t_1 = 2s$ ή $t_1' = 6s$

Το σώμα διέρχεται από τη θέση Α τη χρονική στιγμή $t_1 = 2s$ κατά την ανοδική του κίνηση.

Η ταχύτητα του $\Sigma_1$ τη χρονική στιγμή $t_1$ είναι:

$u_1 = u_0 - g t_1$ ή $u_1 = 20 m/s$

β) $u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}u_1$ ή $u_1' = -10 m/s$

$u_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}u_1$ ή $u_2' = 10 m/s$

γ) Η μηχανική ενέργεια του $\Sigma_2$ διατηρείται μετά τη σύγκρουση.

Επομένως, η μηχανική ενέργεια του $\Sigma_2$ στο σημείο που σταματά στιγμιαία είναι ίση με αυτή που έχει στο σημείο Α.

$E = K_A + U_A$ ή $E = \frac{1}{2}m_2 u_2'^2 + m_2 g h_1$ ή

$E = 1.950J$

δ) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα $\Sigma_1$ από το ύψος $h_1$ έως το έδαφος:

$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_w$ ή $K_{\tau\varepsilon\lambda} - \frac{1}{2}m_1 u_1'^2 = m_1 g h_1$

ή $K_{\tau\varepsilon\lambda} = 650J$

**1.92** α) $u_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}u_1 = 20 m/s,$

$u_3' = \frac{2m_2}{m_2 + m_3}u_2' = 10 m/s,$

$u_4' = \frac{2m_3}{m_3 + m_4}u_3' = 5 m/s$

β) $\pi_K\% = \frac{K_4}{K_1}100\% = \frac{\frac{1}{2}m_4 u_4'^2}{\frac{1}{2}m_1 u_1^2}100\% = 42{,}18\%$

γ) $F_3 = \frac{\Delta p_3}{\Delta t} = \frac{p_3' - 0}{\Delta t} = \frac{m_3 u_3'}{\Delta t} = 900N$

δ) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα $\Sigma_4$ από τη θέση Δ μέχρι τη θέση στην οποία θα σταματήσει:

$K_{τελ} - K_Δ = W_T$ ή $0 - \frac{1}{2}m_4 υ_4'^2 = -Ts$ ή

$s = \frac{\frac{1}{2}m_4 υ_4'^2}{\mu m_4 g}$ ή $s = 2{,}5m$

**1.93** α) $ΣF = m_1 α_1$ ή $α_1 = \frac{F - T}{m_1}$ ή

$α_1 = \frac{F - \mu m_1 g}{m_1}$ ή $α_1 = 2m/s^2$

$AB = \frac{1}{2}α_1 t_1^2$ ή $t_1 = \sqrt{\frac{2AB}{α_1}}$ ή $t_1 = 2s$

$υ_1 = α_1 t_1$ ή $υ_1 = 4m/s$

β) $υ_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1 = -2m/s$ και

$υ_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}υ_1 = 2m/s$

γ) $π_K\% = \frac{K_1' - K_1}{K_1}100\% =$

$= \frac{\frac{1}{2}m_1 υ_1'^2 - \frac{1}{2}m_1 υ_1^2}{\frac{1}{2}m_1 υ_1^2}100\% = -75\%$

δ) Το σώμα $Σ_2$ από το σημείο Β έως το Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και δεξιά από το σημείο Γ μέχρι το σημείο Δ που θα σταματήσει εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Από Β έως Γ: $ΒΓ = υ_2'Δt$ ή $Δt = \frac{ΒΓ}{υ_2'}$ ή

$Δt = 4s$

Από Γ έως Δ: $ΣF = m_2 α_2$ ή

$α_2 = \frac{T_2}{m_2} = \frac{-\mu m_2 g}{m_2} = -\mu g = -2m/s^2$

$υ = υ_2' - |α_2|Δt'$ και για $υ = 0$ έχουμε:

$Δt' = \frac{υ_2'}{|α_2|} = 1s$

Το σώμα σταματά τη χρονική στιγμή:

$t_2 = t_1 + Δt + Δt' = 7s$

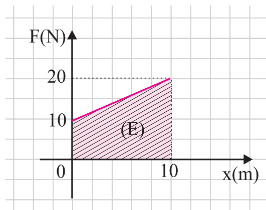
$ΓΔ = \frac{υ_2'^2}{2|α_2|}$ ή $ΓΔ = 1m$

Το σημείο Δ απέχει από το Α απόσταση:

$d = AB + BΓ + ΓΔ = 13m$

**1.94** α) $ΣF_1 = m_1 α_1$ ή $α_1 = \frac{F_1}{m_1}$ ή

$α_1 = \frac{10 + x_1}{m_1}$ ή $α_1 = 5m/s^2$




β) $W_F = (E) = \frac{10 + 20}{2} \cdot 10 = 150J$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το $Σ_1$ από το Α έως το Β:

$K_B - K_A = W_F$ ή $\frac{1}{2}m_1 υ_1^2 - 0 = W_F$ ή

$υ_1 = \sqrt{\frac{2W_F}{m_1}}$ ή $υ_1 = 10m/s$

γ) $υ_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1 = 2m/s$ και

$υ_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}υ_1 = 12m/s$

δ) Τα σώματα κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση. Επομένως:

$d = s_2 - s_1$ ή $d = υ_2'Δt - υ_1'Δt$ ή $d = 20m$

**1.95** α) $ΣF = m_1 α_1$ ή $α_1 = \frac{ΣF}{m_1}$ ή

$α_1 = \frac{F_1 - F_2}{m_1}$ ή $α_1 = 2m/s^2$

$υ_1 = υ_0 + α_1 t_1$ ή $υ_1 = 20m/s$

β) $\upsilon_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -10\,m/s$ και

$\upsilon_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = 10\,m/s$

γ) $\pi_K\,\% = \dfrac{K_1'}{K_1}100\% = \dfrac{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}100\% = 25\%$

δ) $F = \dfrac{|\Delta p|}{\Delta t}$ ή $F = \dfrac{|m_1\upsilon_1' - m_1\upsilon_1|}{\Delta t}$ ή

$F = 3.000N$

**1.96** α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα $Σ_1$ από το Α έως το Β:

$K_B - K_A = W_T$ ή $\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = -\mu m_1 g d$

ή $\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2\mu g d} = 6\,m/s$

β) $\upsilon_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1$ ή $m_1 + m_2 = \dfrac{2m_1}{\upsilon_2'}\upsilon_1$ ή

$m_2 = 2m_1\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2'} - m_1$ ή $m_2 = 12kg$

γ) Το σώμα $Σ_2$ εκτελεί οριζόντια βολή.

$h = \frac{1}{2}g\Delta t^2$ ή $\Delta t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ ή $\Delta t = 2s$

Επομένως: $\upsilon_x = \upsilon_2' = 3\,m/s,\ \upsilon_y = g\Delta t$ ή

$\upsilon_y = 20\,m/s$

$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$ ή $\upsilon = 20{,}22\ m/s$

δ) Το σώμα $Σ_1$ εκτελεί μετά την κρούση ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα:

$\upsilon_1' = \dfrac{|m_1 - m_2|}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = 3\,m/s$ (μέτρο)

$\Sigma F = m_1|\alpha|$ ή $|\alpha| = \dfrac{T}{m_1} = \dfrac{\mu m_1 g}{m_1}$ ή

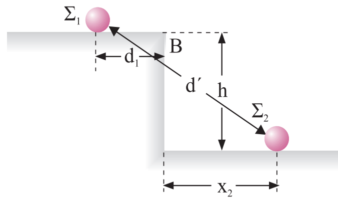
$\alpha = 5\,m/s^2$

$\upsilon_1'' = \upsilon_1' - |\alpha|\Delta t'$ και για $\upsilon_1'' = 0$ έχουμε:

$\Delta t' = \dfrac{\upsilon_1'}{|\alpha|} = 0{,}6s$

Επειδή $\Delta t' < \Delta t$, το σώμα $Σ_1$ σταματά πριν το σώμα $Σ_2$ φτάσει στο έδαφος. Η απόσταση που διανύει το $Σ_1$ είναι:

$d_1 = \upsilon_1'\Delta t' - \frac{1}{2}|\alpha|\Delta t'^2$ ή $d_1 = 0{,}9m$




$x_2 = \upsilon_2'\Delta t = 6m$

Άρα: $d' = \sqrt{(d_1 + x_2)^2 + h^2}$ ή $d' = 21{,}15m$

**1.97** α$_1$) Έστω ότι μετά την κρούση το $Σ_1$ φτάνει στο σημείο Β σε ύψος $h_{max}$.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από το Α έως το Β:

$K_B - K_A = W_w$ ή $0 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = -m_1 g\Delta y$ ή

$\Delta y = \dfrac{\upsilon_0^2}{2g}$ ή $\Delta y = 0{,}45m$

$h_{max} = \Delta y + (\ell - \ell\sigma\upsilon\nu\varphi)$ ή $h_{max} = 1{,}8m$

α$_2$) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από το Α έως την κατώτερη θέση:

$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_A = W_w$ ή

$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = m_1 g\ell(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)$ ή

$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2g\ell(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)}$ ή $\upsilon_1 = 6\,m/s$

β$_1$) Επειδή $m_1 = m_2$, τα σώματα $Σ_1$, $Σ_2$ ανταλλάσσουν ταχύτητες.

Άρα: $\upsilon_1' = 0$ και $\upsilon_2' = \upsilon_1 = 6\,m/s$

Για την κρούση μεταξύ των $Σ_2$, $Σ_3$ ισχύει:

$\upsilon_3' = \dfrac{2m_2}{m_2 + m_3}\upsilon_2'$ ή $\upsilon_3' = 3\,m/s$

$$\pi\% = \frac{K_3}{E_1}\cdot 100\% =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}m_3 u_3'^2}{m_1 g\ell(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)+\frac{1}{2}m_1 u_0^2}100\% = 75\%$$

β$_2$) $\Delta p = m_1 u_1' - m_1 u_0$ ή $\Delta p = -m_1 u_0$ ή

$\Delta p = -12 kg\cdot m/s$

Το διάνυσμα $\Delta\vec{p}$ έχει αντίθετη κατεύθυνση από το διάνυσμα $\vec{u}_0$.

**1.98** α) $\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_1{}' - \vec{p}_1$ ή $\Delta p_1 = m_1 u_1 - (m_1 u_1)$

$\Delta p_1 = 2\, m_1 u_1 = 70\ kg\cdot m/s$

β) Εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ, έχουμε:

$\frac{1}{2}m_1 u_1'^2 - \frac{1}{2}m_1 u_1^2 = -m_1 g d_1 \eta\mu\varphi$ ή

$u_1' = \sqrt{u_1^2 - 2gd_1\eta\mu\varphi}$ ή $u_1' = 4\ m/s$

γ) $u_1'' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}u_1'$ ή $u_1'' = 3\ m/s$

$$\pi_K\% = \frac{\frac{1}{2}m_1 u_1''^2 - \frac{1}{2}m_1 u_1'^2}{\frac{1}{2}m_1 u_1'^2}100\% \text{ ή}$$

$\pi_K\% = -43{,}75\%$

δ) $u_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}u_1'$ ή $u_2' = 7\ m/s$

$\Sigma F_1 = m_1|\alpha_1|$ ή $m_1 g\eta\mu\varphi = m_1|\alpha_1|$ ή $|\alpha_1| = 5\ m/s^2$

Ομοίως: $|\alpha_2| = 5\ m/s^2$

$d_2 = u_2' t_1 - \frac{1}{2}|\alpha_2|t_1^2$ ή $2{,}5t_1^2 - 7t_1 + 4{,}5 = 0$, άρα:

$t_1 = 1{,}8\ s$ ή $t_1 = 1\ s$

Για πρώτη φορά έχουμε: $t_1 = 1\ s$

$s_1 = u_1'' t_1 - \frac{1}{2}|\alpha_1|t_1^2$ ή $s_1 = 0{,}5\ m$

(στην ανοδική κίνηση του σώματος)

$d = d_2 - s_1$ ή $d = 4\ m$

ε) Η ταχύτητα του $\Sigma_2$ ακριβώς πριν να συγκρουστεί με το επίπεδο (2) είναι:

$u_2'' = u_2' - |\alpha_2|t_1$ ή $u_2'' = 2\ m/s$

Αμέσως μετά τη σύγκρουση: $u_2''' = -2\ m/s$

Την ίδια χρονική στιγμή ισχύει:

$u_1''' = u_1'' - |\alpha_1|t_1$ ή $u_1''' = -2\ m/s$

$p_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = p_1 + p_2$ ή $p_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = m_1 u_1''' + m_2 u_2'''$ ή

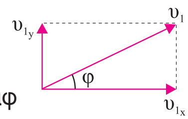
$p_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = -16\ kg\cdot m/s$

**1.99** α) Για τη σφαίρα $\Sigma_2$ ισχύει:

$F = m_2|\alpha|$ ή $|\alpha| = \frac{F}{m_2}$ ή $|\alpha| = 7{,}5\ m/s^2$

$d = u_2 t - \frac{1}{2}|\alpha|t^2$ ή $3{,}75t^2 - 10t + 5 = 0$

Άρα: $t_1 = 0{,}666s$ και $t_2 = 2s$




β) Για τη σφαίρα $\Sigma_1$ ισχύει:

$u_{1_x} = u_1\sigma\upsilon\nu\varphi$ και $u_{1_y} = u_1\eta\mu\varphi$

Επειδή η σφαίρα $\Sigma_1$ συγκρούεται ελαστικά με τους τοίχους, η γωνία πρόσπτωσης και η γωνία ανάκλασης είναι ίσες με τη γωνία $\frac{\pi}{2} - \varphi$.

$d = u_{1_x} t_2$ ή $d = u_1\sigma\upsilon\nu\varphi t_2$ ή $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{d}{u_1 t_2}$ ή

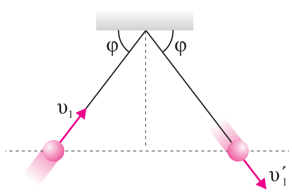
$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1}{2}$ ή $\varphi = 60°$

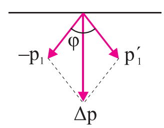
γ) $\Delta\vec{p} = \vec{p}_1{}' - \vec{p}_1$ ή

$\Delta p = \sqrt{p_1'^2 + p_1^2 + 2p_1 p_1'\sigma\upsilon\nu\varphi}$ ή

$\Delta p = \sqrt{2p_1^2 + 2p_1^2\sigma\upsilon\nu\varphi}$ ή $\Delta p = \sqrt{3p_1^2}$ ή

$\Delta p = \sqrt{3(m_1 u_1)^2}$ ή $\Delta p = 5\sqrt{3}\ kg\cdot m/s$




Το διάνυσμα Δp είναι κάθετο στον τοίχο ΑΒ.

δ) $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ ή $F = 50\sqrt{3}\ N$

**1.100** α) Για το σώμα $Σ_1$ ισχύει:

$ΣF_1 = m_1α_1$ ή $α_1 = \frac{ΣF_1}{m_1}$ ή $α_1 = \frac{F_1 συν60^o}{m_1}$ ή

$α_1 = 5\ m/s^2$

$s_1 + s_2 = d$ ή $\frac{1}{2}α_1 t_1^2 + |υ_2| t_1 = d$ ή

$2{,}5t_1^2 + 10t_1 - 30 = 0$ ή $t_1 = 2\ s$

$s_1 = \frac{1}{2}α_1 t_1^2$ ή $s_1 = 10\ m$

(δεξιά από το σημείο Α)

β) Ακριβώς πριν από την κρούση έχουμε:

$υ_1 = α_1 t_1 = 10\ m/s$ και $υ_2 = -10\ m/s$

$υ_1' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}υ_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1$ ή $υ_1' = -20\ m/s$

$υ_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}υ_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}υ_2$ ή $υ_2' = 0$

γ) $π_K\% = \frac{K_1' - K_1}{K_1}100\% =$

$= \frac{\frac{1}{2}m_1υ_1'^2 - \frac{1}{2}m_1υ_1^2}{\frac{1}{2}m_1υ_1^2}100\% =$

$= \frac{υ_1'^2 - υ_1^2}{υ_1^2}100\% = 300\%$

δ) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το σώμα $Σ_1$ από το σημείο Α μέχρι να σταματήσει:

$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_T$ ή $0 - \frac{1}{2}m_1υ_1'^2 = -Ts$ ή

$\frac{1}{2}m_1υ_1'^2 = μm_1 gs$ ή $s = \frac{υ_1'^2}{2μg}$ ή $s = 50\ m$

και $s_{ολ} = s + s_1 = 60\ m$

**1.101** α) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το $Σ_1$ από το Γ έως το Β:

$K_B - K_Γ = W_{w_1}$ ή

$\frac{1}{2}m_1υ_B^2 - \frac{1}{2}m_1υ_1^2 = -m_1 gημφ s_1$ ή

$υ_B = \sqrt{υ_1^2 - 2gημφ s_1}$ ή $υ_B = 2\ m/s$

Κατά την κρούση του $Σ_1$ με τον τοίχο ισχύει:

$K_1' = \frac{25}{100}K_1$ ή $\frac{1}{2}m_1υ_B'^2 = \frac{25}{100}\frac{1}{2}m_1υ_B^2$ ή

$υ_B' = 0{,}5υ_B$ ή $υ_B' = 1\ m/s$

$Δp_1 = m_1υ_B' - (-m_1υ_B) = 3\ kg \cdot m/s$

β) Από το ΘΜΚΕ για το $Σ_1$ από το Β ως το Α έχουμε:

$K_A - K_B = W_{w_1}$ ή

$\frac{1}{2}m_1υ_1'^2 - \frac{1}{2}m_1υ_B'^2 = m_1 gημφ s$ ή

$s = \frac{υ_1'^2 - υ_B'^2}{2gημφ}$ ή $s = 1{,}5\ m$

γ) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το $Σ_1$ μετά την κρούση με το $Σ_2$ από το Α έως το Δ:

$K_Δ - K_A = W_{w_1}$ ή

$0 - \frac{1}{2}m_1υ_1''^2 = -m_1 gημφ ΑΔ$ ή

$υ_1'' = \sqrt{2gημφΑΔ}$ ή $υ_1'' = \pm 2\ m/s$ ή

$υ_1'' = -2\ m/s$

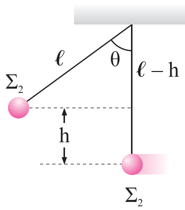
$υ_1'' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1'$ ή $m_2 = 3\ kg$

δ) $υ_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}υ_1'$ ή $υ_2' = 2\ m/s$

$T_{θρ} - w_2 = m_2\frac{υ_2'^2}{\ell}$ ή $T_{θρ} = m_2 g + m_2\frac{υ_2'^2}{\ell}$ ή

$T_{θρ} = 60\ N$

ε) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το $Σ_2$ από τη στιγμή ακριβώς μετά την κρούση μέχρι να σταματήσει στιγμιαία:




$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{w_2}$ ή $0 - \frac{1}{2}m_2 υ_2'^2 = -m_2 gh$ ή

$h = \frac{υ_2'^2}{2g}$ ή $h = 0{,}2$ m

$συνθ = \frac{\ell - h}{\ell}$ ή $συνθ = \frac{1}{2}$ ή $θ = 60^o$

**1.102** α) Από το ΘΜΚΕ από Α έως Γ έχουμε:

$\frac{1}{2}m_1 υ_0^2 = m_1 gR$ ή $υ_0 = \sqrt{2gR}$ ή $υ_0 = 10$ m/s

β) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από το Γ έως το Δ.

$K_1 - K_0 = W_T$ ή $\frac{1}{2}m_1 υ_1^2 - \frac{1}{2}m_1 υ_0^2 = -μ m_1 g s_1$ ή

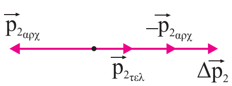
$υ_1 = \sqrt{υ_0^2 - 2μ g s_1}$ ή $υ_1 = 8$ m/s

$υ_1' = \frac{(m_2 - m_1)υ_1 - 2m_2 υ_2}{m_1 + m_2}$ ή $υ_1' = -10$ m/s

$υ_2' = \frac{-(m_2 - m_1)υ_2 + 2m_1 υ_1}{m_1 + m_2}$ ή $υ_2' = 2$ m/s

γ) $Δ\vec{p}_2 = \vec{p}_{2_{τελ}} - \vec{p}_{2_{αρχ}}$ ή $Δp_2 = m_2 υ_2' - (-m_2 υ_2)$

ή $Δp_2 = 18$ kg · m/s



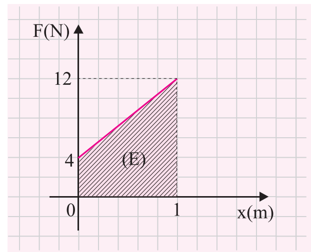

δ) $π_{K_1}\% = \frac{\frac{1}{2}m_1 υ_1'^2 - \frac{1}{2}m_1 υ_1^2}{\frac{1}{2}m_1 υ_1^2} 100\%$ ή

$π_K\% = 56{,}25\%$

**1.103** α) Για $x_0 = 0$ m έχουμε: $F_0 = 4$ N

Για $x_1 = 1$ m έχουμε: $F_1 = 12$ N

$W_F = (E) = \frac{4 + 12}{2} \cdot 1\ \text{J} = 8$ J




Εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ για τη $Σ_1$ από $x_0$ έως $x_1$, έχουμε:

$K_1 - K_0 = W_F$ ή $\frac{1}{2}m_1 υ_1^2 - 0 = W_F$ ή

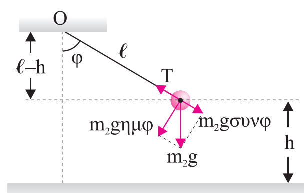
$υ_1 = \sqrt{\frac{2W_F}{m_1}}$ ή $υ_1 = 4$ m/s

β) $υ_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} υ_1$ ή $υ_1' = -2$ m/s

$υ_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} υ_1$ ή $υ_2' = 2$ m/s

γ) $π\% = \frac{K_2'}{W_F} 100\% = \frac{\frac{1}{2}m_2 υ_2^2}{W_F} 100\% = 75\%$

δ)



$U_{max} = \frac{1}{2} m_2 u_2'^2$ ή $U_{max} = 6\ J$

$U_{max} = mgh$ ή $h = \frac{U_{max}}{mg}$ ή $h = 0,2\ m$

$συνφ = \frac{\ell - h}{\ell}$ ή $συνφ = \frac{1}{2}$

$ΣF_y = 0$ ή $T = m_2 g συνφ$ ή $T = 15N$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

## ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

### Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

2.5β, 2.6β, 2.7δ, 2.8α, 2.9β, 2.10β, 2.11γ, 2.12β, 2.13β, 2.14α, 2.15δ, 2.16β, 2.17α, 2.18γ, 2.19γ, 2.20δ, 2.21γ, 2.22α, 2.23β, 2.24β, 2.25α

### Ερωτήσεις κατανόησης

**2.26** β: $\vec{p}_{αρχ_x} = \vec{p}_{τελ_x}$ ή

$m_1 u_0 συν60° = (m_1 + m_2) u_κ$ ή

$\frac{m_1 u_0}{2} = 2m_1 u_κ$ ή $u_0 = 4u_κ$

**2.27** γ: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_1 u_0 = (m_1 + 2m_1) u_κ$

ή $u_κ = \frac{u_0}{3}$

$$π_K\% = \frac{K_{τελ} - K_{αρχ}}{K_{αρχ}} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} 3m_1 u_κ^2 - \frac{1}{2} m_1 u_0^2}{\frac{1}{2} m_1 u_0^2} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{u_0^2}{9} - u_0^2}{u_0^2} \cdot 100\% = -66,66\%$$

**2.28** β: Από το ΘΜΚΕ για τη σφαίρα μάζας $m_1$ έχουμε:

$K_{1τελ} - K_{1αρχ} = W_{w_1}$ ή $\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = m_1 gh$ ή

$u_1 = \sqrt{2gh}$

Από το ΘΜΚΕ για τη σφαίρα μάζας $m_2$ έχουμε:

$K_{2τελ} - K_{2αρχ} = W_{w_2}$ ή $\frac{1}{2} m_2 u_2^2 = m_2 gR$ ή

$u_2 = \sqrt{2gR}$

Στην πλαστική κρούση έχουμε διατήρηση της ορμής:

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_1 u_1 - m_2 u_2 = 0$ ή

$m_1 \sqrt{2gh} = 3m_1 \sqrt{2gR}$ ή $\sqrt{h} = 3\sqrt{R}$ ή

$h = 9R$

**2.29** α: Στον άξονα x΄x έχουμε:

$\vec{p}_{αρχ_x} = \vec{p}_{τελ_x}$ ή

$m_1 u_1 συν30° - m_2 u_2 συν60° = 0$ ή

$u_1 συν30° = u_2 συν60°$ ή $\frac{\sqrt{3}}{2} u_1 = \frac{1}{2} u_2$ ή

$\frac{u_2}{u_1} = \sqrt{3}$

**2.30** β: Από την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα έχουμε:

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_1 u_1 = m_1 u_1' + m_2 u_2'$ ή

$u_1 = u_1' + u_2'$ ή $u_1' = 5 m/s$

Ελέγχουμε αν ισχύει η αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας:

$K_{αρχ} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 = 200 m_1$ και

$K_{τελ} = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 =$

$= 12,5 m_1 + 112,5 m_1 = 125 m_1$

Επειδή $K_{αρχ} \neq K_{τελ}$, η κρούση είναι ανελαστική.

**2.31** β: Για το σύστημα των σωμάτων Α και Β έχουμε:

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \quad ή \quad m_1υ_1 = 2m_1υ_{1,2} \quad ή \quad υ_{1,2} = \frac{υ_1}{2}$$

Για το σύστημα των σωμάτων Α-Β και Γ έχουμε:

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \quad ή \quad 2m_1υ_{1,2} = 4m_1υ_κ \quad ή \quad υ_κ = \frac{υ_1}{4}$$

Άρα:

$$π_{K_A}\% = \frac{K''_A}{K_A}\cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2}m_1υ_κ^2}{\frac{1}{2}m_1υ_1^2}\cdot 100\% =$$

$$= \frac{\frac{υ_1^2}{16}}{υ_1^2}100\% = 6,25\%$$

**2.32** γ: Από το ΘΜΚΕ για τη σφαίρα Α από την αρχική της θέση μέχρι ακριβώς πριν από τη σύγκρουση έχουμε:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{w_A} \;\; ή \;\; \frac{1}{2}m_Aυ_A^2 - 0 = m_Agh \;\; ή$$

$$υ_A = \sqrt{2gh}$$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \quad ή \quad m_Aυ_A = (m_A + m_B)υ_κ \quad ή$$

$$υ_κ = \frac{υ_A}{2}$$

Από το ΘΜΚΕ για το συσσωμάτωμα από τη στιγμή της σύγκρουσης μέχρι να σταματήσει στιγμιαία έχουμε:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{w_κ} \quad ή$$

$$0 - \frac{1}{2}(m_A + m_B)υ_κ^2 = -(m_A + m_B)gh_1 \quad ή$$

$$h_1 = \frac{υ_κ^2}{2g} = \frac{υ_A^2}{8g} = \frac{2gh}{8g} = \frac{h}{4}$$

$$π_{U_A}\% = \frac{U'_A - U_A}{U_A}\cdot 100\% =$$

$$= \frac{m_Agh_1 - m_Agh}{m_Agh}\cdot 100\% =$$

$$= \frac{h_1 - h}{h}\cdot 100\% = -75\%$$

**2.33** β: Από το ΘΜΚΕ από την αρχική θέση μέχρι ακριβώς πριν από τη σύγκρουση έχουμε:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w \;\; ή \;\; K_1 = m_1gh_1 \quad (1)$$

Από το ΘΜΚΕ ακριβώς μετά τη σύγκρουση μέχρι το ύψος $h_2$ έχουμε: $K'_{τελ} - K'_{αρχ} = W_w$ ή

$$-K'_1 = -m_1gh_2 \quad ή \quad K'_1 = m_1g\frac{2h_1}{3} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει: $K'_1 = \dfrac{2K_1}{3}$

$$π_K\% = \frac{K'_1 - K_1}{K_1}\cdot 100\% = -33,33\%$$

**2.34** β: Από την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα βλήμα-κιβώτιο έχουμε:

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \quad ή \quad mυ_0 = m\frac{υ_0}{2} + p_κ \quad ή$$

$$p_κ = \frac{mυ_0}{2}$$

$$Δp_κ = p_κ - 0 = \frac{mυ_0}{2}$$

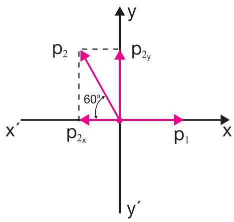
**2.35** α: Από την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των σωμάτων Α και Β έχουμε:

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \quad ή \quad m_2υ_0 - m_1υ_0 = (m_1 + m_2)υ_κ \quad ή$$

$$υ_κ = \frac{(4m_1 - m_1)υ_0}{5m_1} = \frac{3}{5}υ_0$$

$$\frac{K_B}{K'_B} = \frac{\frac{1}{2}m_2υ_0^2}{\frac{1}{2}m_2υ_κ^2} = \frac{υ_0^2}{υ_κ^2} = \frac{25}{9}$$

**2.36** γ: Από την αρχή διατήρησης της ορμής στον άξονα x΄x και στον άξονα y΄y έχουμε:




$\vec{p}_{αρχ_x} = \vec{p}_{τελ_x}$ ή

$mυ - mυσυν60^\circ = 2mυ_{κ_x}$

ή $υ_{κ_x} = \dfrac{υ}{4}$

$\vec{p}_{αρχ_y} = \vec{p}_{τελ_y}$ ή

$mυημ60^\circ = 2mυ_{κ_y}$ ή $υ_{κ_y} = \dfrac{υ\sqrt{3}}{4}$

Άρα: $υ_κ^2 = υ_{κ_x}^2 + υ_{κ_y}^2$ ή $υ_κ^2 = \dfrac{υ^2}{4}$

$|ΔK| = |K_{τελ} - K_{αρχ}| =$

$= \left|\dfrac{1}{2}\cdot 2mυ_κ^2 - \dfrac{1}{2}mυ^2 - \dfrac{1}{2}mυ^2\right| = \dfrac{3mυ^2}{4}$

**2.37** α: Από την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα έχουμε:

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $mυ_1 - 4mυ_2 = 0$ ή

$υ_2 = \dfrac{υ_1}{4}$

$|ΔE_{μηχ}| = |K_{τελ} - K_{αρχ}| =$

$= \left|0 - \dfrac{1}{2}mυ_1^2 - \dfrac{1}{2}\cdot 4m\dfrac{υ_1^2}{16}\right| = \left|-K - \dfrac{K}{4}\right| = \dfrac{5K}{4}$

**2.38** γ: Από την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των σωμάτων Α και Β έχουμε:

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $\vec{p}_A + \vec{p}_B = 0$ ή $\vec{p}_A = -\vec{p}_B$

Άρα: $\dfrac{|p_A|}{|p_B|} = 1$

**2.39** β: Από ΑΔΟ για τον άξονα x΄x έχουμε:

$m_1υ_1 = (m_1 + m_2)υ_{K_x}$ ή

$υ_{K_x} = \dfrac{m_1υ_1}{m_1 + m_2} = 1{,}6\ m/s$

Από ΑΔΟ για τον άξονα y΄y έχουμε:

$m_2υ_2 = (m_1 + m_2)υ_{K_y}$ ή

$υ_{K_y} = \dfrac{m_2υ_2}{m_1 + m_2} = 1{,}2\,m/s$

$K = \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)υ_K^2 = \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)(υ_{K_x}^2 + υ_{K_y}^2)$ ή

K = 10J

**2.40** γ: Από την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα έχουμε:

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $mυ = (m + 2m)υ_κ$ ή

$υ_κ = \dfrac{υ}{3}$

**2.41** γ: Από την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων έχουμε:

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_1υ_1 + m_2υ_2 = (m_1 + m_2)υ_κ$

ή $4mυ + 2mυ = 2mυ_κ$ ή $υ_κ = 3υ$

$π_{υ_2}\% = \dfrac{υ_κ - υ_2}{υ_2}\cdot 100\% = \dfrac{3υ - 2υ}{2υ}\cdot 100\% = 50\%$

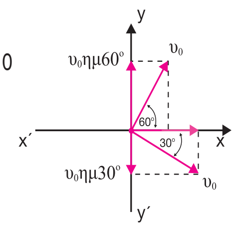
**2.42** γ: Από την αρχή διατήρησης της ορμής στον άξονα y΄y έχουμε:

$\vec{p}_{αρχ_y} = \vec{p}_{τελ_y}$ ή

$-m_1υ_0ημ30^\circ + m_2υ_0ημ60^\circ = 0$

ή $m_2\dfrac{\sqrt{3}}{2} = m_1\dfrac{1}{2}$ ή

$m_1 = m_2\sqrt{3}$



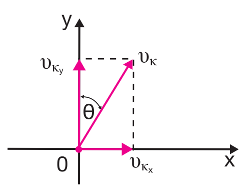

**2.43** β: Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των σωμάτων στους άξονες x΄x και y΄y:

$\vec{p}_{αρχ_x} = \vec{p}_{τελ_x}$ ή

$m_1υ_1 = (m_1 + m_2)υ_{κ_x}$

ή $m\dfrac{υ_0}{2} = 2mυ_{κ_x}$

ή $υ_{κ_x} = \dfrac{υ_0}{4}$




$\vec{p}_{αρχ_y} = \vec{p}_{τελ_y}$ ή

$m_2υ_2 = (m_1 + m_2)υ_{κ_y}$ ή

$$m\frac{\upsilon_0\sqrt{3}}{4} = 2m\upsilon_{\kappa_y} \quad \text{ή}$$

$$\upsilon_{\kappa_y} = \frac{\upsilon_0\sqrt{3}}{4} \quad \text{και}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\upsilon_{\kappa_x}}{\upsilon_{\kappa_y}} = \frac{\frac{\upsilon_0}{4}}{\frac{\upsilon_0\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ή} \quad \theta = 30^\circ$$

**2.44** α: Έστω $K_1$ η κινητική ενέργεια της σφαίρας ακριβώς πριν από την πρώτη σύγκρουση και $K_1'$ η κινητική της ενέργεια αμέσως μετά.

Ισχύει: $K_1' = \frac{90}{100}K_1 \quad (1)$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για την κίνηση της σφαίρας από το ύψος h μέχρι να χτυπήσει για πρώτη φορά στο έδαφος και την ΑΔΜΕ για την κίνηση της σφαίρας αμέσως μετά την πρώτη κρούση μέχρι το ύψος $h_1$:

$$K_1 = mgh \quad (2) \quad \text{και} \quad K_1' = mgh_1 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε:

$$mgh_1 = 0{,}9mgh \quad \text{ή} \quad h_1 = 0{,}9h \quad (4)$$

Εργαζόμαστε ομοίως για τη δεύτερη και την τρίτη κρούση και έχουμε:

$$h_2 = 0{,}9h_1 \quad (5) \qquad \text{και} \qquad h_3 = 0{,}9h_2 \quad (6)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις (4), (5), (6), έχουμε:

$$h_3 = (0{,}9)^3 h$$

**2.45** β: Από την αρχή διατήρησης της ορμής για τα συστήματα βλήμα-σώμα Α και βλήμα-σώμα Β έχουμε:

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \quad \text{ή} \quad m\upsilon_0 = m\frac{\upsilon_0}{2} + p_A \quad \text{ή}$$

$$p_A = \frac{m\upsilon_0}{2} \quad (1)$$

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \quad \text{ή} \quad \frac{m\upsilon_0}{2} = \frac{m\upsilon_0}{4} + p_B \quad \text{ή}$$

$$p_B = \frac{m\upsilon_0}{4} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $p_A = 2p_B$

**2.46** α: Στην πρώτη περίπτωση:

$$Q_1 = |\Delta K| = K = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2$$

Στη δεύτερη περίπτωση:

$$K = K_{\sigma\upsilon\sigma\tau} + Q_2 \quad \text{ή} \quad Q_2 = K - K_{\sigma\upsilon\sigma\tau} \quad \text{ή}$$

$$Q_2 = Q_1 - K_{\sigma\upsilon\sigma\tau} \quad \text{ή} \quad Q_2 < Q_1$$

**2.47** γ: Αμέσως μετά την κρούση ισχύει:

$$\Sigma F = F_\kappa \quad \text{ή} \quad T - w_1 - w_2 = \frac{(m_1+m_2)\upsilon_\kappa^2}{\ell} \quad \text{ή}$$

$$T = (m_1+m_2)\frac{\upsilon_\kappa^2}{\ell} + (m_1+m_2)g$$

**2.48** β: Στον άξονα x΄x έχουμε διατήρηση της ορμής για το σύστημα, ενώ στον άξονα y΄y έχουμε μεταβολή της ορμής.

Άρα: $\Delta\vec{p} = \Delta\vec{p}_x + \Delta\vec{p}_y \quad \text{ή} \quad \Delta\vec{p} = \Delta\vec{p}_y \quad \text{ή}$

$$|\Delta p| = |0 - m_2\upsilon_0| = m\upsilon_0$$

**2.49** β: $\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή $m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)\upsilon_\kappa$ ή

$$\upsilon_\kappa = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

Από ΑΔΜΕ:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_\kappa^2 = (m_1 + m_2)gh \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_\kappa^2 = (m_1 + m_2)g\ell(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi) \text{ ή}$$

$$\upsilon_\kappa^2 = 2g\ell(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi) \quad (2)$$

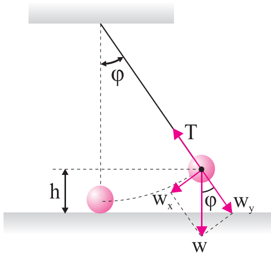
$$T = w_y \text{ ή } T = (m_1 + m_2)g\sigma\upsilon\nu\varphi \text{ ή}$$

$$m_2 g = (m_1 + m_2)g\sigma\upsilon\nu\varphi \text{ ή}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$m_1 = m_2$$




**2.50** β: Για το σύστημα βλήμα - σώμα $Σ_1$:

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $mυ = m_1υ_1' + mυ'$ ή

$mυ = 3m\dfrac{υ}{9} + mυ'$ ή $υ' = \dfrac{2}{3}υ$

Για το σύστημα βλήμα - σώμα $Σ_2$:

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $mυ' = m_2υ_2' + mυ''$ ή

$m\dfrac{2υ}{3} = 5m\dfrac{υ}{10} + mυ''$ ή $υ'' = \dfrac{υ}{6}$

$$π_K\% = \frac{K'' - K}{K}100\% =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}mυ''^2 - \frac{1}{2}mυ^2}{\frac{1}{2}mυ^2}100\% = -97{,}22\%$$

**2.51** β: ΘΜΚΕ για τη σφαίρα $Σ_1$:

$\dfrac{1}{2}m_1υ_1^2 = m_1gh_1$ ή $υ_1^2 = 2gh_1$ ή

$υ_1^2 = 2g(\ell - \ell συν30^o)$ ή $υ_1^2 = 2g\ell\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ΘΜΚΕ για τη σφαίρα $Σ_2$:

$\dfrac{1}{2}m_2υ_2^2 = m_2gh_2$ ή $υ_2^2 = 2gh_2$ ή

$υ_2^2 = 2g(\ell - \ell συνφ_2)$ ή $υ_2^2 = 2g\ell(1 - συνφ_2)$

ΑΔΟ για το σύστημα:

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_1υ_1 - m_2υ_2 = 0$ ή $m_1υ_1 = m_2υ_2$

ή $m_1^2υ_1^2 = m_2^2υ_2^2$

$$m_1^2 \cdot 2g\ell\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= m_1^2(2 - \sqrt{3}) \cdot 2g\ell(1 - συνφ_2)$$

ή $1 - συνφ_2 = \dfrac{1}{2}$ ή $συνφ_2 = \dfrac{1}{2}$ ή $φ_2 = 60^o$

**2.52** γ: ΑΔΜΕ για τη σφαίρα $Σ_1$:

$\dfrac{1}{2}m_1υ_1^2 = m_1gh_1$ ή $υ_1 = \sqrt{2gh_1}$

Για την κρούση:

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_1υ_1 = (m_1 + m_2)υ_κ$ ή

$mυ_1 = 5mυ_κ$ ή $υ_κ = \dfrac{\sqrt{2gh_1}}{5}$

ΑΔΜΕ για το συσσωμάτωμα:

$\dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)υ_κ^2 = (m_1 + m_2)gh_2$ ή $h_1 = 25h_2$

**2.53** α: ΘΜΚΕ για το $Σ_1$ μετά την κρούση:

$K_{τελ_1} - K_{αρχ_1} = W_T$ ή $0 - \dfrac{1}{2}m_1υ_1'^2 = -μm_1gs_1$ ή

$s_1 = \dfrac{υ_1'^2}{2μg}$ ή $\dfrac{υ^2}{8μg} = \dfrac{υ_1'^2}{2μg}$ ή $υ_1' = -\dfrac{υ}{2}$

Για την κρούση ισχύει:

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_1υ = m_1υ_1' + m_2υ_2'$ ή

$mυ = -\dfrac{mυ}{2} + 3mυ_2'$ ή $υ_2' = \dfrac{υ}{2}$

$K_{αρχ} = K_{αρχ_1} + K_{αρχ_2} = \dfrac{1}{2}mυ_1^2$

$K_{τελ} = K_{τελ_1} + K_{τελ_2} = \dfrac{1}{2}m_1υ_1'^2 + \dfrac{1}{2}m_2υ_2'^2$

$= \dfrac{1}{2}m\dfrac{υ^2}{4} + \dfrac{1}{2}3m\dfrac{υ^2}{4} = \dfrac{1}{2}mυ^2 = K_{αρχ}$

$K_{αρχ_1} + K_{αρχ_2} = K_{τελ_1} + K_{τελ_2}$ ή

$K_{τελ_1} - K_{αρχ_1} = -(K_{τελ_2} - K_{αρχ_2})$ ή $ΔK_1 = -ΔK_2$

**2.54** γ: $0-\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = -m_2gh$ ή $\upsilon_2'^2 = 2gh$ ή

$\upsilon_2'^2 = 2g\frac{\upsilon_1^2}{32g}$ ή $\upsilon_2' = \frac{\upsilon_1}{4}$

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_1\upsilon_1 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2'$ ή

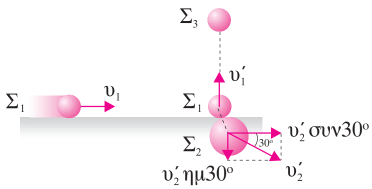
$m\upsilon_1 = m\upsilon_1' + 5m\frac{\upsilon_1}{4}$ ή $\upsilon_1' = -\frac{\upsilon_1}{4}$

$$|\Delta K| = \left|\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}m\frac{\upsilon_1^2}{16} + \frac{1}{2}5m\frac{\upsilon_1^2}{16} - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2\right|$$

ή $|\Delta K| = \frac{5m\upsilon_1^2}{16}$

**2.55** γ: Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής στους άξονες x΄x και y΄y:




$\vec{p}_x = \vec{p}_x{'}$ ή $m_1\upsilon_1 = m_2\upsilon_2'συν30^o$ ή

$m\upsilon_1 = 2m\upsilon_2'\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ ή $\upsilon_1 = \upsilon_2'\sqrt{3}$ (1)

$\vec{p}_y = \vec{p}_y{'}$ ή $0 = m_1\upsilon_1' - m_2\upsilon_2'ημ30^o$ ή

$m\upsilon_1' = 2m\upsilon_2'\cdot\frac{1}{2}$ ή $\upsilon_1' = \upsilon_2'$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2):

$\upsilon_1 = \upsilon_1'\sqrt{3}$ ή $\upsilon_1' = \frac{\upsilon_1\sqrt{3}}{3}$ (3)

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για την πλαστική κρούση:

$\vec{p} = \vec{p}\,'$ ή $m_1\upsilon_1' = (m_1 + m_3)\upsilon_σ$

ή $m\upsilon_1' = 2m\upsilon_σ$ ή

$\frac{\upsilon_1\sqrt{3}}{3} = 2\upsilon_σ$ ή $\upsilon_σ = \frac{\upsilon_1\sqrt{3}}{6}$

$$\frac{K_σ}{K_1} = \frac{\frac{1}{2}(m_1+m_3)\upsilon_σ^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2} = \frac{2m\left(\frac{\upsilon_1\sqrt{3}}{6}\right)^2}{m\upsilon_1^2} = \frac{1}{6}$$

## Ασκήσεις

**2.56** α) $m\upsilon_β = (m + M)\,\upsilon_κ$ ή $\upsilon_κ = 12\,m/s$

β) $π\% = \dfrac{\frac{1}{2}(m+M)\upsilon_κ^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_β^2}{\frac{1}{2}m\upsilon_β^2}100\% = -98\%$

γ) Από ΘΜΚΕ για το συσσωμάτωμα:

$0-\frac{1}{2}(m+M)\upsilon_κ^2 = -Ts$ ή

$-\frac{1}{2}(m+M)\upsilon_κ^2 = -μ(m+M)gs$

ή $s = 18$ m

**2.57** α) $m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = (M+m_1+m_2)\upsilon_κ$
ή $\upsilon_κ = 4$ m/s

β) $ΣF = \frac{Δp}{Δt} = \frac{M\upsilon_κ - 0}{Δt} = 1.920N$

γ) $Δp_2 = m_2\upsilon_κ - m_2(-\upsilon_2) = 204kg\cdot m/s$

δ) $\Sigma F = m_{o\lambda}\alpha$ ή $\mu m_{o\lambda}g = m_{o\lambda}|\alpha|$ ή $|\alpha| = 2m/s^2$
$\upsilon = \upsilon_\kappa - |\alpha|t$ και για $\upsilon = 0 : t = 2s$

**2.58** α) Για το όχημα: $p_{\tau\varepsilon\lambda} = 1,5\, p_{\alpha\rho\chi}$ ή
$M\upsilon_\kappa = 1,5M\upsilon$ ή $\upsilon_\kappa = 1,5\upsilon$

Για το σύστημα: $\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή
$M\upsilon_3 + m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = (M + m_1 + m_2)\upsilon_\kappa$ ή
$M\upsilon + 8m\upsilon - 2m\upsilon = (M + 3m)1,5\upsilon$ ή $M = 3m$

β) $$\pi\% = \frac{\frac{1}{2}M\upsilon_\kappa^2 - \frac{1}{2}M\upsilon^2}{\frac{1}{2}M\upsilon^2}100\% = 125\%$$

**2.59** α) Από ΑΔΟ: $m\upsilon_\beta = (m + M)\,\upsilon_\kappa$ (1)

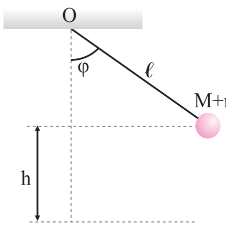
$$U_{max} = \frac{1}{2}(m+M)\upsilon_\kappa^2 \quad (2)$$

Διαιρώντας τη (2) με την (1): $\upsilon_\kappa = 10m/s$
Από (1): $M = 29kg$

β) $T-(M+m)g = (M+m)\,\dfrac{\upsilon_\kappa^2}{\ell}$ ή $T = 600N$

γ) $$\pi\% = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon_\kappa^2}{\frac{1}{2}m\upsilon_\beta^2}100\% = 0,11\%$$

δ) $U_{max} = (M+m)gh$ ή $h = 5m$




συνφ $= \dfrac{\ell - h}{\ell} = 0,5$, άρα $\varphi = 60^o$

**2.60** α) Από ΘΜΚΕ για το $\Sigma_1$:

$$m_1gh = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - 0 \text{ ή } \upsilon_1 = \sqrt{2gh}$$

Από ΑΔΟ:

$m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)\,\upsilon_\kappa$ ή $\upsilon_\kappa = \dfrac{\upsilon_1}{4} = \dfrac{\sqrt{2gh}}{4}$

Από ΑΔΜΕ για το συσσωμάτωμα:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_\kappa^2 = (m_1 + m_2)gh_1 \text{ ή}$$

$$h_1 = \frac{\upsilon_\kappa^2}{2g} = \frac{h}{16}$$

β) $$\pi\% = \frac{\frac{1}{2}m_2\upsilon_\kappa^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}100\% = \frac{3m_1\frac{\upsilon_1^2}{16}}{m_1\upsilon_1^2}100\% = 18,75\%$$

**2.61** α) $m_1g\ell = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2$ ή $\upsilon_1 = 6m/s$ η ταχύτητα του $\Sigma_1$ πριν από την κρούση.

$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = m_1gh$ ή $\upsilon_1' = 3m/s$ το μέτρο της ταχύτητας του $\Sigma_1$ αμέσως μετά την κρούση.

Από ΑΔΟ:
$m_1\upsilon_1 = M\upsilon - m_1\,\upsilon_1'$ ή $\upsilon = 2m/s$

β) $$K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = 72J$$

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = 54J$$

$K_{\tau\varepsilon\lambda} < K_{\alpha\rho\chi}$, άρα η κρούση είναι ανελαστική.
γ) $\Delta p = -\,m_1\,\upsilon_1' - m_1\upsilon_1 = -\,36kg \cdot m/s$
$|\Delta p| = 36kg \cdot m/s$

**2.62** α) $m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)\,\upsilon_\kappa$ ή $\upsilon_\kappa = 10m/s$, μετά την πρώτη κρούση.
$(m_1 + m_2)\,\upsilon_\kappa - m_3\upsilon_3 = (m_1 + m_2 + m_3)\,\upsilon_\kappa'$ ή
$\upsilon_\kappa' = 5m/s$

β) $$\pi\% = \frac{\frac{1}{2}m_1\upsilon_\kappa'^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}100\% = 1,56\%$$

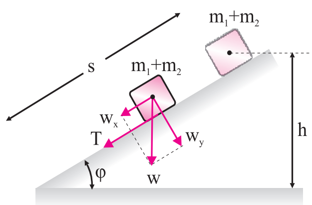
γ) $$W_{o\lambda} = \Delta K = \frac{1}{2}m_1\upsilon_\kappa'^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = -787,5J$$

**2.63** α) $m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\,\upsilon_\kappa$ ή

$$\upsilon_\kappa = \frac{10}{3}m/s$$

β) Από ΘΜΚΕ: $\Delta K = W_{w_x} + W_T$ ή

$$0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_\kappa^2 =$$
$$= -(m_1 + m_2)g\eta\mu\varphi s - \mu(m_1 + m_2)gs\sigma\upsilon\nu\varphi$$
ή $s = 0,854m$




$h = s\eta\mu\varphi = 0{,}427m$

$U_{max} = (m_1+m_2)gh = 25{,}62J$

$$\gamma)\ \ \pi\% = \frac{\left|\frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon_\kappa^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2\right|}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2}100\% =$$

$$= 92{,}59\%$$

## Προβλήματα

**2.64** α) Από ΑΔΟ στον άξονα x΄x:

$m_1\upsilon_1\sigma\upsilon\nu\varphi = (m_1 + M)\upsilon_\kappa$ ή $\upsilon_\kappa = 10m/s$

$$\beta)\ \ \pi\% = \frac{\left|\frac{1}{2}(m_1+M)\upsilon_\kappa^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2\right|}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}100\% = 97{,}91\%$$

$$\gamma)\ \ \frac{1}{2}(m_1+M)\upsilon_\kappa^2 = (m_1+M)gh_{max} \text{ ή } h_{max} = 5m$$

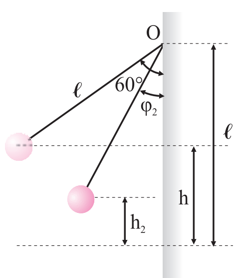
δ) Μεταβολή της ορμής του συστήματος έχουμε μόνο στον άξονα y΄y.
Ορίζουμε θετική τη φορά προς τα κάτω.

$\Delta p = 0 - p_{y_{\beta\lambda}} = 0 - m_1\upsilon_1\eta\mu\varphi =$

$= -120\sqrt{3}\ kg\cdot m/s$

**2.65** α) Έστω h το αρχικό ύψος του σώματος.

$$h = \ell - \ell\,\sigma\upsilon\nu 60^o = \frac{\ell}{2}$$




Έστω $h_1$ το ύψος του σώματος μετά την πρώτη κρούση.

$mgh_1 = 0{,}8mgh$ ή $h_1 = 0{,}8h$

Μετά τη δεύτερη κρούση:

$mgh_2 = 0{,}8mgh_1 = 0{,}64mgh$ ή $h_2 = 0{,}64h$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi_2 = \frac{\ell - h_2}{\ell} = \frac{\ell - 0{,}64h}{\ell} =$$

$$= \frac{\ell - 0{,}64\frac{\ell}{2}}{\ell} = 0{,}68$$

β) Μετά από ν κρούσεις:

$mgh_\nu = (0{,}8)^\nu mgh$ ή $h_\nu = (0{,}8)^\nu h$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi_\nu = \frac{\ell - h_\nu}{\ell} = \frac{\ell - (0{,}8)^\nu h}{\ell} =$$

$$= \frac{\ell - (0{,}8)^\nu\frac{\ell}{2}}{\ell} = 1 - \frac{1}{2}(0{,}8)^\nu$$

**2.66** α) $\vec{p}_{\alpha\rho\chi_x} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda_x}$ ή

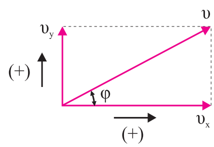
$m_1\upsilon_1\sigma\upsilon\nu 30^o + m_2\upsilon_2\sigma\upsilon\nu 60^o + m_3\upsilon_3 =$

$= (m_1 + m_2 + m_3)\ \upsilon_x$ ή $\upsilon_x = 7{,}27m/s$

$\vec{p}_{\alpha\rho\chi_y} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda_y}$ ή $-m_1\upsilon_1\eta\mu 30^o + m_2\upsilon_2\eta\mu 60^o =$

$= (m_1 + m_2 + m_3)\ \upsilon_y$ ή $\upsilon_y = 3{,}49m/s$

$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = 8{,}064m/s$




$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = 0{,}48$$

$$\beta)\ \ |\Delta K| = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}m_3\upsilon_3^2 -$$

$$-\frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)\upsilon^2 = 209{,}88J$$

**2.67** α) $\vec{p}_{\alpha\rho\chi_x} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda_x}$ ή $m_1\upsilon_1\eta\mu 30^o + M\upsilon =$

$= m_1\,\upsilon_1'\,\eta\mu 60^o + M\upsilon'$ ή $\upsilon' = 5{,}38m/s$

$$\beta)\ \ K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}M\upsilon^2 = 100J$$

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}M\upsilon'^2 = 65{,}88J$$

$K_{\tau\varepsilon\lambda} < K_{\alpha\rho\chi}$, άρα η κρούση είναι ανελαστική.

**2.68** α) $m\upsilon_1 = (M + m)\ \upsilon_\kappa$ ή $\upsilon_\kappa = 5m/s$

β) $|\Delta K| = |K_{τελ} - K_{αρχ}| =$

$$= \left|\frac{1}{2}(M+m)υ_κ^2 - \frac{1}{2}mυ_1^2\right| = 475J$$

**2.69** α) $mυ = (M+m)υ_κ$ ή $υ_κ = 2m/s$

β) $|\Delta K| = \left|\frac{1}{2}(M+m)υ_κ^2 - \frac{1}{2}mυ^2\right| = 19.800J$

γ) Από ΘΜΚΕ για την κίνηση του συσσωματώματος μέχρι να σταματήσει:

$$0 - \frac{1}{2}(M+m)υ_κ^2 = W_T \text{ ή}$$

$$-\frac{1}{2}(M+m)υ_κ^2 = -μ(M+m)gx \text{ ή } μ = 0,5$$

**2.70** α) $Mgh = \frac{1}{2}Mυ^2$ ή $υ = 5\sqrt{2}m/s$ η ταχύτητα του νεαρού πριν από τη σύγκρουση.

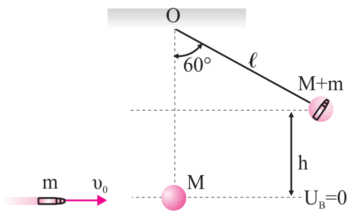
$Mυ = (M+m)υ_κ$ ή $υ_κ = 4\sqrt{2}m/s$ η κοινή ταχύτητα του νεαρού και του παιδιού αμέσως μετά τη σύγκρουση.

$$\frac{1}{2}(M+m)υ_κ^2 = (M+m)gh' \text{ ή } h' = 1,6m$$

β) $|\Delta E| = |(M+m)gh' - Mgh| = 200J$

**2.71** α) $h = \ell - \ell\,συν60^o = \frac{\ell}{2} = 0,45m$

$$(M+m)gh = \frac{1}{2}(M+m)υ_κ^2 \text{ ή } υ_κ = 3m/s$$

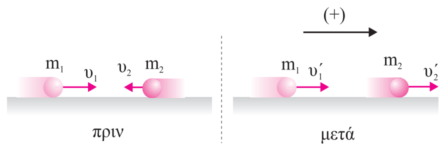



$mυ_0 = (M+m)υ_κ$ ή $υ_0 = 60m/s$

β) $$π\% = \frac{\frac{1}{2}(M+m)υ_κ^2 - \frac{1}{2}mυ_0^2}{\frac{1}{2}mυ_0^2}100\% = -95\%$$

**2.72** α) $m_1υ_1 - m_2υ_2 = m_1υ_1' + m_2υ_2'$ ή

$υ_2' = 1m/s$




β) $K_{αρχ} = \frac{1}{2}m_1υ_1^2 + \frac{1}{2}m_2υ_2^2 = 54J$

γ) $K_{τελ} = \frac{1}{2}m_1υ_1'^2 + \frac{1}{2}m_2υ_2'^2 = 9J$

$K_{τελ} < K_{αρχ}$, άρα η κρούση είναι ανελαστική.

**2.73** α) $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ και, επειδή $p_{αρχ_y} = 0$, ισχύει: $p_{τελ_y} = 0$

β) Μέρος της κινητικής ενέργειας του σώματος $Σ_1$ γίνεται θερμότητα κατά τη διάρκεια της κρούσης.

γ) $m_1υ_1 = (m_1+m_2)υ_κ$ ή $υ_1 = 4υ_κ$

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{\frac{1}{2}(m_1+m_2)υ_κ^2}{\frac{1}{2}m_1υ_1^2} = \frac{4υ_κ^2}{16υ_κ^2} = \frac{1}{4}$$

δ) Έστω $υ_1' = 2υ_1$.

$m_1υ_1' = (m_1+m_2)υ_κ'$ ή $υ_1' = 4υ_κ'$

Άρα, $\frac{K_2'}{K_1'} = \frac{1}{4}$, ο λόγος δε μεταβάλλεται.

**2.74** α) Η ταχύτητα του $Σ_1$ μετά τη σύγκρουσή του με το $Σ_2$ είναι:

$$υ_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1 \quad (1)$$

Επειδή η κινητική ενέργεια του $Σ_1$ κατά τη διάρκεια της κρούσης μειώνεται κατά 64%, έχουμε:

$$π_K\% = -64\% \text{ ή } \frac{K_1' - K_1}{K_1}\cdot 100\% = -64\% \text{ ή}$$

$$\frac{\frac{1}{2}m_1υ_1'^2 - \frac{1}{2}m_1υ_1^2}{\frac{1}{2}m_1υ_1^2}\cdot 100\% = -64\% \text{ ή}$$

$$\left(\frac{υ_1'^2}{υ_1^2} - 1\right)\cdot 100\% = -64\% \text{ ή } \frac{υ_1'^2}{υ_1^2} = 0,36 \text{ ή}$$

$\upsilon'_1 = \pm 0{,}6\upsilon_1 \quad (2)$

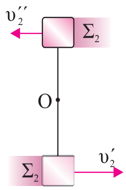
Από τις σχέσεις (1) και (2) και επειδή $m_2 > m_1$, προκύπτει:

$$\upsilon'_1 = -0{,}6\upsilon_1 \quad ή \quad \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -0{,}6\upsilon_1 \quad ή$$

$$\frac{2 - m_2}{2 + m_2} = -0{,}6 \quad ή \quad m_2 = 8\text{kg}$$

β) Αμέσως μετά τη σύγκρουση των σωμάτων $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ ισχύει:

$$\upsilon'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad ή \quad \upsilon'_2 = 8\,\text{m/s}$$




Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα $\Sigma_2$ από το κατώτερο έως το ανώτερο σημείο:

$$K''_2 - K'_2 = W_{w_2} \quad ή$$

$$\frac{1}{2}m_2\upsilon''^2_2 - \frac{1}{2}m_2\upsilon'^2_2 = -m_2 g \cdot 2\ell$$

$$ή \quad \upsilon''_2 = 6\,\text{m/s}$$

Όταν το $\Sigma_2$ φτάνει στην ανώτερη θέση, ισχύει:

$$T + w_2 = \frac{m_2\upsilon''^2_2}{\ell} \quad ή \quad T = -m_2 g + \frac{m_2\upsilon''^2_2}{\ell} \quad ή$$

$$T = 331\text{N}$$

γ) $\upsilon'_1 = -0{,}6\upsilon_1 \quad ή \quad \upsilon'_1 = -12\,\text{m/s}$

Κατά την πλαστική κρούση των $\Sigma_1$, $\Sigma_3$ ισχύει:

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \quad ή \quad m_1\upsilon'_1 - m_3\upsilon_3 = (m_1 + m_3)\upsilon_K \quad ή$$

$$\upsilon_K = \frac{m_1\upsilon'_1 - m_3\upsilon_3}{m_1 + m_3} = -5{,}6\,\text{m/s}$$

$$\pi_K\% = \frac{K_\sigma - K'_1 - K_3}{K'_1 + K_3}100\% =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_3)\upsilon_K^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon'^2_1 - \frac{1}{2}m_3\upsilon_3^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon'^2_1 + \frac{1}{2}m_3\upsilon_3^2}100\% =$$

$$= -24{,}61\%$$

δ) Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος $\Sigma_1$ κατά τη διάρκεια της σύγκρουσής του με το $\Sigma_3$ έχουμε:

$$K''_1 - K'_1 = W_{\Sigma F} \quad ή \quad W_{\Sigma F} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_K^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon'^2_1 \quad ή$$

$$W_{\Sigma F} = -112{,}64\text{J}$$

**2.75** α) Στην πλαστική κρούση ισχύει:

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \quad ή \quad m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon_K \quad ή$$

$$\upsilon_K = \frac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} \quad ή \quad \upsilon_K = 3\,\text{m/s}$$

β) $$\pi_K\% = \frac{K'_2 - K_2}{K_2}\cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2}m_2\upsilon_K^2 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2}{\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2}\cdot 100\% =$$

$$= \left(\frac{\upsilon_K^2}{\upsilon_2^2} - 1\right)\cdot 100\% = -43{,}75\%$$

γ) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το συσσωμάτωμα από το Α έως το Β:

$$K_B - K_A = W_w \quad ή$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_B^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_K^2 = -(m_1 + m_2)gR$$

$$ή \quad \upsilon_B = \sqrt{\upsilon_K^2 - 2gR} \quad ή \quad \upsilon_B = 1\,\text{m/s}$$

δ) Έστω ότι το συσσωμάτωμα σταματά σε ένα σημείο Γ που βρίσκεται σε ύψος $h_{max}$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από το Β έως το Γ:

$$K_\Gamma - K_B = W_w \quad ή$$

$$0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_B^2 = -(m_1 + m_2)g(h_{max} - R) \quad ή$$

$$h_{max} = R + \frac{\upsilon_B^2}{2g} \quad ή \quad h_{max} = 0{,}45\text{m}$$

**2.76** α) Το σώμα $\Sigma_1$ κινείται ευθύγραμμα ομαλά.

$$s_1 = AO \quad ή \quad \upsilon_1 t_1 = AO \quad ή \quad t_1 = \frac{AO}{\upsilon_1} \quad ή$$

$$t_1 = 1\text{s}$$

Το σώμα $Σ_2$ κινείται ευθύγραμμα ομαλά επιβραδυνόμενο.

$$ΣF_2 = m_2|α_2| \quad ή \quad T = m_2|α_2| \quad ή$$

$$μm_2g = m_2|α_2| \quad ή \quad |α_2| = μg \quad ή$$

$$|α_2| = 2m/s^2$$

$$υ_1 = υ_{0_2} - |α_2|t_1 \quad ή \quad υ_2 = 2m/s$$

β) Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

Στον άξονα x΄x: $\vec{p}_{αρχ_x} = \vec{p}_{τελ_x}$ ή

$$m_1υ_1 = (m_1 + m_2)υ_{K_x} \quad ή$$

$$υ_{K_x} = \frac{m_1υ_1}{m_1 + m_2} \quad ή \quad υ_{K_x} = 1m/s$$

Στον άξονα y΄y: $\vec{p}_{αρχ_y} = \vec{p}_{τελ_y}$ ή

$$m_2υ_2 = (m_1 + m_2)υ_{K_y} \quad ή$$

$$υ_{K_y} = \frac{m_2υ_2}{m_1 + m_2} \quad ή \quad υ_{K_y} = \frac{4}{3}m/s$$

$$υ_K = \sqrt{υ_{K_x}^2 + υ_{K_y}^2} \quad ή \quad υ_K = \frac{5}{3}m/s$$

γ) Στον άξονα x΄x: $Δp_{1_x} = p'_{1_x} - p_{1_x}$ ή

$$Δp_{1_x} = m_1υ_{K_x} - m_1υ_1 \quad ή \quad Δp_{1_x} = -8kg \cdot m/s$$

Στον άξονα y΄y: $Δp_{1_y} = p'_{1_y} - p_{1_y}$ ή

$$Δp_{1_y} = m_1υ_{K_y} - 0 \quad ή \quad Δp_{1_y} = \frac{16}{3}kg \cdot m/s$$

$$Δp_1 = \sqrt{Δp_{1_x}^2 + Δp_{1_y}^2} \quad ή \quad Δp_1 = \frac{8}{3}\sqrt{13}kg \cdot m/s$$

δ) $π_K\% = \frac{K'_2 - K_2}{K_2} \cdot 100\% =$

$$= \frac{\frac{1}{2}m_2υ_K^2 - \frac{1}{2}m_2υ_2^2}{\frac{1}{2}m_2υ_2^2} \cdot 100\% =$$

$$= \left(\frac{υ_K^2}{υ_2^2} - 1\right) \cdot 100\% = -30,55\%$$

**2.77** α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για την κίνηση του συσσωματώματος από τη θέση σύγκρουσης των $Σ_1$, $Σ_3$ μέχρις ότου το νήμα γίνει οριζόντιο.

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w \quad ή$$

$$0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_3)υ_K^2 = -(m_1 + m_3)g\ell \quad ή$$

$$\ell = \frac{υ_K^2}{2g} \quad ή \quad \ell = 0,45m$$

β) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για τη σύγκρουση των $Σ_1$, $Σ_3$:

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \quad ή \quad m_1υ'_1 = (m_1 + m_3)υ_K \quad ή$$

$$υ'_1 = \frac{(m_1 + m_3)υ_K}{m_1} \quad ή \quad υ'_1 = 12m/s$$

γ) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για τη σύγκρουση των $Σ_1$, $Σ_2$:

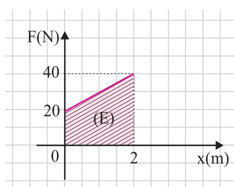
$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \quad ή \quad m_1υ_1 = m_1υ'_1 + m_2υ'_2 \quad ή$$

$$m_2 = \frac{m_1υ_1 - m_1υ'_1}{υ'_2} \quad ή \quad m_2 = 3kg$$

δ) $ΔK = K'_1 - K_1$ ή $ΔK = \frac{1}{2}m_1υ_1'^2 - \frac{1}{2}m_1υ_1^2$ ή

$$ΔK = -216J$$

**2.78** α) $W_F = (E) = \frac{20 + 40}{2} \cdot 2J = 60J$




Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από τη θέση $x_0$ έως τη θέση $x_1$.

$$K_1 - K_0 = W_F \quad ή \quad \frac{1}{2}m_1υ_1^2 - 0 = W_F \quad ή$$

$$υ_1 = \sqrt{\frac{2W_F}{m_1}} \quad ή \quad υ_1 = 4m/s$$

β) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για τη σύγκρουση των $Σ_1$, $Σ_2$:

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \quad ή \quad m_1υ_1 = (m_1 + m_2)υ_K \quad ή$$

$$υ_K = \frac{m_1υ_1}{m_1 + m_2} \quad ή \quad υ_K = 2\,m/s$$

$$Δp_1 = p_1' - p_1 = m_1υ_K - m_1υ_1 \quad ή$$

$$Δp_1 = -15kg \cdot m/s$$

γ) $$π_K\% = \frac{K_1' - K_1}{K_1} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}m_1υ_K^2 - \frac{1}{2}m_1υ_1^2}{\frac{1}{2}m_1υ_1^2} \cdot 100\% =$$

$$= \left(\frac{υ_K^2}{υ_1^2} - 1\right)100\% = -75\%$$

δ) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το συσσωμάτωμα από τη στιγμή που εγκαταλείπει το οριζόντιο τραπέζι μέχρι να φτάσει στο έδαφος:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w \quad ή$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)υ^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)υ_K^2 = (m_1 + m_2)gh \quad ή$$

$$υ = \sqrt{υ_K^2 + 2gh} \quad ή \quad υ = 6\,m/s$$

**2.79** α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα $Σ_1$ από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου μέχρι να διανύσει διάστημα $s_1$:

$$K_1 - K_0 = W_{w_1} \quad ή$$

$$\frac{1}{2}m_1υ_1^2 - \frac{1}{2}m_1υ_0^2 = -m_1gημφs_1 \quad ή$$

$$υ_1 = \sqrt{υ_0^2 - 2gημφs_1} \quad ή \quad υ_1 = 6\,m/s$$

β) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για τη σύγκρουση των $Σ_1$, $Σ_2$:

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \quad ή \quad m_1υ_1 - m_2υ_2 = (m_1 + m_2)υ_K \quad ή$$

$$υ_K = \frac{m_1υ_1 - m_2υ_2}{m_1 + m_2} \quad ή \quad υ_K = 4\,m/s$$

γ) $$π_{K_1}\% = \frac{K_1'}{K_1} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2}m_1υ_K^2}{\frac{1}{2}m_1υ_1^2}100\% =$$

$$= \frac{υ_K^2}{υ_1^2}100\% = 44,44\%$$

δ) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το συσσωμάτωμα από τη θέση της σύγκρουσης έως το μέγιστο ύψος:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{w_{ολ}} \quad ή$$

$$0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)υ_K^2 = -(m_1 + m_2)gημφs_2 \quad ή$$

$$s_2 = \frac{υ_K^2}{2gημφ} \quad ή \quad s_2 = 1,6m$$

$$s = s_1 + s_2 \quad ή \quad s = 8m \quad και \quad h_{max} = sημφ \quad ή$$

$$h_{max} = 4m$$

**2.80** α) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για τη σύγκρουση βλήματος-$Σ_1$:

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \quad ή \quad m_βυ_β = m_βυ_β' + m_1υ_1' \quad ή$$

$$υ_β' = \frac{m_βυ_β - m_1υ_1'}{m_β} \quad ή \quad υ_β' = 10\,m/s$$

β) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για τη σύγκρουση βλήματος-$Σ_2$:

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \quad ή \quad m_βυ_β' = (m_β + m_2)υ_K \quad ή$$

$$υ_K = \frac{m_βυ_β'}{m_β + m_2} \quad ή \quad υ_K = 4\,m/s$$

γ) Για να εκτελέσει το συσσωμάτωμα οριακά ανακύκλωση, πρέπει στο ανώτερο σημείο η ταχύτητά του να είναι μηδέν. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το συσσωμάτωμα από την αρχική θέση της σύγκρουσης έως το ανώτερο σημείο:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w \quad ή$$

$$0 - \frac{1}{2}(m_β + m_2)υ_K^2 = -(m_β + m_2)g \cdot 2\ell \quad ή$$

$$\ell = \frac{υ_K^2}{4g} \quad ή \quad \ell = 0,4m$$

δ) $$Q = |K_σ + K_1' - K_β| \quad ή$$

$$Q = \left|\frac{1}{2}(m_β + m_2)υ_K^2 + \frac{1}{2}m_1υ_1'^2 - \frac{1}{2}m_βυ_β^2\right| \quad ή$$

$$Q = 155J$$

**2.81** α) Τα σώματα εκτελούν οριζόντια βολή.

$x_1 = \upsilon_1 t_1$, $y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2$ και $x_2 = \upsilon_2 t_1$, $y_2 = \frac{1}{2}gt_1^2$

Στο σημείο που συναντώνται τα σώματα ισχύουν:

$x_1 + |x_2| = d$ ή $\upsilon_1 t_1 + \upsilon_2 t_1 = d$ ή $t_1 = \frac{d}{\upsilon_1 + \upsilon_2}$

ή $t_1 = 0{,}1\ s$

$x_1 = \upsilon_1 t_1 = 1\ m$ και $y_1 = 0{,}05\ m$

β) $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon_{κ_x}$ ή $\upsilon_{κ_x} = 0$

$\vec{p}_{αρχ_y} = \vec{p}_{τελ_y}$ ή $m_1gt_1 + m_2gt_1 = (m_1 + m_2)\upsilon_{κ_y}$ ή

$\upsilon_{κ_y} = \frac{m_1gt_1 + m_2gt_1}{m_1 + m_2}$ ή $\upsilon_{κ_y} = 1\ m/s$

Άρα: $\upsilon_κ = \upsilon_{κ_y} = 1\ m/s$

γ) $p_{αρχ} = m_1\upsilon_1 - m_1\upsilon_2 = 0$

$p_{τελ} = (m_1 + m_2)\upsilon_κ$ ή $p_{τελ} = 4\ kg \cdot m/s$

Άρα: $\Delta p = 4\ kg \cdot m/s$ (έχει κατακόρυφη διεύθυνση και φορά προς τα κάτω)

δ) Εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ από τη στιγμή της σύγκρουσης μέχρι το συσσωμάτωμα να φτάσει στο έδαφος, έχουμε:

$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w$ ή

$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_κ'^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_κ^2 =$

$= (m_1 + m_2)g(h - y_1)$ ή

$\upsilon_κ' = \sqrt{\upsilon_κ^2 + 2g(h - y_1)}$ ή $\upsilon_κ' = 4\ m/s$

**2.82** α$_1$) Από ΘΜΚΕ:

$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{w_1} + W_T$ ή

$0 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = -m_1gημφ - μm_1gσυνφs$

ή $μ = \frac{\sqrt{3}}{4}$

α$_2$) Πρέπει $w_x > T$ ή $mgημφ > μmgσυνφ$ ή

$εφφ > μ$ ή $\sqrt{3} > \frac{\sqrt{3}}{4}$, που ισχύει.

β$_1$) Από ΘΜΚΕ για την κίνηση της Σ$_1$ από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου μέχρι να επιστρέψει ξανά στη βάση:

$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = -2μm_1gσυνφs$ ή

$\upsilon_1 \approx 7{,}745\ m/s$

β$_2$) $\vec{p}_{αρχ_x} = \vec{p}_{τελ_x}$ ή $m_1\upsilon_1 συν60^\circ = (m_1 + m_2)\upsilon_κ$ ή

$\upsilon_κ \approx 1{,}936\ m/s$

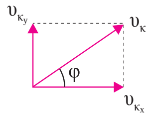
Από ΑΔΜΕ για το συσσωμάτωμα:

$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_κ^2 = (m_1 + m_2)gh$ ή $h \approx 0{,}187\ m$

**2.83** α) $\vec{p}_{αρχ_x} = \vec{p}_{τελ_x}$ ή

$m_2\upsilon_2 - m_3\upsilon_3 = (m_1 + m_2 + m_3)\upsilon_{κ_x}$ ή

$\upsilon_{κ_x} = 3\ m/s$




$\vec{p}_{αρχ_y} = \vec{p}_{τελ_y}$ ή

$m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2 + m_3)\upsilon_{κ_y}$ ή

$\upsilon_{κ_y} = 4\ m/s$

$\upsilon_κ = \sqrt{\upsilon_{κ_x}^2 + \upsilon_{κ_y}^2} = 5\ m/s$ και $εφφ = \frac{\upsilon_{κ_y}}{\upsilon_{κ_x}} = \frac{4}{3}$

β) $W_{F_1} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_κ^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = -187{,}5\ J$

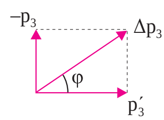
γ) $π\% = \frac{\frac{1}{2}m_3\upsilon_κ^2 - \frac{1}{2}m_3\upsilon_3^2}{\frac{1}{2}m_3\upsilon_3^2} 100\% = 300\%$

**2.84** α) $\vec{p}_{αρχ_x} = \vec{p}_{τελ_x}$ ή

$m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2 + m_3)\upsilon_κ$ ή $\upsilon_κ = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2 + m_3}$

ή $\upsilon_κ = 1\ m/s$

β) $\Delta\vec{p}_3 = \vec{p}_3' - \vec{p}_3$ ή




$\Delta\vec{p} = \vec{p}_3' + (-\vec{p}_3)$ ή

$\Delta p_3 = \sqrt{p_3'^2 + p_3^2}$ ή

$\Delta p_3 = \sqrt{(m_3\upsilon_κ)^2 + (m_3\upsilon_3)^2}$ ή

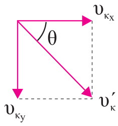
$\Delta p_3 = 8\ kg \cdot m/s$ και

$εφφ = \frac{p_3}{p_3'} = \frac{m_3\upsilon_3}{m_3\upsilon_κ} = \frac{\upsilon_3}{\upsilon_κ} = \sqrt{3}$ ή $φ = 60^\circ$

$\Delta\vec{p}_{συστ} = \Delta\vec{p}_x + \Delta\vec{p}_y$ ή $\Delta\vec{p}_{συστ} = \Delta\vec{p}_y$ ή

$\Delta p = 0 - m_3\upsilon_3$ ή $\Delta p = -4\sqrt{3}\ kg \cdot m/s$

γ) $h = \frac{1}{2}gt_1^2$ ή $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$




ή $t_1 = 0{,}1\sqrt{3}$ s

$υ_{κ_y} = gt_1$ ή $υ_{κ_y} = \sqrt{3}$ m/s και $υ_{κ_x} = υ_κ = 1$ m/s

Άρα: $υ'_κ = \sqrt{υ_{κ_x}^2 + υ_{κ_y}^2}$ ή $υ'_κ = 2$ m/s

$εφθ = \frac{υ_{κ_y}}{υ_{κ_x}}$ ή $εφθ = \sqrt{3}$ ή $θ = 60^o$

δ) Από την αρχή διατήρησης της ορμής στον άξονα x΄x έχουμε:

$(m_1 + m_2 + m_3)υ'_{κ_x} = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)υ''_κ$

ή $υ''_κ = 0{,}5$ m/s

$|ΔΚ| =$

$= \left|\frac{1}{2}m_1υ_1^2 + \frac{1}{2}m_3υ_3^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3+m_4)υ''^2_κ\right|$

ή $|ΔΚ| = 36$ J

ε) $Δp_{1_x} = m_1υ_{κ_x} - m_1υ_1 = -7$ kg · m/s και

$Δp_{1_y} = m_1υ_{κ_y} - 0 = \sqrt{3}$ kg · m/s και

$Δp_1 = \sqrt{Δp_{1_x}^2 + Δp_{1_y}^2}$ ή $Δp_1 = 2\sqrt{13}$ kg · m/s

**2.85** α) $t_1 = \frac{AB}{υ_1}$ ή $t_1 = 1$ s

$ΑΓ = υ_2t_1$ ή $ΑΓ = 3$ m

Επειδή ισχύει $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$, έχουμε: $\hat{Α} = 90^o$

β) $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $\sqrt{p_1^2 + p_2^2} = p_{τελ}$ ή

$\sqrt{(m_1υ_1)^2 + (m_2υ_2)^2} = (m_1 + m_2)υ_κ$ ή

$υ_κ = \frac{\sqrt{(m_1υ_1)^2 + (m_2υ_2)^2}}{m_1 + m_2}$ ή

$υ_κ = 2{,}5$ m/s

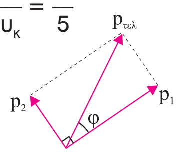
γ) $W_F = ΔΚ_1$

$W_F = \frac{1}{2}m_1υ_κ^2 - \frac{1}{2}m_1υ_1^2$ ή $W_F = -9{,}75$ J

δ) $συνφ = \frac{p_1}{p_{τελ}} = \frac{m_1υ_1}{(m_1 + m_2)υ_κ} = \frac{4}{5}$

$Δ\vec{p}_1 = \vec{p}\,'_1 - \vec{p}_1$ ή

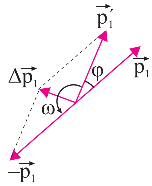
$Δ\vec{p}_1 = \vec{p}\,'_1 + (-\vec{p}_1)$ ή




$Δp_1 = \sqrt{p'^2_1 + p_1^2 + 2p'_1p_1συνω} =$

$= \sqrt{(m_1υ_κ)^2 + (m_1υ_1)^2 + 2m_1υ_κm_1υ_1συν(180-φ)}$

ή $Δp = 5$ kg · m/s




**2.86** α$_1$) $υ'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1$ (1)

$Δp_1 = -\frac{9}{5}p_1$ ή $m_1υ'_1 - m_1υ_1 = -\frac{9}{5}m_1υ_1$ ή

$υ'_1 = -\frac{4}{5}υ_1$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$-\frac{4}{5}υ_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1$ ή $-4m_1 - 4m_2 = 5m_1 - 5m_2$

ή $9m_1 = m_2$

α$_2$) $π_{K_1}\% = \frac{\frac{1}{2}m_1υ'^2_1 - \frac{1}{2}m_1υ_1^2}{\frac{1}{2}m_1υ_1^2}100\% =$

$= \left(\frac{υ'^2_1}{υ_1^2} - 1\right)100\% = -36\%$

β$_1$) $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_1υ_1 = (m_1 + m_2)υ_κ$ ή

$υ_κ = \frac{m_1}{m_1 + m_2}υ_1$ ή $υ_κ = \frac{υ_1}{10}$

$Δp'_1 = m_1υ_κ - m_1υ_1 = \frac{m_1υ_1}{10} - m_1υ_1 = -\frac{9}{10}p_1$

β$_2$) $W_{F'_1} = K'_1 - K_1$ ή

$W_{F'_1} = \frac{1}{2}m_1υ_κ^2 - \frac{1}{2}m_1υ_1^2$ ή $W_{F'_1} = -\frac{99}{100}K_1$

Γ. Στην ελαστική κρούση ισχύει:

$F_1 = \frac{|Δp_1|}{Δt} = \frac{9p_1}{5Δt}$

Στην πλαστική κρούση ισχύει:

$F'_1 = \frac{|Δp'_1|}{Δt} = \frac{9p_1}{10Δt}$

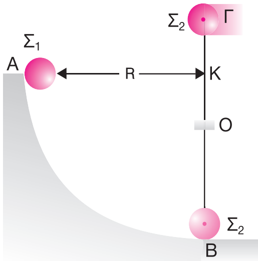
Άρα: $\frac{F_1}{F'_1} = 2$

## 1ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ
## ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

### Θέμα 1ο

1γ, 2γ, 3β, 4α, 5: α-Λ, β-Λ, γ-Λ, δ-Λ, ε-Λ

### Θέμα 2ο




1) α: ΘΜΚΕ από το Α έως το Β:

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - 0 = m_1 gR \text{ ή } \upsilon_1 = \sqrt{2gR}$$

Για την ελαστική κρούση: $\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1$ ή

$$\upsilon_2' = \frac{4}{3}\sqrt{2gR} \quad (1)$$

ΘΜΚΕ από το Β έως το Γ:

$$\frac{1}{2}m_2\upsilon_2''^2 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = -m_2 g\cdot 2\ell \text{ ή}$$

$$\upsilon_2''^2 = \upsilon_2'^2 - 4g\ell \quad (2)$$

Αλλά στο Γ ισχύει: $T = 0$ και $F_\kappa = w_2$ ή

$$m_2\frac{\upsilon_2''^2}{\ell} = m_2 g \text{ ή } \upsilon_2''^2 = g\ell \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει:

$$R = \frac{45\ell}{32g}$$

2) γ: $t_2 = t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = t$

$|x_1| = |x_2|$ ή $|\upsilon_1'|t = |\upsilon_2'|t$ ή $|\upsilon_1'| = |\upsilon_2'|$ ή

$\upsilon_2' = -\upsilon_1'$

(Εάν $\upsilon_1' = \upsilon_2'$, η κρούση θα ήταν πλαστική.)

$\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 = -\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1$ ή $2m_1 = -m_1 + m_2$ ή

$m_2 = 3m_1$

3) β: $\upsilon_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 = -\frac{3}{5}\upsilon_1$ και

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 = \frac{2}{5}\upsilon_1$$

Άρα: $\frac{\upsilon_1'}{\upsilon_2'} = -\frac{3}{2}$

### Θέμα 3ο

α) $s_1 = \upsilon_1 t$ και $|s_2| = \upsilon_2 t$

$s_1 + |s_2| = d$ ή $\upsilon_1 t + \upsilon_2 t = d$ ή $t = 1s$

β) $\upsilon_1' = \frac{2m_2}{m_1+m_2}(-\upsilon_2) + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 = -18m/s$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}(-\upsilon_2) = 0$$

γ) $F_1 = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \frac{m_1\upsilon_1' - m_1\upsilon_1}{\Delta t} = -600N$

δ) $W_{F_2} = K_{2_{\tau\varepsilon\lambda}} - K_{2_{\alpha\rho\chi}} = 0 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = -90J$

### Θέμα 4ο

α) $T_1 = \mu N_1 = \mu m_1 g = 10N$

$$\Sigma F = m_1\alpha_1 \text{ ή } \alpha_1 = \frac{\Sigma F}{m_1} = \frac{F - T_1}{m_1} = 10m/s^2$$

β) Από το ΘΜΚΕ για το $\Sigma_1$ από $x_0 = 0m$ έως $x_2 = 8m$ έχουμε:

$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_F + W_T$ ή

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - 0 = W_F - T\Delta x \text{ ή}$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2W_F - 2T\Delta x}{m_1}}$$

Το έργο $W_F$ είναι ίσο με το εμβαδόν στο διάγραμμα $F = f(x)$.

Άρα: $W_F = \frac{40+50}{2}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 50 = 280J$

και $\upsilon_1 = 10 m/s$

γ) $\upsilon_1' = -\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -5 m/s$,

$\upsilon_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = 5 m/s$

δ) $T_1' = m_1|\alpha_1'|$ ή $|\alpha_1'| = \dfrac{\mu m_1 g}{m_1} = 2{,}5 m/s^2$

$0 = |\upsilon_1'| - |\alpha_1'|\Delta t_1$ ή $\Delta t_1 = \dfrac{|\upsilon_1'|}{|\alpha_1'|} = 2s$

Ομοίως για το $\Sigma_2$ προκύπτει: $\Delta t_2 = 2s$

$s_1 = |\upsilon_1'|\Delta t_1 - \dfrac{1}{2}|\alpha_1'|\Delta t_1^2 = 5m$

Ομοίως για το $\Sigma_2$ προκύπτει: $s_2 = 5m$

Άρα: $d = s_1 + s_2 = 10m$

## 2o ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΚΡΟΥΣΕΩΝ

### Θέμα 1ο

1β, 2β, 3δ, 4γ, 5: α-Λ, β-Λ, γ-Λ, δ-Λ, ε-Σ

### Θέμα 2ο

1α: $K_A = \dfrac{p_A^2}{2m}$, $K = \dfrac{p^2}{4m}$ και $p_A = p$

Άρα: $2K = K_A$

2α: $K_A = \dfrac{p_A^2}{2m}$, $K_B = \dfrac{p_B^2}{3m}$ και $p_A = p_B$

Άρα: $\dfrac{K_A}{K_B} = \dfrac{3}{2}$

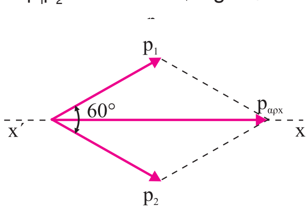
3β: $\upsilon_A' = \dfrac{m_A - 3m_A}{4m_A}\upsilon_A = -\dfrac{\upsilon_A}{2}$,

$\pi\% = \dfrac{K_A' - K_A}{K_A}100\% = -75\%$

### Θέμα 3ο

α) $p_{\alpha\rho\chi} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\sigma\upsilon\nu 60^\circ} = 40\sqrt{3} kg\cdot m/s$

Η $p_{\alpha\rho\chi}$ έχει τη διεύθυνση του x΄x




β) $\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή

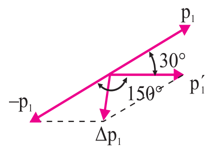
$p_{\alpha\rho\chi} = 2m_1\upsilon_\kappa$ ή

$\upsilon_\kappa = 10\sqrt{3} m/s$

$$\pi\% = \frac{\frac{1}{2}m_1\upsilon_\kappa^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}100\% = -25\%$$

γ) $p_1 = m_1\upsilon_1 = 40 kg\cdot m/s$ και

$p_1' = m_1\upsilon_\kappa = 20\sqrt{3} kg\cdot m/s$




$\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_1' - \vec{p}_1$ ή

$|\Delta p_1| = \sqrt{p_1'^2 + p_1^2 + 2p_1p_1'\sigma\upsilon\nu 150^\circ}$

ή $|\Delta p_1| = 20 kg\cdot m/s$

### Θέμα 4ο

α) Οι απώλειες της μηχανικής ενέργειας οφείλονται στην τριβή. Από ΑΔΕ: $|\Delta E_{\mu\eta\chi}| = |W_T|$ ή

$\dfrac{10}{100}m_1 gh = \mu m_1 g\sigma\upsilon\nu\varphi(AB)$ ή $AB = 0{,}2m$

β) $\dfrac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = 0{,}9m_1 gh$ ή $\upsilon_1 = 3m/s$

$m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)\upsilon_\kappa$ ή $\upsilon_\kappa = 1m/s$

γ) $\pi\% = \dfrac{\left|\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_\kappa^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2\right|}{m_1 gh}100\% = 60\%$

δ) Από ΑΔΜΕ:

$(m_1 + m_2)gh' = \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_\kappa^2$ ή $h' = 0{,}05m$

$\sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{R - h'}{R} =$

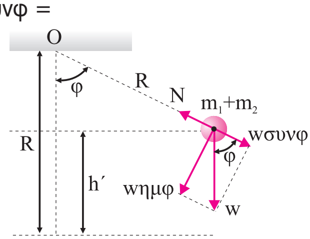
$= \dfrac{1}{2}$ ή $\varphi = 60^\circ$

$\Sigma F_y = 0$ ή

$N = w\sigma\upsilon\nu\varphi =$

$= (m_1+m_2)g\sigma\upsilon\nu\varphi =$

$= 15N$



## 3ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΚΡΟΥΣΕΩΝ

### Θέμα 1ο
1δ, 2δ, 3β, 4γ, 5: α-Λ, β-Σ, γ-Σ, δ-Λ, ε-Λ

### Θέμα 2ο
1α: $p_x = 0$ ή $|p_{1x}| = |p_{2x}|$ ή

$m_1 υ_1 ημ30° = m_2 υ_2 ημ60°$ ή $υ_1 = υ_2\sqrt{3}$

2β: $m_A υ_A = (m_A + m_B)υ_κ$ ή $υ_κ = \dfrac{υ_A}{3}$

$$ΔK = \frac{1}{2}3m_A υ_κ^2 - \frac{1}{2}m_A υ_A^2 \text{ ή } ΔK = -\frac{m_A υ_A^2}{3}$$

3α: $p\sqrt{3} = \sqrt{p^2 + p^2 + 2p^2 συνφ}$ και

$συνφ = \dfrac{1}{2}$ ή $φ = 60°$

### Θέμα 3ο
α) Για την κρούση των Α, Β:
$m_A υ_0 = (m_A + m_B)υ_1$ ή $υ_1 = 10m/s$
Για το σύστημα των τριών σωμάτων Α, Β, Γ:
$(m_A + m_B)υ_1 = (m_A + m_B + m_Γ)υ_κ$ ή $υ_κ = 5m/s$

$$β)\ \ π\% = \frac{\frac{1}{2}(m_A + m_B)υ_1^2 - \frac{1}{2}m_A υ_0^2}{\frac{1}{2}m_A υ_0^2}100\% = -50\%$$

γ) Μετά τη σύγκρουση των Α, Β το ελατήριο συμπιέζεται. Το συσσωμάτωμα των Α, Β επιβραδύνεται, ενώ το Γ επιταχύνεται.
Όταν αποκτούν κοινή ταχύτητα, η συσπείρωση και η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι μέγιστες.
Από ΑΔΕ:

$$\frac{1}{2}(m_A + m_B + m_Γ)υ_κ^2 + U_{max} =$$

$$= \frac{1}{2}(m_A + m_B)υ_1^2 \text{ ή } U_{max} = 50J$$

$$U_{max} = \frac{1}{2}kx_{max}^2 \text{ ή } x_{max} = 0{,}5m$$

δ) Αν $K_{αρχ}$ η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση των Α και Β, από ΑΔΕ έχουμε: $K_{αρχ} = K + U_{ελ}$

$$\frac{1}{2}(m_A + m_B)υ_1^2 = \frac{1}{2}kx^2 + K \text{ ή } K = 87{,}5J$$

### Θέμα 4ο
α) Αν $K_σ$ η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος, ισχύει:
$ΔΕ = K_β - K_σ < 100J$, άρα το βλήμα δε σφηνώνεται εξ ολοκλήρου.

β) $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $mυ = (m + M)υ_κ$

ή $υ_K = \dfrac{m}{m+M}υ$

Για να σφηνωθεί το βλήμα εξ ολοκλήρου:

$K_β \geq 100J + K_σ$ ή

$$K_β \geq 100J + \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m}{m+M}υ\right)^2$$

$$\text{ή } K_β \geq 100J + \frac{1}{2}mυ^2\frac{m}{m+M} \text{ ή}$$

$$K_β \geq 100J + K_β\frac{m}{m+M} \quad (1)$$

Άρα: $K_{β_{min}} = 120J$

γ) Από την (1): $K_β = 100\left(\dfrac{m+M}{M}\right) = 100\left(\dfrac{m}{M} + 1\right)$

Πρέπει: $\dfrac{m}{M} = 0$ ή $M \gg m$

## 4ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΚΡΟΥΣΕΩΝ

### Θέμα 1ο

1α, 2γ, 3β, 4β, 5: α-Σ, β-Λ, γ-Σ, δ-Λ, ε-Λ

### Θέμα 2ο

1α: ΘΜΚΕ από Α → Α: $0 - \frac{1}{2}mυ_0^2 = -μmg2d$

ή $μ = \frac{υ_0^2}{4dg}$

2β: Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το $Σ_1$ από το Α έως το Β:

$K_B - K_A = W_{W_1}$ ή

$\frac{1}{2}m_1υ_1^2 - 0 = m_1g(R - Rσυνφ)$ ή

$υ_1 = \sqrt{2g(R - Rσυνφ)}$ ή $υ_1 = \sqrt{gR}$

Στην κρούση ισχύει:

$υ'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1$ ή $υ'_1 = -\frac{2}{3}υ_1$ ή $υ'_1 = -\frac{2}{3}\sqrt{gR}$

$Δp_1 = m_1υ'_1 - m_1υ_1$ ή

$Δp_1 = m_1\left(-\frac{2}{3}\sqrt{gR} - \sqrt{gR}\right)$ ή

$Δp_1 = -\frac{5}{3}m_1\sqrt{gR}$ ή $R = 0{,}9\,m$

3β: Από ΑΔΟ: $mυ = 2mυ_κ$ ή $υ_κ = \frac{υ}{2}$

$Q = K_{αρχ} - K_{τελ} = \frac{3}{4}mυ^2$

### Θέμα 3ο

α) Η ταχύτητα του $Σ_2$ ακριβώς πριν από την κρούση υπολογίζεται από το ΘΜΚΕ:

$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{W_2}$ ή

$\frac{1}{2}m_2υ_2^2 - 0 = m_2gh$ ή

$υ_2 = \sqrt{2gh}$ ή $υ_2 = 4\,m/s$

$υ_{2x} = υ_2ημ30^o$ ή $υ_{2x} = 2\,m/s$ και

$υ_{2y} = υ_2συν30^o$ ή $υ_{2y} = 2\sqrt{3}\,m/s$

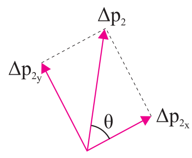
Στον άξονα x΄x ισχύει:

$\vec{p}_{αρχ_x} = \vec{p}_{τελ_x}$ ή $m_1υ_1 - m_2υ_{2_x} = (m_1 + m_2)υ_κ$ ή

$υ_κ = \frac{m_1υ_1 - m_2υ_{2_x}}{m_1 + m_2}$ ή $υ_κ = 0$

β) $Δp_1 = m_1υ_κ - m_1υ_1$ ή $Δp_1 = -8\,kg \cdot m/s$

$Δ\vec{p}_2 = Δ\vec{p}_{2_x} + Δ\vec{p}_{2_y}$




$Δp_{2x} = 0 - (-m_2υ_{2x}) = +8\,kg \cdot m/s$ και

$Δp_{2y} = 0 - m_2υ_{2y} = -8\sqrt{3}\,kg \cdot m/s$

$Δp_2 = \sqrt{Δp_{2x}^2 - Δp_{2y}^2}$ ή $Δp_2 = 16\,kg \cdot m/s$ και

$εφθ = \left|\frac{Δp_{2y}}{Δp_{2x}}\right| = \sqrt{3}$ ή $θ = 60^o$

γ) $F_1 = \frac{|Δp_1|}{Δt}$ ή $F_1 = 80N$

δ) $ΣF = (m_1 + m_2)α$ ή

$(m_1 + m_2)gημφ = (m_1 + m_2)α$ ή

$α = gημφ$ ή $α = 5\,m/s^2$

$s = \frac{1}{2}αt^2$ ή $t = \sqrt{\frac{2s}{α}}$ ή $t = 0{,}4\,s$

$p = (m_1 + m_2)υ'_κ$ ή $p = (m_1 + m_2)αt$ ή

$p = 10\,kg \cdot m/s$

### Θέμα 4ο

α) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το $Σ_1$ από την αρχική του θέση μέχρι να κοπεί το νήμα:

$\frac{1}{2}m_1υ_A^2 - \frac{1}{2}m_1υ_0^2 = m_1g\ell συνθ$ ή

$υ_A = \sqrt{υ_0^2 + 2g\ell συνθ}$ ή $υ_A = 6\,m/s$

β) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το σώμα $Σ_1$ από το Α έως το Β:

$K_B - K_A = W_{W_{1x}}$ ή

$\frac{1}{2}m_1υ_1^2 - \frac{1}{2}m_1υ_A^2 = m_1gημφs$ ή

$υ_1 = \sqrt{υ_A^2 + 2gημφs}$ ή $υ_1 = 8$ m/s

Μετά την κρούση έχουμε:

$υ_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1$ ή $υ_1' = -4$ m/s

$υ_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}υ_1$ ή $υ_2' = 4$ m/s

γ) $π_κ\% = \frac{K_2'}{K_1}100\% = \frac{\frac{1}{2}m_2υ_2'^2}{\frac{1}{2}m_1υ_1^2}100\% = 75\%$

δ) Μετά την κρούση για το σώμα $Σ_1$ ισχύει:

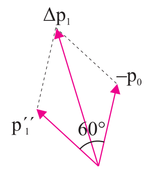
$ΣF_1 = m_1α_1$ ή $m_1gημφ = m_1α_1$ ή $α_1 = 5$ m/s$^2$

$υ_1'' = υ_1' + α_1t_1$ ή $υ_1'' = -3$ m/s

$Δ\vec{p}_1 = \vec{p}_1'' - \vec{p}_0 = \vec{p}_1'' + (-\vec{p}_0)$ ή

$Δp_1 = \sqrt{p_1''^2 + p_0^2 + 2p_1''p_0 \cdot συν60^o}$ ή

$Δp_1 = \sqrt{148}$ kg · m/s




ε) Το σώμα $Σ_1$ σταματά στιγμιαία τη χρονική στιγμή που υπολογίζεται από τη σχέση:

$υ_1''' = υ_1' + α_1Δt'$ ή $Δt' = \frac{υ_1'}{-α_1}$ ή $Δt' = 0{,}8$ s

Για το σώμα $Σ_2$ ισχύει:

$υ_{2y}' = υ_2'ημφ$ ή $υ_{2y}' = 2$ m/s

$h = υ_{2y}'Δt' + \frac{1}{2}gΔt'^2$ ή $h = 4{,}8$ m

$υ_{2y}'' = υ_{2y}' + gΔt'$ ή $υ_{2y}'' = 10$ m/s

$υ_{2x}'' = υ_2'συνφ = 2\sqrt{3}$ m/s

$υ_2'' = \sqrt{υ_{2y}''^2 + υ_{2x}''^2} = \sqrt{112}$ m/s

# ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

## ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

### Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

3.6γ, 3.7α, 3.8γ, 3.9β, 3.10β, 3.11β, 3.12γ, 3.13δ, 3.14β, 3.15δ, 3.16α, 3.17δ, 3.18β, 3.19β, 3.20δ, 3.21α, 3.22α, 3.23δ, 3.24γ, 3.25β, 3.26δ, 3.27β, 3.28γ, 3.29β, 3.30δ, 3.31β, 3.32β, 3.33α, 3.34β, 3.35α, 3.36α, 3.37β, 3.38γ, 3.39δ, 3.40β, 3.41δ, 3.42α, 3.43β, 3.44δ, 3.45β, 3.46β, 3.47β

### Ερωτήσεις κατανόησης

**3.48** β: $\dfrac{\alpha_{\varepsilon_1}}{\alpha_{\varepsilon_2}} = \dfrac{\alpha_{\gamma\omega\nu}R_1}{\alpha_{\gamma\omega\nu}R_2} = \dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{\frac{3R}{5}}{\frac{R}{2}} = \dfrac{6}{5}$

**3.49** β: $\dfrac{\alpha_{K_A}}{\alpha_{K_B}} = \dfrac{\omega^2 R_A}{\omega^2 R_B} = \dfrac{R_A}{R_B} = \dfrac{\frac{3R}{5}}{\frac{2R}{5}} = \dfrac{3}{2}$

**3.50** α: Όλες οι ακτίνες διαγράφουν στον ίδιο χρόνο, ίδια γωνία. Επομένως: $\theta_A = \theta_B$

**3.51** γ: $N = \dfrac{\Delta\theta}{2\pi} = \dfrac{\omega\Delta t}{2\pi} = \dfrac{10}{\pi}$ περιστροφές

**3.52** γ: $\dfrac{s_A}{s_B} = \dfrac{\theta R_A}{\theta R_B} = \dfrac{R_A}{R_B} = \dfrac{\frac{L}{2}}{\frac{L}{4}} = 2$ ή $s_A = 2s_B$

Δηλαδή, τα σημεία με μεγαλύτερη ακτίνα περιστροφής διαγράφουν μεγαλύτερο τόξο στον ίδιο χρόνο.

**3.53** β: $\theta_A = \theta_B$

$N_A = \dfrac{\theta_A}{2\pi}, N_B = \dfrac{\theta_B}{2\pi}$, άρα: $N_A = N_B$

$s_A = \theta_A R_A = \theta_A \cdot 2R_B = 2\theta_B R_B = 2s_B$

**3.54** γ: Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι από $t_0 = 0$ έως $t_3$ ο τροχός επιταχύνεται με επιτάχυνση το μέτρο της οποίας μεταβάλλεται. Επομένως, μέχρι τη χρονική στιγμή $t_3$ η γωνιακή ταχύτητα συνεχώς αυξάνεται.
Από τη σχέση $\upsilon = \omega R$ προκύπτει ότι και η γραμμική ταχύτητα των σημείων του τροχού αυξάνεται μέχρι τη χρονική στιγμή $t_3$.

**3.55** γ: $\upsilon_\Gamma = \upsilon_\Delta$, οπότε: $\alpha_{K_\Gamma} = \dfrac{\upsilon_\Gamma^2}{R_1} = \dfrac{\upsilon_\Delta^2}{2R_2} = \dfrac{1}{2}\alpha_{K_\Delta}$ ή $2\alpha_{K_\Gamma} = \alpha_{K_\Delta}$

**3.56** α: (Βλέπε παρατήρηση 3)

$\theta_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_{0_1}^2}{\alpha_1}$ και $\theta_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_{0_2}^2}{\alpha_2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{4\omega_{0_1}^2}{4\alpha_1} = \theta_1$

Επομένως: $N_1 = \dfrac{\theta_1}{2\pi} = \dfrac{\theta_2}{2\pi} = N_2$

**3.57** γ: Από τα διαγράμματα ω = f(t) προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή t = 3,5s η κίνηση και των δύο δίσκων είναι ομαλά επιβραδυνόμενη. Επομένως, τα διανύσματα των γωνιακών τους επιταχύνσεων έχουν αντίθετη φορά από τα διανύσματα των γωνιακών τους ταχυτήτων.

**3.58** β: Στο διάγραμμα ω = f(t) το εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζεται από τη γραφική παράσταση και τον άξονα των χρόνων ισούται με τη γωνία που διαγράφει μία ακτίνα του δίσκου. Επομένως:

$\Delta\theta_1 = (E_1) = \dfrac{\omega_1 + 3\omega_1}{2}t_1 = 2\omega_1 t$

$\Delta\theta_2 = (E_2) = \dfrac{4\omega_1}{2}t_1 = 2\omega_1 t = \Delta\theta_1$

Άρα: $N_1 = \dfrac{\Delta\theta_1}{2\pi} = \dfrac{\Delta\theta_2}{2\pi} = N_2$

**3.59** β: $s_O = \dfrac{L}{4}\theta$ και $s_A = \dfrac{3L}{4}\theta = 3\dfrac{L}{4}\theta = 3s_O$

Άρα: $s_O = \dfrac{s_A}{3}$

**3.60** α: $\dfrac{\upsilon_{\gamma\rho_A}}{\upsilon_{\gamma\rho_B}} = \dfrac{\omega\left(R-\dfrac{R}{4}\right)}{\omega\left(R-\dfrac{R}{5}\right)} = \dfrac{\dfrac{3}{4}R}{\dfrac{4}{5}R} = \dfrac{15}{16}$ ή

$16\upsilon_{\gamma\rho_A} = 15_{\gamma\rho_B}$

**3.61** γ: $\omega = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu}t$ ή $-2\omega_0 = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu}t$

ή $t = \dfrac{3\omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}$

**3.62** γ: $\upsilon_{\gamma\rho_A} = \upsilon_{\gamma\rho_B}$ άρα:

$$\alpha_{\kappa_A} = \frac{\upsilon^2_{\gamma\rho_A}}{R_A} = \frac{\upsilon^2_{\gamma\rho_B}}{\dfrac{R_B}{2}} = 2\frac{\upsilon^2_{\gamma\rho_B}}{R_B} = 2\alpha_{\kappa_B}$$

**3.63** β: Για t = 13s έχουμε:

$\alpha_{\varepsilon_A} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot d_A$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{-5m/s^2}{0{,}25m} = -20rad/s^2$

**3.64** α: Από 0 έως 2s: $\theta_2 = \omega_1(t_2 - t_0)$ ή

$N_2 \cdot 2\pi = \omega_1(t_2 - t_0)$ ή $\dfrac{10}{\pi} \cdot 2\pi = \omega_1(2-0)$ ή

$\omega = 10rad/s$

Από 2s έως 4s:

$\theta_4 - \theta_2 = \omega_1(t_4 - t_2) + \dfrac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu_2}(t_4 - t_2)^2$ ή

$(N_4 - N_2)2\pi = \omega_1(t_4 - t_2) + \dfrac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu_2}(t_4 - t_2)^2$ ή

$\alpha_{\gamma\omega\nu_2} = 6rad/s^2$

$\omega_4 = \omega_1 + \alpha_{\gamma\omega\nu_2}(t_4 - t_2)$ ή $\omega_4 = 22rad/s$

**3.65** γ: Από 0 έως 2s:

$\alpha_{\gamma\omega\nu_1} = \dfrac{\omega_2 - \omega_0}{t_2 - t_0} = 5rad/s^2$

$\omega_1 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu_1}(t_4 - t_0)$ ή $\omega_1 = 10rad/s$

Από 6s έως 8s:

$\alpha_{\gamma\omega\nu_3} = \dfrac{\omega_8 - \omega_6}{t_8 - t_6} = -5rad/s^2$

$\omega_7 = \omega_6 + \alpha_{\gamma\omega\nu_3}(t_7 - t_6) = 5rad/s$

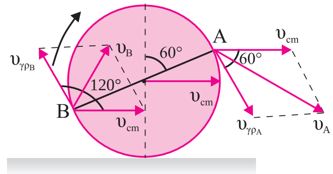
$\upsilon = \omega\dfrac{\ell}{2} = 2{,}5m/s$

**3.66** α: $N_1 = \dfrac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} = \dfrac{\dfrac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t_2^2 - \dfrac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t_1^2}{2\pi} = \dfrac{3\alpha_{\gamma\omega\nu}}{4\pi}$

$N_2 = \dfrac{\theta_3 - \theta_2}{2\pi} = \dfrac{\dfrac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t_3^2 - \dfrac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t_2^2}{2\pi} = \dfrac{5\alpha_{\gamma\omega\nu}}{4\pi}$

Άρα: $\dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{3}{5}$

**3.67**




β: $\upsilon_{\gamma\rho_A} = \upsilon_{\gamma\rho_B} = \upsilon_{cm}$

$\upsilon_A = \sqrt{\upsilon^2_{\gamma\rho_A} + \upsilon^2_{cm} + 2\upsilon_{cm}\upsilon_{\gamma\rho_A}\sigma\upsilon\nu 60^\circ} =$

$= \sqrt{2\upsilon^2_{cm} + 2\upsilon^2_{cm}\dfrac{1}{2}} = \upsilon_{cm}\sqrt{3}$

$\upsilon_B = \sqrt{\upsilon^2_{\gamma\rho_B} + \upsilon^2_{cm} + 2\upsilon_{cm}\upsilon_{\gamma\rho_B}\sigma\upsilon\nu 120^\circ} =$

$= \sqrt{2\upsilon^2_{cm} - \upsilon^2_{cm}} = \upsilon_{cm}$

Επομένως: $\dfrac{\upsilon_A}{\upsilon_B} = \sqrt{3}$

**3.68** α: $\upsilon_A = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho_A} = \upsilon_{cm} + \omega(AK)$ (1)

$\upsilon_B = \upsilon_{cm} - \upsilon_{\gamma\rho_B} = \upsilon_{cm} - \omega(BK)$ (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$\upsilon_A + \upsilon_B = 2\upsilon_{cm}$ ή $\upsilon_A + \dfrac{\upsilon_A}{3} = 2\upsilon_{cm}$ ή $\upsilon_A = \dfrac{3}{2}\upsilon_{cm}$

**3.69** β: $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{8-4}{2}rad/s = 2rad/s$

$\theta_0 = 4rad$, άρα: $\theta = \theta_0 + \omega t$ ή $\theta = 4 + 2t$ (SI)

**3.70** α: $\upsilon_A = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho_A}$ ή $1{,}8\upsilon_{cm} = \upsilon_{cm} + \omega(AK)$ ή

$0{,}8\upsilon_{cm} = \omega(AK)$ ή $0{,}8\omega R = \omega(AK)$ ή $AK = 0{,}8R$

$d = R + (AK)$ ή $d = 1{,}8R$

**3.71** α: $\upsilon_B = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho_B} = \upsilon_{cm} + \omega\dfrac{R}{2} =$

$= \upsilon_{cm} + \dfrac{\upsilon_{cm}}{2} = \dfrac{3}{2}\upsilon_{cm}$

**3.72** α: $\upsilon_\Gamma = 0$ ή $\upsilon_{cm} - \upsilon_{\gamma\rho_\Gamma} = 0$ ή $\upsilon_{cm} = \omega r$

$\upsilon_A = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho_A} = \omega r + 3\omega r = 4\omega r = 4\upsilon_{cm}$

**3.73** β: $\upsilon_B = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho_B} = \upsilon_{cm} + \omega\dfrac{R}{3} = \dfrac{4}{3}\upsilon_{cm}$

$\upsilon_\Gamma = \upsilon_{cm} - \upsilon_{\gamma\rho_\Gamma} = \upsilon_{cm} - \omega\dfrac{R}{4} = \dfrac{3}{4}\upsilon_{cm}$

Άρα: $9\upsilon_B = 16\upsilon_\Gamma$

**3.74** α: $\upsilon_N = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho_N}$ ή $8\sqrt{2} = \upsilon_{cm} + \omega\dfrac{R}{7}$ ή

$8\sqrt{2} = \dfrac{8}{7}\upsilon_{cm}$ ή $\upsilon_{cm} = 7\sqrt{2}\,m/s$

$\upsilon_M = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{\gamma\rho_M}^2} = \upsilon_{cm}\sqrt{2} = 14\,m/s$

**3.75** α: $\alpha_K = \omega^2 R = (\alpha_{\gamma\omega\nu} t)^2 R = \alpha_{\gamma\omega\nu}^2 R t^2$

**3.76** α: $\ell = r\theta = \dfrac{R}{3}\theta = \dfrac{s}{3}$

**3.77** α: $\upsilon_B = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{\gamma\rho_B}^2 + 2\upsilon_{cm}\upsilon_{\gamma\rho_B}\,\sigma\upsilon\nu 60^\circ} = \upsilon_{cm}\sqrt{3}$

Άρα: $12\sqrt{3} = \upsilon_{cm}\sqrt{3}$ ή $\upsilon_{cm} = 12\,m/s$

$\upsilon_{\gamma\rho_\Gamma} = \omega\left(R - \dfrac{R}{6}\right) = \dfrac{5}{6}\omega R = \dfrac{5}{6}\upsilon_{cm} = 10\,m/s$

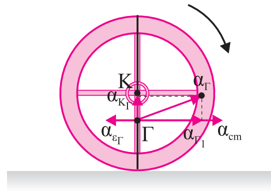
$s_\Gamma = \upsilon_{\gamma\rho_\Gamma}\Delta t$ ή $s_\Gamma = 20m$

**3.78** γ: $\upsilon_{\gamma\rho_\Gamma} = \dfrac{\omega R}{4} = \dfrac{\upsilon_{cm}}{4}$,

$\alpha_{\kappa_\Gamma} = \dfrac{\upsilon_{\gamma\rho_\Gamma}^2}{\frac{R}{4}} = \dfrac{\frac{\upsilon_{cm}^2}{16}}{\frac{R}{4}} = \dfrac{\upsilon_{cm}^2}{4R} = \dfrac{\alpha_{cm}^2 t^2}{4R}$

$\upsilon_\Gamma = \upsilon_{cm} - \upsilon_{\gamma\rho_\Gamma} = \dfrac{3\upsilon_{cm}}{4}$ και $\alpha_{\Gamma_1} = \dfrac{3\alpha_{cm}}{4}$

$\alpha_\Gamma = \sqrt{\alpha_{\Gamma_1}^2 + \alpha_{\kappa_\Gamma}^2} = \sqrt{\dfrac{9\alpha_{cm}^2}{16} + \dfrac{\alpha_{cm}^4 t^4}{16R^2}}$




**3.79** β: $\upsilon_B = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho_B} = \upsilon_{cm} + \omega x$

$\upsilon_\Gamma + \upsilon_{cm} - \upsilon_{\gamma\rho_\Gamma} = \upsilon_{cm} - \omega(R - x) =$

$= \upsilon_{cm} - \omega R + \omega x = \omega x$

Άρα: $\upsilon_B - \upsilon_\Gamma = \upsilon_{cm}$

**3.80** γ: $\upsilon_A = \upsilon_{cm} - \upsilon_{\gamma\rho_A} = \upsilon_{cm} - \omega R_2 =$

$= \upsilon_{cm} - \dfrac{\omega R_1}{3} = \dfrac{2\upsilon_{cm}}{3}$ ή $\upsilon_{cm} = 7{,}5m/s$

$\upsilon_B = 2\upsilon_{cm} = 15m/s$

**3.81** β: $\upsilon_B = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{\gamma\rho_B}^2} = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \left(\dfrac{\omega R}{3}\right)^2} =$

$= \sqrt{\dfrac{10\upsilon_{cm}^2}{9}} = \dfrac{\upsilon_{cm}\sqrt{10}}{3}$ ή $\upsilon_{cm} = 6\,m/s$

$\upsilon_\Delta = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{\gamma\rho_\Delta}^2 + 2\upsilon_{cm}\upsilon_{\gamma\rho_\Delta}\,\sigma\upsilon\nu 120^\circ} =$

$= \sqrt{2\upsilon_{cm}^2 + 2\upsilon_{cm}^2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)} = \upsilon_{cm} = 6\,m/s$

**3.82** β: Επειδή $\upsilon_A = 0$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε χρονική στιγμή ο δίσκος εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση γύρω από οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδό του, που διέρχεται από το σημείο Α.

$\upsilon_B = \omega(AB) = \omega R\sqrt{2}$ και $\upsilon_\Gamma = \omega(A\Gamma) = \omega R\sqrt{3}$

Άρα: $\dfrac{\upsilon_B}{\upsilon_\Gamma} = \dfrac{\omega R\sqrt{2}}{\omega R\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

**3.83** α: $\upsilon_B = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{\gamma\rho_B}^2}$ ή

$\dfrac{\upsilon_{cm}\sqrt{17}}{4} = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \omega^2(KB)^2}$ ή

$\dfrac{17\upsilon_{cm}^2}{16} = \upsilon_{cm}^2 + \dfrac{\upsilon_{cm}^2}{R^2}(KB)^2$ ή $KB = \dfrac{R}{4}$

$s = 2\pi(KB) = \dfrac{\pi R}{2}$

**3.84** γ: $υ_A = υ_{cm} + υ_{γρ_A} = υ_{cm} + ωR =$
$= υ_{cm} + 3ωr = 4υ_{cm}$

$\frac{dυ_A}{dt} = 4\frac{dυ_{cm}}{dt}$ ή $α_A = 4α_{cm}$

$s_A = \frac{1}{2}α_A t^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}α_{cm}t^2 = 4s_{cm}$

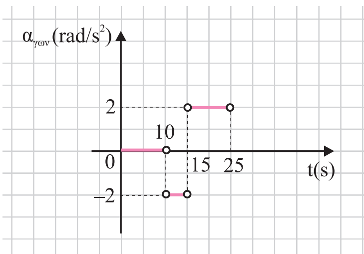
$\ell = s_A - s_{cm} = 3s_{cm} = 3 \cdot 4πr = 4πR$

## Ασκήσεις

**3.85** α) Για $Δt_1 = (10 - 0)s$, $Δω_1 = 0$, άρα

$α_{γων_1} = \frac{Δω_1}{Δt_1} = 0$. Ομοίως, $α_{γων_2} = -2 rad/s^2$

και $α_{γων_3} = 2 rad/s^2$.




β) $ω_{16} = ω_{15} + α_{γων_3}(t_1 - 15) = 12 rad/s$

γ) $Δθ_8 = ωΔt = 20 rad$. Τη χρονική στιγμή $t_2 = 24s$ το σώμα έχει γωνιακή ταχύτητα:

$ω_{24} = ω_{15} + α_{γων_3}(t_2 - 15) = 28 rad/s$

Στη διάρκεια του 25ου δευτερολέπτου:

$Δθ_{25} = ω_{24}Δt + \frac{1}{2}α_{γων_3}Δt^2$, με $Δt = 1s$, άρα:

$Δθ_{25} = 29 rad$

**3.86** α) Από $t = 0$ έως $t_2 = 2s$: $ω = α_{γων_1}t$, και για $t_1 = 1s$, $ω_1 = 20 rad/s$

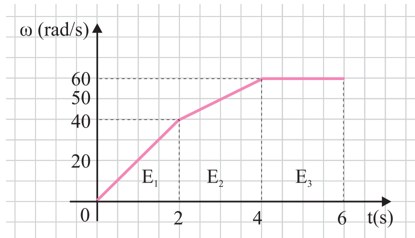
Για $t_2 = 2s$: $ω_2 = 40 rad/s$

Από $t_2 = 2s$ έως $t_4 = 4s$: $ω = ω_2 + α_{γων_2}(t - 2)$

και για $t_3 = 3s$, $ω_3 = 50 rad/s$

Από $t_4 = 4s$ έως $t_6 = 6s$: $ω_5 = ω_4 = 60 rad/s$

β)

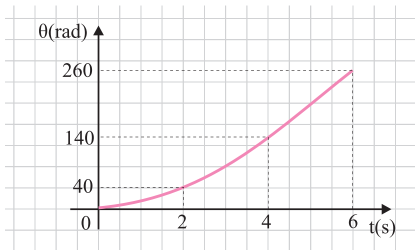



γ) Η γωνία που διαγράφει η σφαίρα είναι αριθμητικά ίση με το εμβαδόν που προκύπτει από τη γραφική παράσταση $ω = f(t)$.

$Δθ_1 = E_1 = \frac{40 \cdot 2}{2} rad = 40 rad$,

$Δθ_2 = E_2 = \frac{40 + 60}{2} \cdot 2\ rad = 100 rad$,

$Δθ_3 = E_3 = 60 \cdot 2 rad = 120 rad$



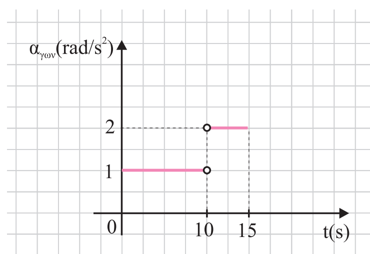

**3.87** α) $α_{γων_1} = \frac{Δω}{Δt} = \frac{-7 - (-10)}{3} = 1 rad/s^2$

β) $ω = ω_0 + α_{γων_1}t$. Για $ω = 0$ προκύπτει $t_1 = 10s$.

γ) Από $t_0 = 0$ έως $t_1 = 10s$: $α_{γων_1} = 1 rad/s^2$

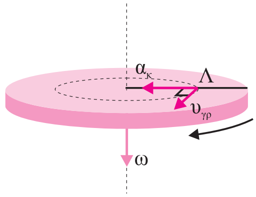
Από $t_1 = 10s$ έως $t_2 = 15s$:

$α_{γων_2} = \frac{Δω}{Δt} = 2 rad/s^2$



δ) Για t = 2s: ω = –8rad/s

$\alpha_\kappa$ = $\omega^2 d$=6,4m/s$^2$ και $\upsilon_{\gamma\rho} = |\omega d| = 0{,}8\,m/s$




**3.88** α) Για $t_2$ = 2s: $\omega_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2$ = 20rad/s

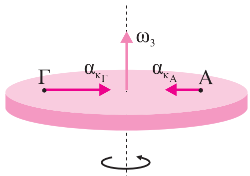
$\upsilon_{\gamma\rho_A} = \omega_2 \dfrac{R}{2} = 4\,m/s$ και

$\upsilon_{\gamma\rho_\Gamma} = \omega_2 \dfrac{3R}{4} = 6\,m/s$

β) $\omega_3 = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_3$ = 30rad/s

$\alpha_{\kappa_A} = \omega_3^2 \dfrac{R}{2} = 180\,m/s^2$ και

$\alpha_{\kappa_\Gamma} = \omega_3^2 \dfrac{3R}{4} = 270\,m/s^2$




γ) $\theta = \dfrac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$. Για θ = 180rad προκύπτει t = 6s.

$\omega_6$ = 60rad/s και $\upsilon_{\gamma\rho_A} = 12\,m/s$

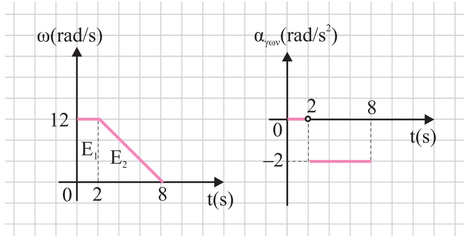
$p_A = m\upsilon_{\gamma\rho_A} = 12 \cdot 10^{-3} kg \cdot m/s$

**3.89** α) $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = 12\,rad/s$

Από $t_0$ = 0 έως $t_1$ = 2s: ω = 12rad/s

Για t > $t_1$: $\omega = \omega_0 - |\alpha_{\gamma\omega\nu}|(t - t_1) =$

$= 12 - 2(t-2)$ SI




β) $\Delta\theta_1 = E_1$ = 24rad και $\Delta\theta_2 = E_2$ = 36rad

$N = \dfrac{\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2}{2\pi} = \dfrac{30}{\pi}$ περιστροφές

γ) $\Delta\theta_3 = \omega_0 (t-2) - \dfrac{1}{2}|\alpha_{\gamma\omega\nu}|(t-2)^2 = 11 rad$

δ) $\alpha_\varepsilon = |\alpha_{\gamma\omega\nu}| R$

Για $t_2$ = 1 s: $\alpha_{\varepsilon_2}$ = 0 και για $t_3$ = 4s: $\alpha_{\varepsilon_3}$ = 0,4m/s$^2$

**3.90** α) $\theta = \omega_0 t - \dfrac{1}{2}|\alpha_{\gamma\omega\nu}| t^2$

Για $t_1$ = 1s: $\theta_1 = 10 - \dfrac{|\alpha_{\gamma\omega\nu}|}{2}$ (1)

Για $t_2$ = 2s: $\theta_2 = 20 - 2|\alpha_{\gamma\omega\nu}|$ (2)

$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 7 rad$ (3)

Από (1), (2), (3): $|\alpha_{\gamma\omega\nu}| = 2 rad/s^2$

β) $\omega = \omega_0 - |\alpha_{\gamma\omega\nu}| t$

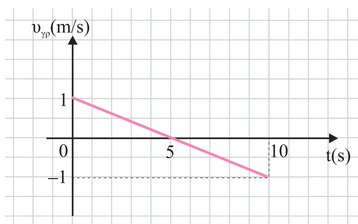
Για ω = – 10rad/s προκύπτει t = 10s.

γ) $\omega = \omega_0 - |\alpha_{\gamma\omega\nu}| t = 10 - 2t$ SI

$\upsilon_{\gamma\rho} = \omega R = (10 - 2t)R = 1 - 0{,}2t$ SI

Για t = 0: $\upsilon_{\gamma\rho}$ = 1m/s

Για t = 5s: $\upsilon_{\gamma\rho}$ = 0 και για t = 10s: $\upsilon_{\gamma\rho}$ = –1m/s



**3.91** α) Από τη σχέση $\theta = 20t + t^2$, για $t_1 = 1s$: $\theta_1 = 21rad$ και για $t_2 = 2s$: $\theta_2 = 44rad$

$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 23rad$

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{11{,}5}{\pi} \text{ περιστροφές}$$

β) $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$ και $\theta = 20\,t + t^2$. Άρα:

$\omega_0 = 20rad/s$ και $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 2rad/s^2$

$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t$, άρα για $t = 2s$ έχουμε: $\omega = 24rad/s$

$\upsilon_{\gamma\rho} = \omega R = 9{,}6m/s$ και

$$p = m\upsilon_{\gamma\rho} = 9{,}6 \cdot 10^{-4} kg \cdot m/s$$

γ) $\alpha_\varepsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu} R = 0{,}8m/s^2$

**3.92** α) $K_B = \frac{1}{2} m_B \upsilon^2_{\gamma\rho_B}$ ή $\upsilon_{\gamma\rho_B} = 2m/s$

$\upsilon_{\gamma\rho_B} = \omega_1 R$ ή $\omega_1 = 32rad/s$

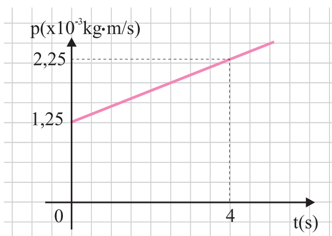
β) $\omega_1 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 4rad/s^2$

γ) $p = m\upsilon_{\gamma\rho_B} = m\omega R = mR\left(\omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t\right) =$

$$= \frac{5}{4}10^{-3} + \frac{1}{4}10^{-3} t \quad SI$$

Για $t = 0$: $p = 1{,}25 \cdot 10^{-3} kg \cdot m/s$

Για $t = 4s$: $p = 2{,}25 \cdot 10^{-3} kg \cdot m/s$




**3.93** α) $N = \frac{\theta}{2\pi}$ ή $\theta = 58rad$

β) Μέχρι τη στιγμή $t_1 = 3s$: $\theta_1 = \omega_0 t_1 = 30rad$, άρα από $t_1 = 3s$ έως $t_2 = 5s$ ο κύλινδρος διαγράφει γωνία: $\theta_2 = \theta - \theta_1 = 28rad$

$$\theta_2 = \omega_0 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}(t_2 - t_1)^2 \text{ ή}$$

$\alpha_{\gamma\omega\nu} = 4rad/s^2$

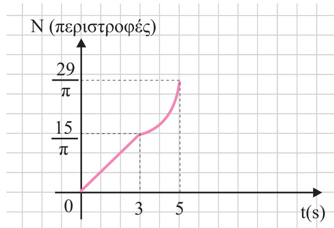
γ) Από $t = 0$ έως $t_1 = 3s$: $\theta = \omega_0 t = 10t$ και

$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{5t}{\pi}$. Από $t_1 = 3s$ έως $t_2 = 5s$:

$$\Delta\theta = \omega_0 (t - t_1) + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}(t - t_1)^2 =$$

$$= 10(t-3) + 2(t-3)^2 \text{ και}$$

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{5}{\pi}(t-3) + \frac{(t-3)^2}{\pi}$$




**3.94** α) Ο δίσκος αρχικά κινείται με τη μέγιστη επιτάχυνση μέχρι να αποκτήσει $\omega = 20rad/s$ και στη συνέχεια στρέφεται ομαλά.

$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t$ ή $t_1 = 4s$

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2 = 40rad$$

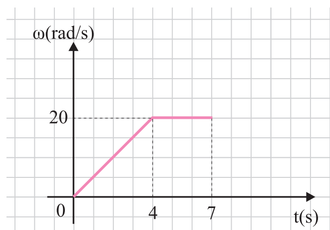
$\theta_2 = \theta - \theta_1 = 60rad$

$\theta_2 = \omega \Delta t_2$ ή $\Delta t_2 = 3s$

$t = t_1 + \Delta t_2 = 7s$

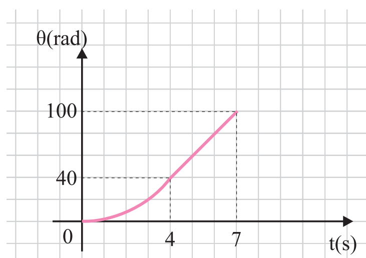
β) Για $0 \le t < 4s$: $\omega = 5t$ SI

Για $4s \le t \le 7s$: $\omega = 20 rad/s$




γ) Για $0 \le t < 4s$: $\theta = 2{,}5t^2$ SI

Για $4s \le t \le 7s$: $\theta = 40 + 20(t-4)$ SI



**3.95** α) Από 0 έως $t_1$ = 2s:

$\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu_1} t_1 = 20\,rad/s$

$\theta_1 = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu_1} t_1^2 = 20\,rad$

Από $t_1$ = 2s έως $t_2$ = 4s:

$\Delta\theta_2 = \omega_1 \Delta t_2 = 40rad$

$\theta_1 + \Delta\theta_2 = 60rad$

$N_{1,\,2} = \frac{\theta_1 + \Delta\theta_2}{2\pi} = \frac{30}{\pi}$ περιστροφές

β) $\theta_{o\lambda} = 2\pi N_{o\lambda} = 80rad$

$\Delta\theta_3 = \theta_{o\lambda} - (\theta_1 + \Delta\theta_2) = 20rad$

$\Delta\theta_3 = \omega_1 \Delta t_3 - \frac{1}{2}\left|\alpha_{\gamma\omega\nu_3}\right|\Delta t_3^2$ (1)

$\omega = \omega_1 - \left|\alpha_{\gamma\omega\nu_3}\right|\Delta t_3$ και για ω = 0 έχουμε

$\omega_1 = \left|\alpha_{\gamma\omega\nu_3}\right|\Delta t_3$ (2). Από (1) και (2): $\Delta t_3$ = 2s

$t_{o\lambda} = t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = 6s$

γ) Από τη σχέση (2) έχουμε: $\left|\alpha_{\gamma\omega\nu_3}\right| = 10\,rad/s^2$

δ) Για $t_3$ = 1s: $\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu_1} t_3 = 10\,rad/s$ και

$\upsilon_3 = \omega R = 10R$

Για $t_4$ = 5s: $\omega = \omega_1 - \left|\alpha_{\gamma\omega\nu_3}\right|(t_4 - t_2) = 10\,rad/s$

και $\upsilon_4 = \omega R = 10R$

$$\frac{K_3}{K_4} = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon_3^2}{\frac{1}{2}m\upsilon_4^2} = 1$$

**3.96** α) $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 90\pi\,rad/s$

$\omega = \omega_0 - \left|\alpha_{\gamma\omega\nu}\right|t$ (1). Για $t_1$ = 10π s, ω = 0, άρα

$\left|\alpha_{\gamma\omega\nu}\right| = \frac{\omega_0}{t_1} = 9\,rad/s^2$

β) Από τη σχέση (1), για t = 2πs:

ω = 72πrad/s

$\upsilon_K = \omega\frac{R}{3} = 3{,}6\pi\,m/s$ και

$\upsilon_\Lambda = \omega R = 10{,}8\pi m/s$

γ) $\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}\left|\alpha_{\gamma\omega\nu}\right|t^2$ και για t = 1s, $\theta_K = 278{,}1rad$

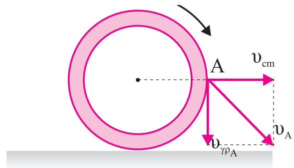
$s_K = \theta_K\frac{R}{3} = 13{,}905\,m$

**3.97** α) $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_{cm}}{R} = 40\,rad/s^2$

$\theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2$ και για t = 2s: θ = 80rad

$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{40}{\pi}$ περιστροφές

β)



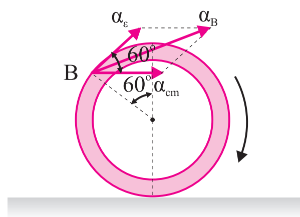

$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu}t$ και για t = 3s: ω = 120rad/s

$\upsilon_{\gamma\rho_A} = \omega R = 60\,m/s$

$\upsilon_{cm} = \upsilon_{\gamma\rho} = 60\,m/s$

$\upsilon_A = \sqrt{\upsilon_{\gamma\rho_A}^2 + \upsilon_{cm}^2} = 60\sqrt{2}\,m/s$

γ)




$\alpha_\varepsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu}R = 20m/s^2$

$\alpha_{cm} = \alpha_\varepsilon = 20m/s^2$

$\alpha_B = \sqrt{\alpha_{cm}^2 + \alpha_\varepsilon^2 + 2\alpha_{cm}\alpha_\varepsilon \sigma\upsilon\nu 60^\circ} = 20\sqrt{3}\,m/s^2$

**3.98** α) $\omega_0 = 2\pi f_0 = 20\pi rad/s$

$\omega = \omega_0 - \left|\alpha_{\gamma\omega\nu}\right|t$

Για t = 2πs: ω = 0, άρα: $\left|\alpha_{\gamma\omega\nu}\right| = 10\,rad/s^2$

β) $\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}\left|\alpha_{\gamma\omega\nu}\right|t^2 = 20\pi^2 rad = 200\,rad$

$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{100}{\pi}$ περιστροφές

γ) Για t = π s: ω = 10πrad/s

$\alpha_K = \omega^2 R = 100\ m/s^2$

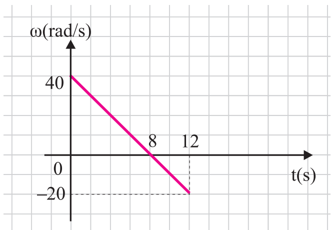
## Προβλήματα

**3.99** α) $\left|\alpha_{cm}\right| = \alpha_{\gamma\omega\nu}R = 2{,}5\,m/s^2$

$\upsilon_{cm} = \upsilon_{cm_0} - \left|\alpha_{cm}\right|t$ (1) και για $\upsilon_{cm}$ = 10m/s: $t_1$ = 4s

και για $\upsilon_{cm}$ = – 10 m/s: $t_2$ = 12s

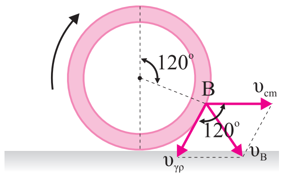
β) Από τη σχέση (1) για $\upsilon_{cm}$ = 0: $t_3$ = 8s γ) $\omega = \omega_0 - |\alpha_{\gamma\omega\nu}|t$ ή ω = 40 – 5t SI




δ) $s = \upsilon_{cm_0} t - \frac{1}{2}|\alpha_{cm}|t^2$ και για $t_3$ = 8s: s = 80m

$$N = \frac{s}{2\pi R} = \frac{80}{\pi} \text{ περιστροφές}$$

**3.100** α) Για t = 2s: $\upsilon_{cm} = \alpha_{cm} t$ = 10m/s




$$\upsilon_B = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{\gamma\rho}^2 + 2\upsilon_{\gamma\rho}\upsilon_{cm}\sigma\upsilon\nu 120^\circ} =$$

$$= \upsilon_{cm} = 10\,m/s$$

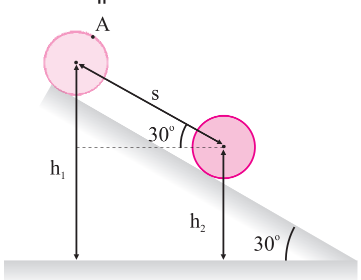
$$\alpha_{K_B} = \frac{\upsilon_{\gamma\rho}^2}{R} = 13{,}33\,\pi\,m/s^2$$

β) $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_{cm}}{R} = \frac{5\pi}{7{,}5}\,rad/s^2$

$\theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2$ (1) και για $\theta = \frac{\pi}{3}$ rad : t = 1s

γ) Από τη σχέση (1), για θ = 6πrad: $t = 3\sqrt{2}\,s$

**3.101** α) $s = \frac{h_1 - h_2}{\eta\mu 30^\circ} = 10m$




$s = \frac{1}{2}\alpha_{cm}t^2$ και για $t_2 = \sqrt{6}\,s$: $\alpha_{cm} = \frac{10}{3}m/s^2$

β) Για $t_1$ = 2s: $\upsilon_{cm} = \alpha_{cm}t_1 = \frac{20}{3}m/s$

$$\upsilon_A = 2\upsilon_{cm} = \frac{40}{3}m/s$$

γ) $s_{o\lambda} = \frac{h_1}{\eta\mu 30^\circ} = 20m$

$$N = \frac{s_{o\lambda}}{2\pi R} = \frac{100}{\pi} \text{ περιστροφές}$$

**3.102** α) $\alpha_{\gamma\omega\nu_1} = \frac{\alpha_{cm}}{R_1} = 10\,rad/s^2$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu_2} = \frac{\alpha_{cm}}{R_2} = 5\,rad/s^2$$

β) $\theta_1 = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu_1}t^2$ και $N_1 = \frac{\theta_1}{2\pi}$

$\theta_2 = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu_2}t^2$ και $N_2 = \frac{\theta_2}{2\pi}$

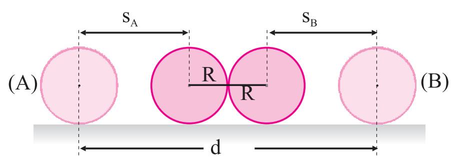
$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\alpha_{\gamma\omega\nu_1}}{\alpha_{\gamma\omega\nu_2}}$ και για $N_1$ = 5 έχουμε:

$N_2$ = 2,5 περιστροφές

γ) $\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu}t$

Για t = 4s: $\omega_1$ = 40rad/s και $\omega_2$ = 20rad/s

**3.103** α)




Όταν έρχονται σε επαφή οι δύο τροχοί, έχουν διανύσει αποστάσεις $s_A$ και $s_B$ αντίστοιχα και ισχύει: $s_A + s_B = d - 2R$ = 10m (1)

$$s_A = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}|\alpha_{cm_A}|t^2 \quad (2)$$

$$s_B = \frac{1}{2}\alpha_{cm_B}t^2 \quad (3)$$

Από (1), (2), (3): t = 1s

β) Για t = 1s: $\upsilon_A = \upsilon_0 - \alpha_{cm_A}t = 8\,m/s$

$$\upsilon_B = \alpha_{cm_B}t = 2\,m/s$$

γ) $N = \frac{s_A}{2\pi R} + \frac{s_B}{2\pi R} = \frac{s_A + s_B}{2\pi R} = \frac{10}{\pi}$ περιστροφές

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

# ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ - ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ

## Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

4.9β, 4.10γ, 4.11β, 4.12β, 4.13δ, 4.14α, 4.15δ, 4.16γ, 4.17γ, 4.18γ, 4.19β, 4.20α, 4.21δ, 4.22α, 4.23γ, 4.24β, 4.25γ, 4.26γ, 4.27δ, 4.28β, 4.29β, 4.30β

## Ερωτήσεις κατανόησης

**4.31** α: Επειδή το σύστημα ράβδος-σώμα $\Sigma_1$-σώμα $\Sigma_2$ ισορροπεί, έχουμε:

$\Sigma\tau_{(O)} = 0$ ή $w_1\frac{3L}{10} - w_2\left(L - \frac{L}{5} - \frac{3L}{10}\right) = 0$ ή

$m_1 g\frac{3L}{10} = m_2 g\frac{L}{2}$ ή $\frac{m_1}{m_2} = \frac{5}{3}$

**4.32** γ: $\Sigma\tau_{(K)} = 0$ ή $F_1 r_1 + F_2\frac{r_1}{2} - F_3\frac{r_1}{2} = 0$ ή

$F_3 = 3F_1$

**4.33** γ: $\Sigma\tau_{(K)} = 0$ ή $w_1 R - w_2 r = 0$ ή

$m_1 g 2r = m_2 g r$ ή $m_2 = 2m_1$

**4.34** β: $\Sigma\tau_{(O)} = w_1\frac{L_1\eta\mu\varphi}{2} - w_2\frac{L_2\eta\mu\varphi}{2} =$

$= m_1 g L_2 \eta\mu\varphi - 2m_1 g\frac{L_2\eta\mu\varphi}{2} = 0$

Άρα, το σύστημα ισορροπεί.

**4.35** α: Το σύστημα ισορροπεί, επομένως ισχύει:

$\Sigma\tau_{(K)} = 0$ ή $F\frac{3R_1}{2} - w_1 R_1 - w_2\frac{3R_1}{2} = 0$ ή

$\frac{3F}{2} = m_1 g + 6m_1 g$ ή $F = \frac{14m_1 g}{3}$

**4.36** β: Έστω F η οριζόντια δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον κατακόρυφο τοίχο. Εφόσον η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$\Sigma F_x = 0$ ή $F - T = 0$ ή $T = F$, άρα το έδαφος δεν είναι λείο.

**4.37** β: Η ροπή του ζεύγους δυνάμεων δίνεται από τη σχέση $\tau = Fd$, όπου d η μεταξύ τους απόσταση.

$\tau' = \frac{\tau}{3}$ ή $Fd' = \frac{Fd}{3}$ ή $d' = \frac{d}{3}$

**4.38** α: $\Sigma\tau_{(K)} = 0$ ή $F\frac{L}{2} - 2F\sigma\upsilon\nu\varphi\frac{L}{2} = 0$ ή

$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1}{2}$ ή $\varphi = \frac{\pi}{3}\text{rad}$

**4.39** γ: $\Sigma\tau_{(K)} = 0$ ή $F_1 R - F_2 R\sigma\upsilon\nu 60^\circ = 0$ ή

$F_2 = 2F_1$

**4.40** β: $\left|\tau_{F_K}\right| - \left|\tau_{F_\Lambda}\right| = (5t + 2)R - (4t + 6)\frac{R}{3} =$

$= 5tR + 2R - \frac{4tR}{3} - 2R = t\left(5R - \frac{4R}{3}\right) = \frac{11R}{3}t \geq 0$

Για $t = 0$ : $\left|\tau_{F_K}\right| = \left|\tau_{F_\Lambda}\right|$

Για $t \neq 0$ : $\left|\tau_{F_K}\right| > \left|\tau_{F_\Lambda}\right|$

**4.41** β: Έστω x η απόσταση του σώματος από το σημείο Β.

Επειδή το σύστημα ισορροπεί, ισχύει:

$\Sigma\tau_{(B)} = 0$ ή $-w\frac{L}{2} - w_1 x + TL\eta\mu\varphi = 0$ ή

$T = \frac{w\frac{L}{2} + w_1 x}{L\eta\mu\varphi}$ (1)

Επειδή το x μειώνεται, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι μειώνεται και το Τ.

**4.42** α: $\Sigma\tau_{(M)} = 0$ ή $F_B x - F_A\frac{L}{2} = 0$ ή

$2F_A x = F_A\frac{L}{2}$ ή $x = \frac{L}{4}$

**4.43** α: Από τη σχέση $\tau = Fd$ προκύπτει ότι η ροπή τ είναι ανάλογη της απόστασης d μεταξύ των δύο δυνάμεων του ζεύγους.

**4.44** β: $\Sigma\tau_{(O)}=0$ ή $\tau_w+\tau_{F_{\varepsilon\lambda}}=0$ ή $\tau_{F_{\varepsilon\lambda}}=-\tau_w$. άρα το ελατήριο είναι συσπειρωμένο.

**4.45** γ: $\Sigma\tau_{(A)}=0$ ή $FL\sigma\upsilon\nu\varphi-w\frac{L}{2}\eta\mu\varphi=0$

$\frac{w\sqrt{3}}{6}\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{w}{2}\eta\mu\varphi$ ή $\varepsilon\varphi\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $\varphi=\frac{\pi}{6}rad$

**4.46** α: $\Sigma\tau_{(O)}=0$ ή $Fx-wR=0$ ή $4wx=wR$ ή $x=\frac{R}{4}$

**4.47** γ: Γνωρίζουμε ότι το ύψος ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α είναι $\upsilon=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Υπολογίζουμε τη συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς το σημείο Α:

$\Sigma\tau_{(A)}=F_2\upsilon$ ή $\Sigma\tau_{(A)}=\frac{F\alpha\sqrt{3}}{2}$

**4.48** β: Έστω ότι ο εργάτης βρίσκεται δεξιά από το στήριγμα στο σημείο Β και απέχει απόσταση x από αυτό.

$\Sigma\tau_{(B)}=0$ ή $w\left(\frac{L}{2}-d\right)-w_1x=0$ ή

$x=\frac{w}{w_1}\left(\frac{L}{2}-d\right)$ ή $x=\frac{m}{m_1}\left(\frac{L}{2}-d\right)$

**4.49** α: Έστω ότι το σώμα είναι κρεμασμένο από σημείο που απέχει απόσταση x από το σημείο Α.

$\Sigma\tau_{(A)}=0$ ή $T\frac{L}{2}\eta\mu30°-wx\sigma\upsilon\nu30°=0$ ή

$\frac{w}{4}\frac{L}{2}\frac{1}{2}=wx\frac{\sqrt{3}}{2}$ ή $x=\frac{L\sqrt{3}}{24}$

**4.50** β: $F_1=F_2$ ή $5+2t=1+3t$ ή $t=4s$

**4.51** β: $\Sigma\tau_{(A)}=0$ ή $T\frac{2L}{3}\eta\mu30°-w\frac{L}{2}\eta\mu30°=0$ ή $w=\frac{4T}{3}$

**4.52** β: Για την τροχαλία ισχύει:

$\Sigma\tau_{(K)}=0$ ή $Fr-T_2\cdot2r=0$ ή $F=2T_2$ (1)

Για το σώμα $\Sigma_1$ ισχύει: $\Sigma F = 0$ ή $T_2=w_1+T_3$ ή

$T_3=\frac{F}{2}-mg$ (2)

Για τη ράβδο ισχύει: $\Sigma\tau_{(O)}=0$ ή

$T_3\frac{3L}{4}-w_\rho\frac{L}{2}-w_2L=0$ ή

$\frac{3}{4}\left(\frac{F}{2}-mg\right)=\frac{mg}{2}+mg$ ή $F = 6mg$

**4.53** α: $\Sigma\tau_{(K)}=0$ ή $F\frac{L}{2}-T\sigma\upsilon\nu\varphi\frac{L}{2}=0$ ή

$F=T\sigma\upsilon\nu\varphi$ ή $\frac{mg}{4}=T\sigma\upsilon\nu\varphi$ ή

$T=\frac{mg}{4\sigma\upsilon\nu\varphi}=\frac{mg}{2}$

Για το $\Sigma_1$: $\Sigma F_x=0$ ή $w_1\sigma\upsilon\nu\varphi+F_{\varepsilon\lambda}=T$ ή

$\frac{mg}{2}+F_{\varepsilon\lambda}=\frac{mg}{2}$ ή $F_{\varepsilon\lambda}=0$

**4.54** α: Για το σύστημα ισχύει:

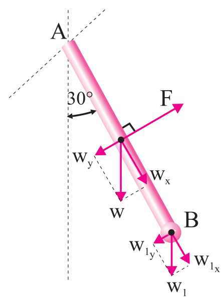
$\Sigma\tau_{(O)} = 0$ ή $m_1g\eta\mu\varphi_1r = m_2g\eta\mu\varphi_2R$ ή

$m_1=2m_2\sqrt{3}$

**4.55** β: Το σύστημα ισορροπεί.

Άρα: $\Sigma\tau_{(A)} = 0$ ή

$F\frac{\ell}{2}-w\eta\mu30°\frac{\ell}{2}-w_1\eta\mu30°\ell = 0$ ή $w = 2w_1$

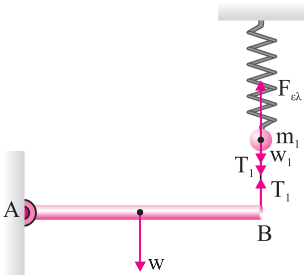



**4.56** α: Για το σώμα μάζας $m_1$ ισχύει:

$T_1 + w_1 = F_{\varepsilon\lambda}$ (1)

Για τη ράβδο ισχύει:

$\Sigma\tau_{(A)} = 0$ ή $-w\frac{\ell}{2}+T_1\ell = 0$ ή $T_1=\frac{w}{2}$ (2)




Από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε:

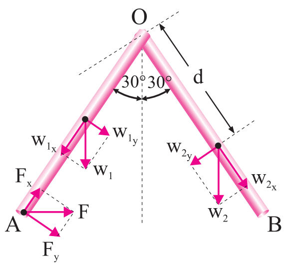
$$\frac{w}{2} + w = F_{ελ} \quad ή \quad F_{ελ} = \frac{3}{2}w$$

**4.57** β: Το σύστημα ισορροπεί. Επομένως:

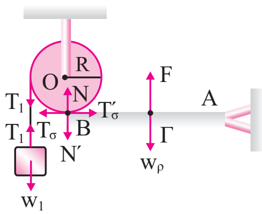
$Στ_{(O)} = 0$ ή

$$F συν30^\circ \ell + w_1 ημ30^\circ \frac{\ell}{2} - w_2 ημ30^\circ d = 0 \quad ή$$

$$w\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\ell + w\frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{2} - 4w\frac{1}{2}d \quad ή \quad d = \frac{7\ell}{8}$$




**4.58** α:




Για το $Σ_1$:

$ΣF = 0$ ή $T_1 = m_1 g$ ή $T_1 = 10N$

Για την τροχαλία:

$Στ_{(O)} = T_1 R - T_σ R = 0$ ή $T_σ = 10N$

Για τη ράβδο:

$$Στ_{(A)} = 0 \quad ή \quad w_ρ\frac{\ell}{2} - F\frac{\ell}{2} + N'\ell = 0 \quad ή \quad N' = 30N$$

$$T_σ' = μ_s N' \; ή \; μ_s = \frac{T_σ'}{N'} = \frac{T_σ}{N} = \frac{1}{3}$$

**4.59** γ: $Στ_{(Κ)} = 0$ ή $Tr - T_σ R = 0$ ή

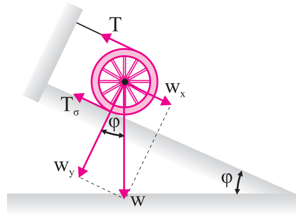
$Tr - 3T_σ r$ ή $T = 3T_σ$

**4.60** β: Ο τροχός ισορροπεί. Επομένως:

$Στ = 0$ ή $T_σ R = TR$ ή $T_σ = T$

$ΣF_x = 0$ ή $w_x = T + T_σ$ ή $wημφ = 2T$ ή

$$T = \frac{mgημφ}{2}$$




**4.61** Για το σώμα $Σ_1$ έχουμε:

$ΣF_x = 0$ ή $m_1 gημ30^\circ + T_σ = T_1$ ή

$m_1 gημ30^\circ = T_1 - μ_s m_1 gσυν30^\circ$ (1)

Για το σώμα $Σ_2$ έχουμε:

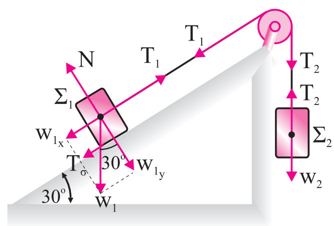
$T_2 = m_2 g$ (2)

Για την τροχαλία ισχύει:

$Στ = 0$ ή $T_1 R - T_2 R = 0$ ή $T_1 = T_2$ (3)

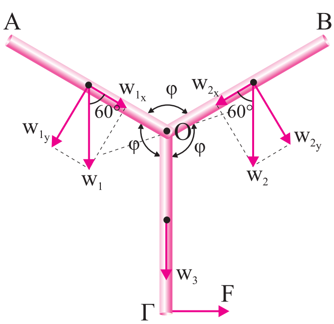
Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$8m_2 = 7m_1$




**4.62** α: $Στ_{(O)} = 0$ ή $F\ell + w_{1y}\frac{\ell}{2} - w_{2y}\frac{\ell}{2} = 0$ ή

$$F\ell + \frac{mg\ell}{2}ημ60^\circ - \frac{2mg\ell}{2}ημ60^\circ = 0 \; ή \; m = 4kg$$



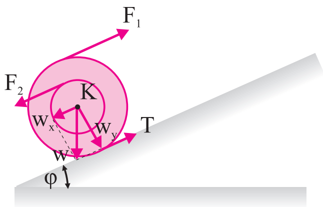
**4.63** α: $\Sigma\tau_{(K)} = 0$ ή $-F_1R + TR + F_2r = 0$ ή

$-wR + TR + F_2\dfrac{R}{2} = 0$ ή $F_2 = 2w - 2T$ (1)

$\Sigma F_x = 0$ ή $F_1 + T = F_2 + w\eta\mu\varphi$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$T = \dfrac{w}{2}$

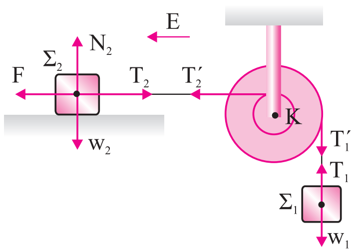



**4.64** α: Για το $\Sigma_1$: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $w_1 = T_1$ (1)

Για το $\Sigma_2$: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $F = T_2$ ή $qE = T_2$ (2)

$\Sigma\tau_{(K)} = 0$ ή $T_2'r - T_1'R = 0$ ή $T_2' = 4T_1'$ ή

$T_2 = 4T_1$ (3)




Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$T_2 = 4T_1$ ή $qE = 4w_1$ ή $qE = 8mg$ ή

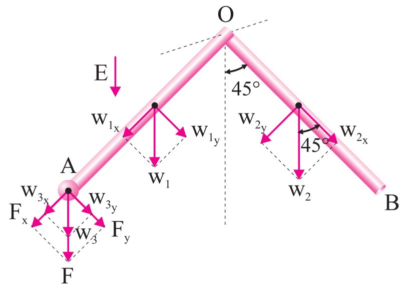
$E = \dfrac{8mg}{q}$

**4.65** β: $\Sigma\tau_{(O)} = 0$ ή

$F\ell\eta\mu 45^\circ + w_3\ell\eta\mu 45^\circ + w_1\dfrac{\ell}{2}\eta\mu 45^\circ -$

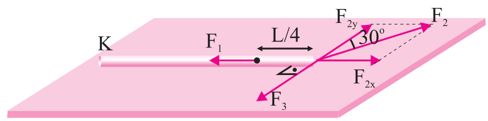
$- w_2\dfrac{\ell}{2}\eta\mu 45^\circ = 0$ ή $qE + \dfrac{mg}{4} + \dfrac{mg}{2} - mg = 0$

ή $q = \dfrac{mg}{4E}$




## Ασκήσεις

**4.66**




α) $\tau_{F_1} = 0,\ \tau_{F_{2x}} = 0,$

$\tau_{F_{2y}} = F_2\sigma\upsilon\nu 30^\circ L = 5\sqrt{3}\ N\cdot m,$

$\tau_{F_3} = -F_3L = -10N\cdot m$

β) $\Sigma\tau_{(\kappa)} = \tau_{F_1} + \tau_{F_{2x}} + \tau_{F_{2y}} + \tau_{F_3} = -1{,}339N\cdot m$

**4.67** $\Sigma\tau_{(\kappa)} = \tau_{F_1} + \tau_{F_2} + \tau_{F_3} + \tau_w =$

$= 0 - F_2\cdot\Gamma K - F_3\eta\mu 30^\circ BK + w\cdot OK =$

$= -100N\cdot m$

**4.68** Οι δύο δυνάμεις αποτελούν ζεύγος δυνάμεων.

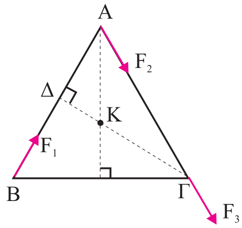
$\Sigma\tau = F(r_1 + r_2) = 60N\cdot m$

**4.69** α) $\Sigma\tau_{(\kappa)} = \tau_{F_1} + \tau_{F_4} = F_1\dfrac{\alpha}{2} + F_4\dfrac{\alpha}{2} = F\alpha$

β) $\Sigma\tau_{(\Delta)} = \tau_{F_3} + \tau_{F_4} = F_3\eta\mu 45^\circ\alpha + F_4\alpha =$

$= F\alpha\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

**4.70** $\Gamma\Delta = \sqrt{\alpha^2 - \dfrac{\alpha^2}{4}} = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ και $K\Delta = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{6}$




$$\Sigma\tau_{(K)} = \tau_{F_1} + \tau_{F_2} + \tau_{F_3} =$$

$$= -F_1\frac{\alpha\sqrt{3}}{6} - F_2\frac{\alpha\sqrt{3}}{6} - F_3\frac{\alpha\sqrt{3}}{6} = -\frac{F\alpha\sqrt{3}}{2}$$

**4.71** α) $\Delta O = OE = \dfrac{\beta}{2}$

$$\Sigma\tau_{(O)} = F\frac{\beta}{2} - 2F\frac{\beta}{2} = -F\frac{\beta}{2}$$

β) $\Sigma\tau_{(B)} = -2F\beta$

γ) $\Sigma\tau_{(\Gamma)} = F\beta$

**4.72** $\Sigma\tau_{(K)} = \tau_{F_1} + \tau_{F_2} + \tau_{F_3} = -F_1R + F_2R - F_3r =$

$= -2Fr + 4Fr - Fr = Fr$

**4.73** $\Sigma\tau_{(O)} = \tau_{w_A} + \tau_w + \tau_{w_B} =$

$$= \frac{w}{2}\frac{L}{3}\eta\mu 60^\circ - w\frac{L}{6}\eta\mu 60^\circ - \frac{w}{2}\frac{2L}{3}\eta\mu 60^\circ =$$

$$= -\frac{wL\sqrt{3}}{6}$$

**4.74** $\Sigma\tau_{(O)} = \tau_{w_1} + \tau_{w_2} + \tau_{w_3} =$

$$= w_1\frac{L}{2} - w_2\frac{L}{3}\eta\mu 30^\circ + w_3L = \frac{13w}{12}L$$

**4.75** Για να ισορροπεί η ράβδος, πρέπει $\Sigma\tau_{(A)} = 0$.

$\Sigma\tau_{(A)} = \tau_w + \tau_{w_1} + \tau_F = 0$ ή

$$-w\frac{L}{2}\eta\mu 30^\circ - w_1L\eta\mu 30^\circ + F\frac{L}{3} = 0 \quad ή$$

$$F = \frac{9w}{4}$$

**4.76** α) Η ράβδος ισορροπεί, άρα $\Sigma\tau_{(O)} = 0$ (1) και $\Sigma F = 0$ (2). Από τη σχέση (1):

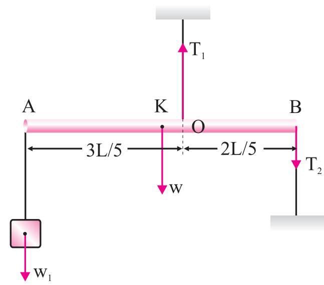
$\tau_{w_1} + \tau_{w_2} + \tau_w = 0$ ή

$w_1(AO) - w(KO) - w_2(BO) = 0$ ή

$w_1\dfrac{3L}{10} - w\dfrac{L}{10} - w_2\dfrac{2L}{10} = 0$ ή $w = 40N$

β) Από τη σχέση (2): $w_1 + w_2 + w = F$ ή $F = 70N$

**4.77**

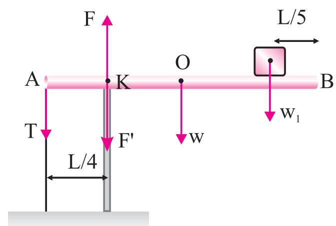



$\Sigma\tau_{(O)} = 0$ ή $\tau_{w_1} + \tau_w + \tau_{T_2} = 0$ ή

$w_1\dfrac{3L}{5} + w\left(\dfrac{3L}{5} - \dfrac{L}{2}\right) - T_2\dfrac{2L}{5} = 0$ ή $T_2 = 55N$

$\Sigma F = 0$ ή $T_1 = w_1 + w + T_2 = 175N$

**4.78**




α) $\Sigma\tau_{(A)} = 0$ ή $F\dfrac{L}{4} - w\dfrac{L}{2} - w_1\left(L - \dfrac{L}{5}\right) = 0$ ή

$F = 360N$

Λόγω δράσης – αντίδρασης: $F' = F = 360N$

β) $\Sigma F_y = 0$ ή $T = F - w - w_1 = 210N$

**4.79** α$_1$) $\Sigma\tau_{(A)} = 0$ ή

$w\frac{\ell}{2}\eta\mu\varphi_2 = T\ell$ ή

$T = 100N$

α$_2$) $\Sigma F_x = 0$ ή

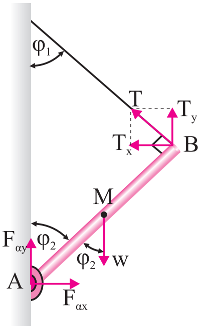
$F_{\alpha_x} = T\eta\mu 45^\circ = 50\sqrt{2}\,N$ ή

$\Sigma F_y = 0$ ή

$F_{\alpha_y} + T\sigma\upsilon\nu 45^\circ = w$ ή

$F_{\alpha_y} = 150\sqrt{2}\,N$

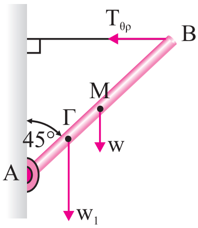
$F = \sqrt{F^2_{\alpha_x} + F^2_{\alpha_y}} = 223{,}6N$



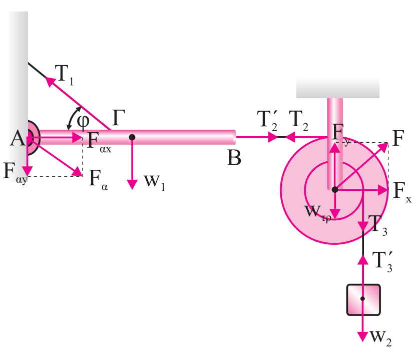

Β. Έστω ότι το σημείο Γ απέχει από το άκρο Α απόσταση x.

$\Sigma\tau_{(A)} = 0$ ή $w\frac{\ell}{2}\eta\mu 45^\circ + w_1 x\eta\mu 45^\circ = T_{\theta\rho}\ell\sigma\upsilon\nu 45^\circ$

ή $x = 0{,}25m$




**4.80** α$_1$) Για το Σ: $T'_3 = w_2 = 100N$,
$T'_3 = T_3 = 100N$
Για την τροχαλία: $\Sigma\tau = 0$ ή $T_2R = T_3r$ ή
$T_2 = 50N$, $T'_2 = T_2 = 50N$




Για τη ράβδο: $\Sigma\tau_{(A)} = 0$ ή

$-w_1\frac{\ell}{2} + T_1\eta\mu\varphi\frac{\ell}{4} = 0$ (1) ή $T_1 = 200N$

α$_2$) Για την τροχαλία:
$\Sigma F_x = 0$ ή $F_x = T_2 = 50N$
$\Sigma F_y = 0$ ή $F_y = T_3 + w_{\tau\rho} = 200N$

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \simeq 206{,}15N$

α$_3$) Για τη ράβδο:
$\Sigma F_x = 0$ ή $F_{\alpha_x} - T_1\sigma\upsilon\nu\varphi + T'_2 = 0$ ή $F_{\alpha_x} = 123{,}2N$
$\Sigma F_y = 0$ ή $F_{\alpha_y} - T_1\eta\mu\varphi + w_1 = 0$ ή $F_{\alpha_y} = 50N$

$F_\alpha = \sqrt{F^2_{\alpha_x} + F^2_{\alpha_y}} \simeq 132{,}96N$

Β. Όταν κοπεί το νήμα (2), όπως φαίνεται από τη σχέση (1), η τάση του νήματος (1) δε μεταβάλλεται, άρα $\pi_1\% = 0$.
$F'_{\alpha_x} = T_1\sigma\upsilon\nu\varphi = 100\sqrt{3}\,N$ και $F'_{\alpha_y} = F_{\alpha_y} = 50N$

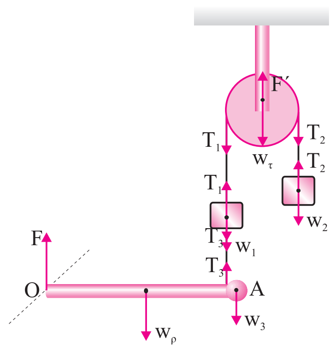
$F'_\alpha = \sqrt{F'^2_{\alpha_x} + F'^2_{\alpha_y}} \simeq 180{,}28N$

$\pi_2\% = \frac{F'_\alpha - F_\alpha}{F_\alpha}100\% \simeq 35{,}59\%$

**4.81** α) Για τη ράβδο:

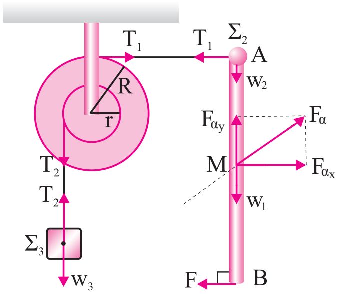
$\Sigma\tau_{(O)} = 0$ ή $W_\rho\frac{\ell}{2} + w_3\ell = T_3\ell$ ή $T_3 = 60N$

Για το Σ$_1$: $w_1 + T_3 = T_1$ ή $T_1 = 80N$
Για την τροχαλία: $T_1R - T_2R = 0$ ή $T_1 = T_2 = 80N$
Για το Σ$_2$: $w_2 = T_2 = 80N$ και $m_2 = 8kg$
β) Για τη ράβδο: $F + T_3 = w_\rho + w_3$ ή $F = 30N$




**4.82** α) Για το Σ$_3$: $w_3 = T_2$ (1)
Για την τροχαλία: $T_2r = T_1R$ ή $T_2 = 2T_1$ (2)
Για τη ράβδο:

$\Sigma\tau_{(M)} = 0$ ή $T_1\frac{\ell}{2} = \frac{F\ell}{2}$ ή $T_1 = F$ (3)




Από (1), (2), (3): $w_3 = 2F$ ή $m_3 = 10kg$

β) $\Sigma F_x = 0$ ή $F_{\alpha_x} = F + T_1 = 100N$

$\Sigma F_y = 0$ ή $F_{\alpha_y} = w_1 + w_2 = 80N$

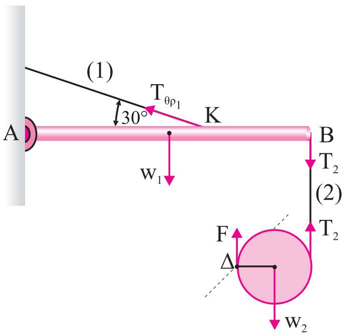
$F_\alpha = \sqrt{F_{\alpha_x}^2 + F_{\alpha_y}^2}$ ή $F_\alpha = 128,06N$

**4.83** α) Για την ισορροπία του δίσκου:

$\Sigma\tau_{(\Delta)} = 0$ ή $T_2 2R = w_2 R$ ή $T_2 = 50N$

β) Για την ισορροπία της ράβδου:

$\Sigma\tau_{(A)} = 0$ ή $w_1\frac{\ell}{2} + T_2\ell = T_{\theta\rho_1}\eta\mu 30^\circ x$ ή $x = 0,8m$

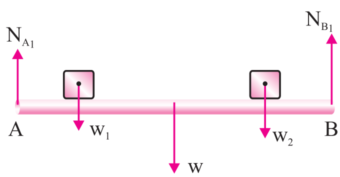



γ) $\Sigma F_y = 0$ ή $F + T_2 = w_2$ ή $F = 50N$

## Προβλήματα

**4.84** α) $\Sigma\tau_{(B)} = w_2\frac{L}{5} + w\frac{L}{2} + w_1\left(L - \frac{L}{6}\right) - N_{A_1}L = 0$

ή $N_{A_1} = 373,33N$

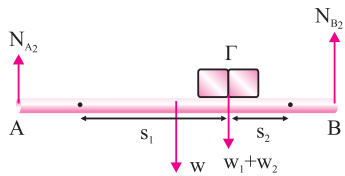



$\Sigma F_y = 0$ ή $w_1 + w + w_2 - N_{A_1} - N_{B_1} = 0$ ή

$N_{B_1} = 426,67N$

Λόγω δράσης – αντίδρασης οι δυνάμεις που δέχονται τα στηρίγματα από τη γέφυρα είναι $N'_{A_1} = 373,33N$ και $N'_{B_1} = 426,67N$.

β) $s_1 = υ_1 t$ και $s_2 = υ_2 t$ ή $s_1 = 3,75υ_2 t$ ή $s_1 = 3,75s_2$




$$s_1 + s_2 = L - \left(\frac{L}{5} + \frac{L}{6}\right) = \frac{19L}{30}$$

$$3,75s_2 + s_2 = \frac{19L}{30} \text{ ή } 4,75s_2 = \frac{19L}{30} \text{ ή}$$

$$s_2 = \frac{4L}{30} \text{ ή } ΓB = \frac{4L}{30} + \frac{L}{5} = \frac{L}{3}$$

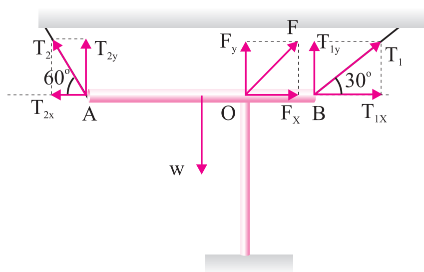
$$\Sigma\tau_{(B)} = 0 \text{ ή } (w_1 + w_2)\frac{L}{3} + w\frac{L}{2} - N_{A_2}L = 0 \text{ ή}$$

$N_{A_2} = 350N$ και $N'_{A_2} = 350N$

$\Sigma F_y = 0$ ή $w + w_1 + w_2 - N_{A_2} - N_{B_2} = 0$ ή

$N_{B_2} = 450\ N$ και $N'_{B_2} = 450N$

**4.85**




$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \text{ ή } -T_{2y}\frac{2L}{3} + w\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3}\right) + T_{1y}\frac{L}{3} = 0 \text{ ή}$$

$$-T_2\eta\mu 60^\circ\frac{2L}{3} + w\frac{L}{6} + T_1\eta\mu 30^\circ\frac{L}{3} = 0 \text{ και για}$$

$$T_2 = T_{\theta\rho_2} = 100\sqrt{3}N : T_1 = 200N$$

$\Sigma F_x = 0$ ή $T_{1x} - T_{2x} + F_x = 0$ ή $F_x = -50\sqrt{3}N$

$\Sigma F_y = 0$ ή $w - T_{1y} - T_{2y} - F_y = 0$ ή $F_y = 150N$

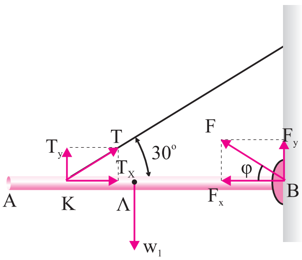
$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 173{,}2N$

Λόγω δράσης – αντίδρασης: $F' = 173{,}2N$

**4.86** $\Sigma\tau_{(B)} = 0$ ή

$w_1\left(L - \dfrac{2L}{5}\right) - T\eta\mu30^\circ\left(L - \dfrac{L}{3}\right) = 0$

ή $T = 180N$



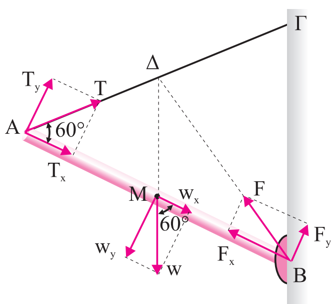

$\Sigma F_x = 0$ ή $T\sigma\upsilon\nu30^\circ = F_x$ ή $F_x = 90\sqrt{3}N$

$\Sigma F_y = 0$ ή $w_1 - T\eta\mu30^\circ - F_y = 0$ ή $F_y = 10N$

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 156{,}2N$

$\varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{F_y}{F_x} = 0{,}06$

**4.87** α) ΜΔ // ΓΒ και Μ μέσο του ΑΒ, άρα ο φορέας του βάρους w διέρχεται από το Δ.




Επειδή στη ράβδο ασκούνται τρεις δυνάμεις που δεν είναι παράλληλες μεταξύ τους, η F διέρχεται επίσης από το Δ (βλέπε παρατηρήσεις).

β) $\Sigma\tau_{(B)} = 0$ ή $-T_yL + w_y\dfrac{L}{2} = 0$ ή

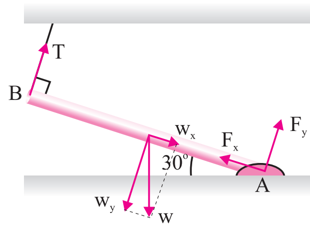
$w\eta\mu60^\circ\dfrac{L}{2} = T\eta\mu60^\circ L$ ή $T = \dfrac{w}{2} = 200N$

$\Sigma F_x = 0$ ή $T_x + w_x = F_x$ ή

$T\sigma\upsilon\nu60^\circ + w\sigma\upsilon\nu60^\circ = F\sigma\upsilon\nu30^\circ$ ή $F = 200\sqrt{3}N$

**4.88** $\Sigma\tau_{(A)} = 0$ ή $w\sigma\upsilon\nu30^\circ\dfrac{L}{2} - TL = 0$ ή

$w = 400N$




$\Sigma F_x = 0$ ή $w_x = F_x$ ή $F_x = w\eta\mu30^\circ = 200N$

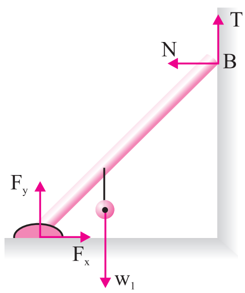
$\Sigma F_y = 0$ ή $w_y - T - F_y = 0$ ή $F_y = 100\sqrt{3}N$

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 264{,}57N$

**4.89** $\Sigma\tau_{(A)} = 0$ ή

$-w_1\dfrac{L}{4}\sigma\upsilon\nu45^\circ + TL\sigma\upsilon\nu45^\circ + NL\eta\mu45^\circ = 0$

$-\dfrac{w_1}{4} + \mu_sN + N = 0$ ή $N = 22{,}32N$




$T = \mu_sN \simeq 2{,}68N$

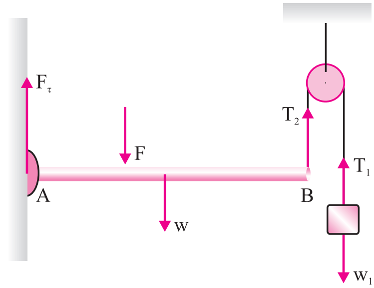
$\Sigma F_x = 0$ ή $F_x = N = 22{,}32N$

$\Sigma F_y = 0$ ή $w_1 - T - F_y = 0$ ή $F_y = 97{,}32N$

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \simeq 99{,}85N$

**4.90** α) $w_1 = T_1$ και $T_1 = T_2 = 400N$

$\Sigma\tau_{(A)} = 0$ ή $-F\dfrac{L}{3} - w\dfrac{L}{2} + T_2L = 0$ ή $F = 900N$

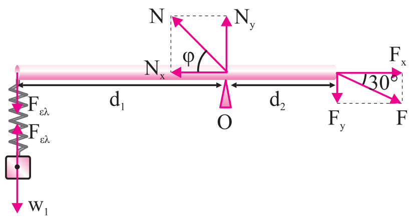



β) $\Sigma F_y = 0$ ή $F + w - T_2 - F_τ = 0$ ή $F_τ = 700N$

**4.91** α) $\Sigma τ_{(O)} = 0$ ή $-F_y d_2 + F_{ελ} d_1 = 0$ ή

$$F_{ελ} = F_y \frac{d_2}{d_1} = Fημ30^\circ \frac{d_2}{d_1} = 80N$$

$w_1 = F_{ελ} = 80N$




β) $F_{ελ} = kx$ ή $x = 0,2m$

γ) $\Sigma F_x = 0$ ή $N_x = F_x = Fσυν30^\circ = 100\sqrt{3}N$ και

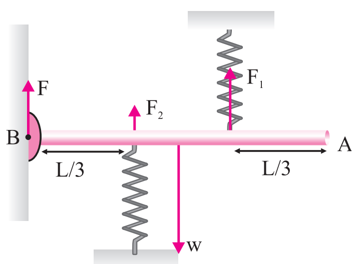
$\Sigma F_y = 0$ ή $F_y + F_{ελ} = N_y$ ή $N_y = 180N$

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = 249,8N$$

$$εφφ = \frac{N_y}{N_x} = 0,6\sqrt{3}$$

**4.92** $\Sigma τ_{(B)} = 0$ ή $F_2 \frac{L}{3} - w\frac{L}{2} + F_1 \frac{2L}{3} = 0$ ή

$$F_2 + 2F_1 = \frac{3w}{2} \quad (1)$$




$F_2 = k_2 Δx_2$

$F_1 = k_1 Δx_1 = 2k_2 2Δx_2 = 4k_2 Δx_2 = 4F_2 \quad (2)$

Από (1) και (2): $9F_2 = \frac{3w}{2}$ ή $F_2 = \frac{w}{6}$ και

$$F_1 = \frac{2w}{3}$$

$\Sigma F_y = 0$ ή $w - F_1 - F_2 - F = 0$ ή $F = \frac{w}{6}$

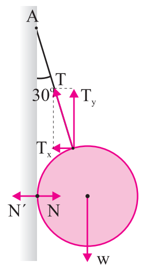
**4.93** $\Sigma F_y = 0$ ή $w = T_y = Tσυν30^\circ$

ή $T = 200\sqrt{3}N$

$\Sigma F_x = 0$ ή $N = T_x = Tημ30^\circ =$

$= 100\sqrt{3}N$

$N' = N = 100\sqrt{3}N$ (δράση – αντίδραση)

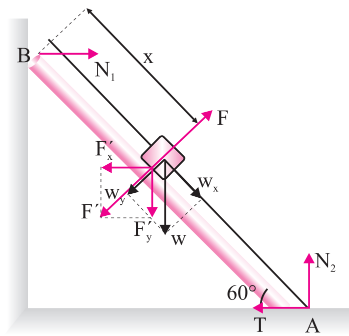



**4.94** α$_1$) Για το σώμα:

$\Sigma F_y = 0$ ή $F = wσυν60^\circ$ ή $F = 30N$

Η ράβδος δέχεται από το σώμα δύναμη:

$F' = F = 30N$




Για τη ράβδο:

$\Sigma F_y = 0$ ή $N_2 = F'συν60^\circ = 15N$

$\Sigma F_x = 0$ ή $N_1 = F'_x + T = F'ημ60^\circ + μ_s N_2$ ή

$$N_1 = \frac{105\sqrt{3}}{6}N = 17,5\sqrt{3}N$$

α$_2$) $\Sigma τ_{(A)} = 0$ ή $N_1 Lημ60^\circ = F'(L - x)$ ή

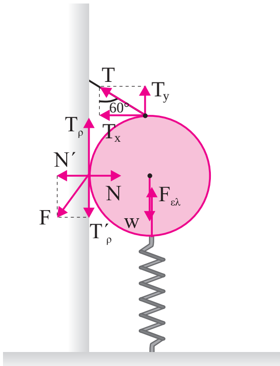
$N_1\sqrt{3} = 6(10 - x) \quad (1)$

Από τη σχέση (1): $x = 1{,}25m$
Β. Για το σώμα: $\Sigma F_x = m\alpha$

$w\eta\mu 60^\circ = m\alpha$ ή $\alpha = 5\sqrt{3}\,m/s^2$

$$x = \frac{1}{2}\alpha t^2 \text{ ή } t = \sqrt{\frac{2x}{\alpha}} \simeq 0{,}54\,s$$

**4.95** $\Sigma F_x = 0$ ή $T_x = N$ ή $T\eta\mu 60^\circ = N$ (1)
$\Sigma F_y = 0$ ή $w = T_y + F_{\varepsilon\lambda} + T_\rho$ ή
$w = T\sigma\upsilon\nu 60^\circ + k\Delta x + \mu_s N$ (2)




Από (1) και (2):
$w = T\sigma\upsilon\nu 60^\circ + k\Delta x + \mu_s T\eta\mu 60^\circ$ ή

$$T = \frac{w - k\Delta x}{\sigma\upsilon\nu 60^\circ + \mu_s \eta\mu 60^\circ} = 148{,}54N$$

$$N' = N = 128{,}64N$$

$$F = \sqrt{N'^2 + T_\rho'^2} = \sqrt{N'^2 + (\mu_s N')^2} = 131{,}18N$$

**4.96** α) $\Sigma\tau_{(\Gamma)} = 0$ ή

$$-w_2\frac{4L}{9} + w\left(\frac{L}{2} - \frac{4L}{9}\right) + N\frac{5L}{9} = 0 \quad \text{ή } N = 80N$$

β) Για το $m_1$: $\Sigma F = 0$ ή $w_1 = N' + F_{\varepsilon\lambda}$ και, επειδή $N' = N$, έχουμε $F_{\varepsilon\lambda} = 120N$, δηλαδή το ελατήριο είναι επιμηκυμένο.
$F_{\varepsilon\lambda} = kx$ ή $x = 0{,}2m$

**4.97** $\Sigma\tau_{(O)} = 0$ ή

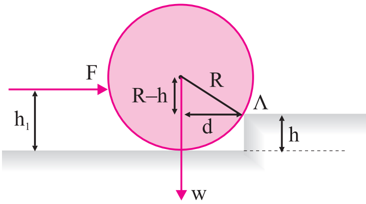
$$w_1\frac{L_1}{2}\eta\mu\varphi - w_2\frac{L_2}{2}\eta\mu\left(90^\circ - \varphi\right) = 0$$

$$w_1\frac{L_1}{2}\eta\mu\varphi = 2w_1\frac{2L_1}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi \text{ ή } \varepsilon\varphi\varphi = 4$$

**4.98** Για να υπερπηδήσει ο τροχός το εμπόδιο, πρέπει $|\tau_{F_{(\Lambda)}}| > |\tau_{w_{(\Lambda)}}|$ ή $F(h_1 - h) > wd$ (1)

$$h_1 - h = \frac{2R}{3} - \frac{R}{3} = \frac{R}{3} \qquad (2)$$

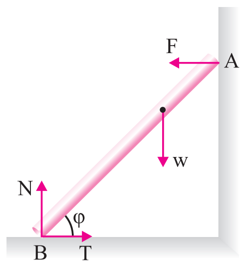
$$R^2 = (R-h)^2 + d^2 \text{ ή } d = \frac{R\sqrt{5}}{3} \qquad (3)$$




Από (1), (2), (3):

$\frac{2w}{5}\frac{R}{3} > \frac{wR\sqrt{5}}{3}$ άτοπο, άρα ο τροχός δε θα υπερπηδήσει το εμπόδιο.

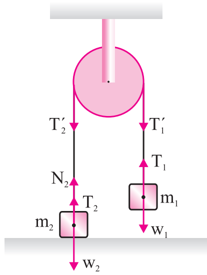
**4.99** $\Sigma F_x = 0$ ή $F = T = \mu_s N$ (1)
$\Sigma F_y = 0$ ή $w = N$ (2)




$\Sigma\tau_{(B)} = 0$ ή $w\frac{2L}{3}\sigma\upsilon\nu\varphi = FL\eta\mu\varphi$ και λόγω των (1) και (2): $N\frac{2L}{3}\sigma\upsilon\nu\varphi = \mu_s NL\eta\mu\varphi$ ή

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } \varphi = 30^\circ$$

**4.100** Το σύστημα ισορροπεί, άρα:
Σώμα $m_1$: $w_1 = T_1$ (1)
Σώμα $m_2$: $w_2 = T_2 + N_2$ (2)




Τροχαλία: $T_1'R = T_2'R$ ή $T_1' = T_2'$

Επειδή το νήμα είναι αβαρές, $T_1 = T_1'$ και $T_2 = T_2'$. Επομένως: $w_2 = w_1 + N_2$ ή $N_2 = 200N$

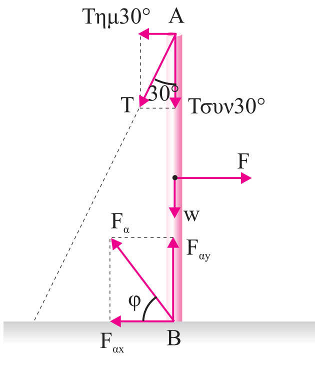
**4.101** $\Sigma\tau_{(B)} = 0$ ή $F\dfrac{L}{2} = T\eta\mu30°L$ ή $T = 100N$

$\Sigma F_x = 0$ ή $T\eta\mu30° + F_{\alpha_x} = F$ ή $F_{\alpha_x} = 50N$

$\Sigma F_y = 0$ ή $T\sigma\upsilon\nu30° + w = F_{\alpha_y}$ ή $F_{\alpha_y} = 100\sqrt{3}N$

$$F_\alpha = \sqrt{F_{\alpha_x}^2 + F_{\alpha_y}^2} = 180,28N$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{F_{\alpha_y}}{F_{\alpha_x}} = 2\sqrt{3}$$




**4.102** α) Για το σώμα $\Sigma_3$: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $w_3 = T_1$

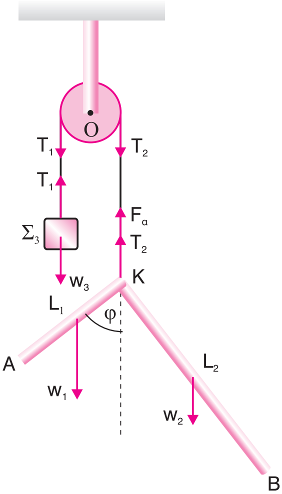
Για την τροχαλία: $\Sigma\tau_{(O)} = 0$ ή $T_1R = T_2R$ ή

$T_2 = T_1 = w_3$

Για το σύστημα των ράβδων: $\Sigma\vec{F}_y = 0$ ή

$F_\alpha + T_2 = w_1 + w_2$ ή

$F_\alpha = w_1 + w_2 - w_3 = 2w\sqrt{3}$



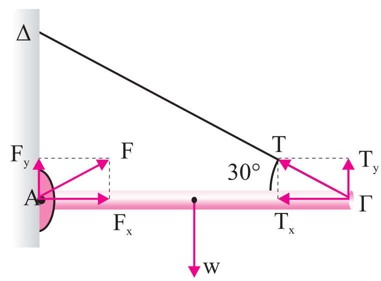

β) $\Sigma\tau_{(K)} = 0$ ή $w_1\dfrac{L_1}{2}\eta\mu\varphi = w_2\dfrac{L_2}{2}\eta\mu(90° - \varphi)$ ή

$2w\sqrt{3}\dfrac{L_1}{2}\eta\mu\varphi = wL_1\sigma\upsilon\nu\varphi$ ή $\varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ή

$\varphi = \dfrac{\pi}{6}rad$

**4.103** $\Sigma\tau_{(A)} = 0$ ή $-w\dfrac{\ell}{2} + T_y\ell = 0$ ή

$w\dfrac{\ell}{2} = T\eta\mu30°\ell$ ή $T = 30N$



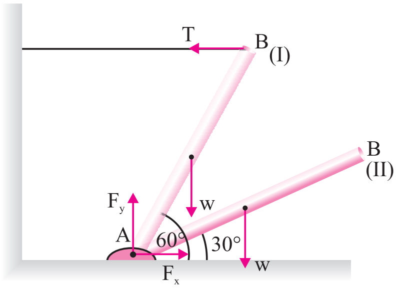

$\Sigma F_y = 0$ ή $F_y + T_y = w$ ή $F_y = 15N$

$\Sigma F_x = 0$ ή $T_x = F_x$ ή $F_x = T\sigma\upsilon\nu30° = 15\sqrt{3}N$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 30N$$

**4.104** $\Sigma\tau_{(A)} = 0$ ή $T\ell\eta\mu60° = w\dfrac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu60°$ ή

$T = 5\sqrt{3}N$




$\Sigma F_x = 0$ ή $F_x = T = 5\sqrt{3}N$

$\Sigma F_y = 0$ ή $F_y = w = 30N$

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 31{,}22N$

**4.105** Για τη ράβδο έχουμε:

$\Sigma\tau_{(O)} = 0$ ή $w_2 ημ30^\circ \frac{\ell}{2} = F_2 \ell$ ή $F_2 = F = 10N$

$\Sigma F_x = 0$ ή $T + w_2 συν30^\circ = F_{\alpha_x}$ (1)

$\Sigma F_y = 0$ ή $F_2 + F_{\alpha_y} = w_2 ημ30^\circ$ ή $F_{\alpha_y} = 10N$

Για τον δακτύλιο έχουμε:

$\Sigma F_x = 0$ ή $F_1 = T_x + T_\sigma$ ή $F_1 = Tημ30^\circ + T_\sigma$ (2)

$\Sigma F_y = 0$ ή $N + Tσυν30^\circ = w_1$ (3)

$\Sigma\tau_{(K)} = 0$ ή $T_\sigma R = Tημ30^\circ R$ ή $T_\sigma = \frac{T}{2}$ (4)

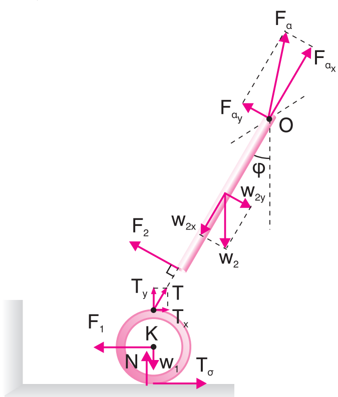
Από (2) και (4) προκύπτει:

$T = 10N$ και $T_\sigma = 5N$

Από την (1) έχουμε: $F_{\alpha_x} = 44{,}6N$

Από την (3) έχουμε: $N = 1{,}35N$

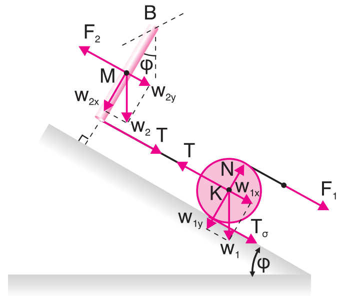
Άρα: $F_\alpha = \sqrt{F_{\alpha_x}^2 + F_{\alpha_y}^2} \simeq 45{,}7N$




**4.106** Για τον δίσκο έχουμε:

$\Sigma\tau_{(K)} = 0$ ή $-F_1 R + T_\sigma R = 0$ ή $T_\sigma = F_1 = 5N$

$\Sigma F_x = 0$ ή $w_{1_x} + T_\sigma + F_1 = T$ ή $T = 20N$




β) Για τη ράβδο έχουμε:

$\Sigma\tau_{(B)} = 0$ ή $T\ell + w_{2y}\frac{\ell}{2} = F_2 \frac{\ell}{2}$ ή $F_2 = 50N$

**4.107** Για την τροχαλία ισχύουν:

$\Sigma\tau_{(K)} = 0$ ή $T_1 R - T_2 r = 0$ ή $T_2 = 2T_1$

$\Sigma F_y = 0$ ή $T_1 + T_2 = w_1$ ή $T_1 = 10N$, άρα:

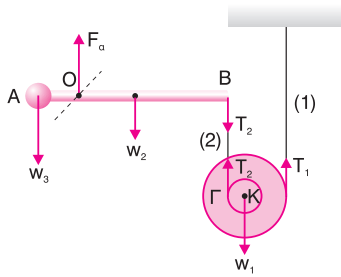
$T_2 = 20N$

Για το σύστημα ράβδος-σώμα $\Sigma_3$ έχουμε:

$\Sigma\tau_{(O)} = 0$ ή $w_3 \frac{\ell}{4} - w_2 \frac{\ell}{4} - T_2 \frac{3\ell}{4} = 0$ ή

$m_3 = 10kg$

$\Sigma F_y = 0$ ή $F_\alpha = w_3 + w_2 + T_2 = 160N$



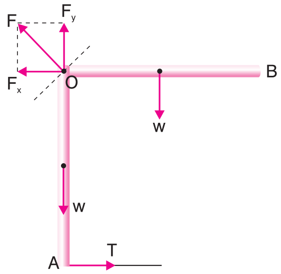

**4.108** $\Sigma\tau_{(O)} = 0$ ή $T\ell - w\frac{\ell}{2} = 0$ ή

$T = \frac{w}{2} = 5N$

$\Sigma F_x = 0$ ή $F_x = T = 5N$

$\Sigma F_y = 0$ ή $F_y = 2w = 20N$

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 5\sqrt{17}N$



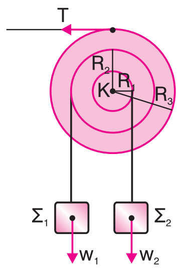

β) Για το σύστημα τροχαλία-$Σ_1$-$Σ_2$ έχουμε:

$Στ_{(K)} = 0$ ή $TR_3 + w_1R_2 - w_2R_1 = 0$ ή

$$w_2 = \frac{TR_3 + w_1R_2}{R_1} = \frac{3TR + 2w_1R}{R} =$$

$= 3T + 2w_1 = 35N$

Άρα: $m_2 = \dfrac{w_2}{g} = 3{,}5kg$

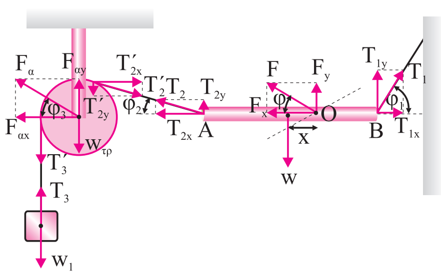



**4.109** α) Για το Σ: $T_3 = w_1 = 100N$

$T'_3 = T_3 = 100N$

Η τροχαλία είναι ακίνητη:

$T'_2 = T'_3 = 100N$ και $T_2 = T'_2 = 100N$



β) Για την τροχαλία:

$ΣF_x = 0$ ή $F_{α_x} = T'_{2x} = T'_2συνφ_2 = 50\sqrt{3}\,N$

$ΣF_y = 0$ ή

$F_{α_y} = T'_{2y} + T'_3 + w_{τρ} = T'_2ημφ_2 + w_1 + w_{τρ} =$ 200N

$F_α = \sqrt{F^2_{α_x} + F^2_{α_y}} = 218N$ και

$$εφφ_3 = \frac{F_{α_y}}{F_{α_x}} = 1{,}33\sqrt{3}$$

γ) Έστω ότι το κέντρο μάζας της ράβδου απέχει x από το σημείο O, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Για τη ράβδο: $Στ_{(O)} = 0$ ή

$T_2ημφ_2(AO) = wx + T_1ημφ_1(OB)$ ή $x = -0{,}5$ m, επομένως το κέντρο μάζας βρίσκεται δεξιά από το O και απέχει από το άκρο B απόσταση:

$d = OB - |x| = 0{,}5m$

δ) Για τη ράβδο: $ΣF_x = 0$ ή $F_x + T_{2x} = T_{1x}$ ή

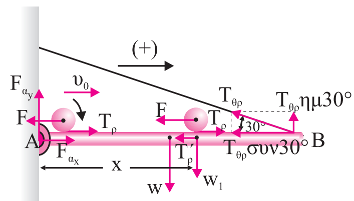
$F_x = 50\sqrt{3}\,N$

$ΣF_y = 0$ ή $F_y + T_{2y} + T_{1y} = w$ ή $F_y = 50N$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 100N,\ εφφ = \frac{F_y}{F_x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } φ = 30^\circ$$

**4.110** α) Έστω ότι ο δίσκος σταματά σε απόσταση x από το άκρο A.

$Στ_{(A)} = 0$ ή $w\dfrac{\ell}{2} + w_1x = T_{θρ}ημ30^\circ\ell$ ή $x = 2m$



β) $υ_{cm} = υ_0 - |α_{cm}|t$ και για $υ_{cm} = 0$: $t = \dfrac{υ_0}{|α_{cm}|}$

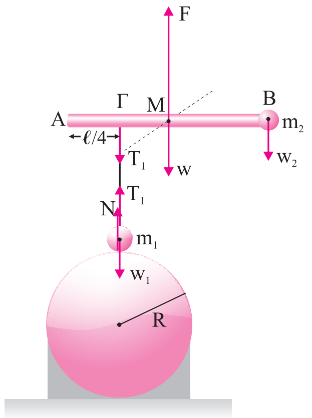
$x = υ_0t - \dfrac{1}{2}|α_{cm}|t^2$ και για $t = \dfrac{υ_0}{|α_{cm}|}$ : $x = \dfrac{υ_0^2}{2|α_{cm}|}$ ή

$|α_{cm}| = \dfrac{1}{4}m/s^2$

**4.111** α) Για τη ράβδο: $\Sigma\tau_{(M)} = 0$ ή $T_1\frac{\ell}{4} = w_2\frac{\ell}{2}$

ή $T_1 = 20N$

β) Για τη σφαίρα $\Sigma_1$: $T_1 + N = w_1$ ή $N = 20N$




γ) $\Sigma F = 0$ ή $F = T_1 + w + w_2 = 120N$

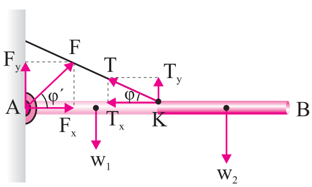
**4.112** α) $\Sigma\tau_{(A)} = 0$ ή $w_1\frac{L}{4} + w_2\frac{3L}{4} = T\eta\mu 30^\circ\frac{L}{2}$

ή $T = 40N$

β) $\Sigma F_x = 0$ ή $T_x = F_x = T\sigma\upsilon\nu 30^\circ = 20\sqrt{3}N$

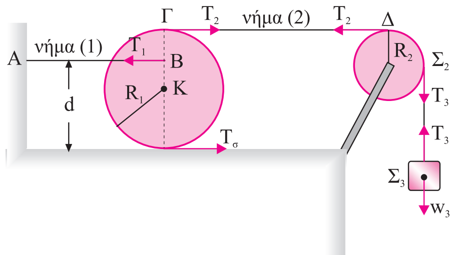
$\Sigma F_y = 0$ ή $w_1 + w_2 = T\eta\mu 30^\circ + F_y$ ή $F_y = 10N$

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 10\sqrt{13}N$, $\varepsilon\varphi\varphi' = \frac{F_y}{F_x} = \frac{\sqrt{3}}{6}$




**4.113** Για το σώμα $\Sigma_3$:

$\Sigma\vec{F} = 0$ ή $T_3 = M_3g$ ή $T_3 = 10N$




Για την τροχαλία:

$\Sigma\vec{\tau} = 0$ ή $-T_3R_2 + T_2R_2 = 0$ ή $T_2 = T_3 = 10N$

Για τον δίσκο:

$\Sigma\vec{F} = 0$ ή $T_2 + T_\sigma = T_1$ ή $T_\sigma = T_1 - T_2$ (1)

$\Sigma\vec{\tau}_{(K)} = 0$ ή $-T_2R_1 + T_1(d - R_1) + T_\sigma R_1 = 0$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$T_1 = \frac{40}{3}N$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

# ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

## Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

5.6γ, 5.7δ, 5.8γ, 5.9β, 5.10α, 5.11δ, 5.12β, 5.13α, 5.14β, 5.15α, 5.16β, 5.17γ, 5.18γ, 5.19γ, 5.20β, 5.21δ, 5.22δ, 5.23δ, 5.24γ, 5.25α, 5.26β, 5.27γ

## Ερωτήσεις κατανόησης

**5.28** γ: $L = L_1 + L_2$ ή $L = m_1\omega d^2 + m_2\omega(2d)^2$

ή $L = m\omega d^2 + 16m\omega d^2$ ή $L = 17m\omega d^2$

**5.29** β: $L_{(A)} = m_2\omega d^2 = 2m\omega d^2$ (1)

$L_{(B)} = m_1\omega d^2 = m\omega d^2$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$L_{(A)} \neq L_{(B)}$

**5.30** α: Από το διάγραμμα $L = f(t)$ έχουμε:

$L_2 = 2L_1$ ή $m\omega_2 r^2 = 2m\omega_1 r^2$ ή $\omega_2 = 2\omega_1$

$\alpha_{\kappa_1} = \omega_1^2 r$ και $\alpha_{\kappa_2} = \omega_2^2 r$

Επομένως: $\frac{\alpha_{\kappa_2}}{\alpha_{\kappa_1}} = \frac{\omega_2^2 r}{\omega_1^2 r} = \frac{(2\omega_1)^2}{\omega_1^2} = \frac{4\omega_1^2}{\omega_1^2}$ ή $\alpha_{\kappa_2} = 4\alpha_{\kappa_1}$

**5.31** γ: $AK = \frac{\alpha}{2}$, επομένως:

$L = L_1 + L_2 + L_3$ ή

$L = m_1\omega(AK)^2 + m_2\omega(BK)^2 + m_3\omega(\Gamma K)^2$ ή

$L = m\omega\frac{\alpha^2}{4} + m\omega\frac{\alpha^2}{4} + m\omega\frac{\alpha^2}{4}$ ή $L = \frac{3m\alpha^2}{4}\omega$

**5.32** α: $L = m\omega r^2 = m\left(\omega_0 - \left|\alpha_{\gamma\omega\nu}\right| t\right) r^2$ ή

$L = m\omega_0 r^2 - m\left|\alpha_{\gamma\omega\nu}\right| t r^2$ (1)

Από το διάγραμμα έχουμε για t = 0s:

$L = 0{,}1 kg \cdot m^2/s$

Επομένως, η σχέση (1) γίνεται:

$0{,}1 = 1 \cdot \omega_0 \cdot 10^{-2}$ ή $\omega_0 = 10 rad/s$

Για t = 1s έχουμε:

L = 0, άρα η σχέση (1) γίνεται:

$m\omega_0 r^2 = m\left|\alpha_{\gamma\omega\nu}\right| t r^2$ ή $\omega_0 = \left|\alpha_{\gamma\omega\nu}\right| t$ ή

$\left|\alpha_{\gamma\omega\nu}\right| = \frac{\omega_0}{t}$ ή $\left|\alpha_{\gamma\omega\nu}\right| = 10 rad/s^2$

**5.33** β: $L_1 = m_1\omega r_1^2$ (1) και $L_2 = m_2\omega r_2^2$ (2)

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$\frac{L_1}{L_2} = \frac{m_1\omega r_1^2}{m_2\omega r_2^2}$ ή $\frac{L_1}{L_2} = \frac{2m_2\left(\frac{R}{2}\right)^2}{m_2\left(\frac{3R}{4}\right)^2}$ ή

$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\frac{R^2}{2}}{\frac{9R^2}{16}}$ ή $\frac{L_1}{L_2} = \frac{8}{9}$

**5.34** γ: $L_1 = m_1\omega\left(R - d_1\right)^2$ ή $L_1 = m_1\omega\left(\frac{2R}{3}\right)^2$ ή

$L_1 = \frac{4}{9}m_1\omega R^2$

$L_2 = m_2\omega\left(R - d_2\right)^2$ ή $L_2 = m_2\omega\left(\frac{3R}{4}\right)^2$ ή

$L_2 = \frac{9}{16}m_2\omega R^2$

Επομένως:

$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\frac{4}{9}m_1\omega R^2}{\frac{9}{16}m_2\omega R^2} = \frac{64m_1}{81 \cdot 2m_1} = \frac{32}{81}$ ή $L_1 = \frac{32}{81}L_2$

**5.35** α: $\theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2$

Από το διάγραμμα θ = f(t) έχουμε για t = 4s:

θ = 16rad

Επομένως:

$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2\theta}{t^2}$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 2 rad/s^2$

Τη χρονική στιγμή t = 2s έχουμε:

$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu}t$ ή $\omega = 4 rad/s$ και

$L = m\omega r^2$ ή $L = 4 kg \cdot m^2/s$

**5.36** γ: $\theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2$

Για $t_1 = 1s$ : $\theta_1 = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t_1^2$ ή $\theta_1 = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}$

Για $t_2 = 2s$ : $\theta_2 = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t_2^2$ ή $\theta_2 = 2\alpha_{\gamma\omega\nu}$

$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ ή $\Delta\theta = \frac{3}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}$

$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$ ή $N = \frac{3\alpha_{\gamma\omega\nu}}{4\pi}$ (1)

Για $t_2 = 2s$ : $L = m\omega r^2 = m\alpha_{\gamma\omega\nu}t_2 r^2$ ή

$L = 2m\alpha_{\gamma\omega\nu}r^2$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$N = \frac{3L}{8\pi m r^2}$

**5.37** α: $L = L_1 + L_2$ ή $L = m_1\omega r_1^2 + m_2\omega r_2^2$ ή

$L = m_1\omega\left(\frac{\ell}{3}\right)^2 + m_2\omega\left(\frac{2\ell}{3}\right)^2$ ή

$L = m_1\omega\frac{\ell^2}{9} + 3m_1\omega\frac{4\ell^2}{9}$ ή $L = \frac{13}{9}m_1\omega\ell^2$ (1)

$L' = L_1' + L_2'$ ή $L' = m_1\omega\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_2\omega\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$ ή

$L' = m_1\omega\frac{\ell^2}{4} + 3m_1\omega\frac{\ell^2}{4}$ ή $L' = m_1\omega\ell^2$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$L = \frac{13}{9}L'$

**5.38** α: $\left|\tau_{F_1}\right| = \left|\dfrac{dL}{dt}\right|_1 = \dfrac{\left|0 - L_1\right|}{t} = \dfrac{L_1}{t} = \dfrac{m\omega_1 r_1^2}{t}$ (1)

Ομοίως: $\left|\tau_{F_2}\right| = \dfrac{m\omega_2 r_2^2}{t}$ (2)

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{\left|\tau_{F_1}\right|}{\left|\tau_{F_2}\right|} = \frac{\dfrac{m\omega_1 r_1^2}{t}}{\dfrac{m\omega_2 r_2^2}{t}} = \frac{\omega_1 r_1^2}{\omega_2 r_2^2} = \frac{4\omega_2 r_1^2}{\omega_2 (2r_1)^2} = 1 \quad ή$$

$$\left|\tau_{F_1}\right| = \left|\tau_{F_2}\right|$$

**5.39** β: $\left|\tau_{F_1}\right| = \left|\dfrac{dL}{dt}\right|_1 = \dfrac{\left|0 - L_1\right|}{t_1} = \dfrac{L_1}{t_1}$ και ομοίως:

$$\left|\tau_{F_2}\right| = \frac{L_2}{t_2}$$

$$\left|\tau_{F_1}\right| = \left|\tau_{F_2}\right| \; ή \; \frac{L_1}{t_1} = \frac{L_2}{t_2} \; ή \; \frac{t_1}{t_2} = \frac{L_1}{L_2} \; ή$$

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{m_1 \omega r_1^2}{m_2 \omega r_2^2} \; ή \; \frac{t_1}{t_2} = \frac{m_1 \omega (2r_2)^2}{2m_1 \omega r_2^2} \; ή \; \frac{t_1}{t_2} = 2$$

**5.40** α: Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} =$ σταθερό.

Άρα:

$\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} =$ σταθερό και $L = m\omega r^2 =$ σταθερό

Επομένως $\dfrac{dL}{dt} = 0$.

**5.41** β: $\left(\dfrac{dL}{dt}\right)_1 = \dfrac{3L_1 - L_1}{t_1} = \dfrac{2L_1}{t_1}$

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_2 = \frac{4L_1 - 0}{t_1} = \frac{4L_1}{t_1} \; ή \; \left(\frac{dL}{dt}\right)_2 = 2\left(\frac{dL}{dt}\right)_1$$

**5.42** α: $L_{αρχ} = L_{τελ}$ ή $2m\omega\ell^2 = 2m\omega'\dfrac{\ell^2}{4}$ ή

$\omega' = 4\omega$

Άρα: $\pi_\omega \% = \dfrac{\omega' - \omega}{\omega} 100\% = 300\%$

**5.43** γ: $L_1 = L_2$ ή $m\upsilon_1 r_1 = m\upsilon_2 r_2$ ή

$\upsilon_1 r_1 = \upsilon_2 r_2$ ή $4\upsilon_2 r_1 = \upsilon_2 r_2$ ή $4r_1 = r_2$

## Ασκήσεις

**5.44** α) $L = L_1 + L_2 + L_3$ ή

$L = m_1\omega_1 r^2 - m_2\omega_2 r^2 + m_3\omega_3 r^2$ ή

$L = m_1\omega_1 r^2 - 2m_1 \cdot 2\omega_1 r^2 + m_1 \cdot 5\omega_1 r^2$ ή $L = 2m_1\omega_1 r^2$

β) Εάν αλλάξει φορά περιστροφής το υλικό σημείο (1), έχουμε:

$L' = -m_1\omega_1 r^2 - 2m_1 \cdot 2\omega_1 r^2 + m_1 \cdot 5\omega_1 r^2 = 0$

γ) $L'' = L_1 + L_2 + L_3$ ή $L'' = m_1\omega_1 r^2 + 4m_1\omega_1 r^2 + 5m_1\omega_1 r^2$

ή $L'' = 10m_1\omega_1 r^2$

**5.45** α) $L = L_1 + L_2$ ή $L = m_1\omega_1 r^2 - m_2\omega_2 r^2$ ή

$$L = m_1\frac{2\pi}{T_1}r^2 - 4m_1\frac{2\pi}{T_2}r^2 = m_1\frac{2\pi}{T_1}r^2 - 4m_1\frac{2\pi}{8T_1}r^2 \quad ή$$

$$L = m_1\frac{\pi}{T_1}r^2$$

β) $L' = L_1' + L_2'$ ή $L' = m_1\omega_1 r^2 + m_2\omega_2 r^2$ ή

$$L' = m_1\frac{2\pi}{T_1}r^2 + 4m_1\frac{2\pi}{8T_1}r^2 \quad ή$$

$$L' = 3m_1\frac{\pi}{T_1}r^2 \; ή \; L' = 3L$$

$$\pi_L \% = \frac{L' - L}{L}100\% = \frac{3L - L}{L}100\% = 200\%$$

**5.46** α) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 1s$ έχουμε:

$L = m\omega_0 r^2$ ή $L = 10kg \cdot m^2/s$

β) $\omega_4 = \omega_0 + \alpha_{γων}\left(t_4 - t_2\right)$ ή $\omega_4 = 48rad/s$

$L_4 = m\omega_4 r^2$ ή $L_4 = 12kg \cdot m^2/s$

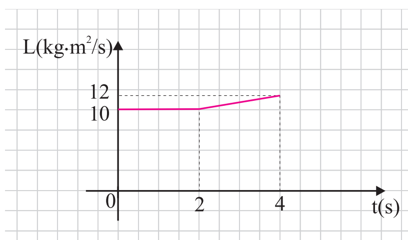
γ) Από $t_0 = 0s$ έως $t_2 = 2s$ : $L = 10kg \cdot m^2/s$

Από $t_2 = 2s$ έως $t_4 = 4s$ :

$L = mr^2\left[\omega_0 + \alpha_{γων}\left(t - t_2\right)\right]$ ή $L = 8 + t$ (SI)

Για $t_2 = 2s$ : $L_2 = 10kg \cdot m^2/s$

Για $t_4 = 4s$ : $L_4 = 12kg \cdot m^2/s$



**5.47** α) $ΓΑ^2 = α^2 + α^2$ ή $ΓΑ^2 = 2α^2$ ή $ΓΑ = α\sqrt{2}$

$L_{(A)} = L_{1(A)} + L_{2(A)} + L_{3(A)} + L_{4(A)}$ ή

$L_{(A)} = m_1 ω \cdot 0 + m_2 ωα^2 + m_3 ω \cdot 2α^2 + m_4 ωα^2$ ή

$L_{(A)} = 4mωα^2$ ή $L_{(A)} = 40 kg \cdot m^2 / s$

β) $AO = BO = ΓO = ΔO = \frac{ΓA}{2} = \frac{α\sqrt{2}}{2}$ ή

$AO^2 = BO^2 = ΓO^2 = ΔO^2 = \frac{2α^2}{4} = \frac{α^2}{2}$

$L_{(O)} = L_{1(O)} + L_{2(O)} + L_{3(O)} + L_{4(O)}$ ή $L_{(O)} = 4mω\frac{α^2}{2}$ ή

$L_{(O)} = 2mωα^2$ ή $L_{(O)} = 20 kg \cdot m^2 / s$

**5.48** α) $L_{(B)} = L_{1(B)} + L_{2(B)} + L_{3(B)}$ ή

$L_{(B)} = m_A ω (AB)^2 + m_B ω \cdot 0 + m_Γ ω (ΓB)^2$ ή

$L_{(B)} = m_A ωα^2 + m_Γ ωα^2$ ή $L_{(B)} = 150 kg \cdot m^2 / s$

β) $AΔ^2 = AΓ^2 - ΔΓ^2$ ή $AΔ^2 = α^2 - \frac{α^2}{4}$ ή

$AΔ^2 = \frac{3α^2}{4}$ ή $AΔ = \frac{α\sqrt{3}}{2}$

$AO = BO = ΓO = \frac{2}{3}AΔ = \frac{2}{3}\frac{α\sqrt{3}}{2} = \frac{α\sqrt{3}}{3}$

$L_{(O)} = L_{1(O)} + L_{2(O)} + L_{3(O)}$ ή

$L_{(O)} = m_A ω \left(\frac{α\sqrt{3}}{3}\right)^2 + m_B ω \left(\frac{α\sqrt{3}}{3}\right)^2 + m_Γ ω \left(\frac{α\sqrt{3}}{3}\right)^2$ ή

$L_{(O)} = m_A ω \frac{α^2}{3} + m_B ω \frac{α^2}{3} + m_Γ ω \frac{α^2}{3}$ ή

$L_{(O)} = \frac{ωα^2}{3}(m_A + m_B + m_Γ)$ ή $L_{(O)} = 70 kg \cdot m^2 / s$

**5.49** α) $L = mωr^2$, επομένως:

$L_5 = mω_5 r^2 = 40 kg \cdot m^2 / s$

Για $t_{15} = 15s$: $α_{γων_2} = \frac{Δω}{Δt} = \frac{20 rad / s}{10 s} = 2 rad / s^2$

και $ω_{15} = ω_{10} + α_{γων_2}(t_{15} - t_{10})$ ή $ω_{15} = 50 rad / s$

$L_{15} = mω_{15} r^2 = 50 kg \cdot m^2 / s$

Για $t_{25} = 25s$: $α_{γων_3} = \frac{Δω}{Δt} = -\frac{60 rad / s}{10 s} = -6 rad / s^2$

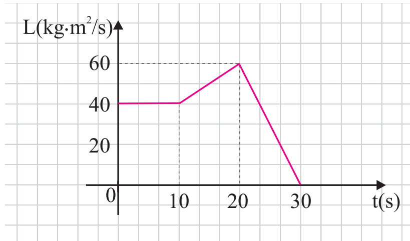
και $ω_{25} = ω_{20} - |α_{γων_3}|(t_{25} - t_{20})$ ή $ω_{25} = 30 rad / s$

$L_{25} = mω_{25} r^2 = 30 kg \cdot m^2 / s$

β) Για $t_{10} = 10s$: $L_{10} = mω_{10} r^2 = 40 kg \cdot m^2 / s$

Για $t_{20} = 20s$: $L_{20} = mω_{20} r^2 = 60 kg \cdot m^2 / s$

Για $t_{30} = 30s$: $ω_{30} = 0$ και $L_{30} = 0$




γ) Από $t_0 = 0s$ έως $t_{10} = 10s$, άρα και για $t_6 = 6s$,

ισχύει: $\frac{dL}{dt} = 0$

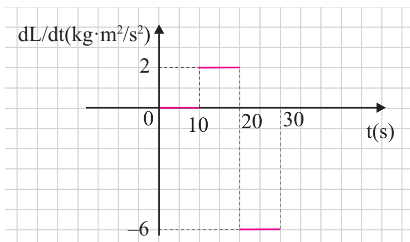
Από $t_{10} = 10s$ έως $t_{20} = 20s$, άρα και για $t_{12} = 12s$,

ισχύει: $\frac{dL}{dt} = \frac{L_{20} - L_{10}}{t_{20} - t_{10}} = \frac{20 kg \cdot m^2 / s}{10 s} = 2 kg \cdot m^2 / s^2$

Από $t_{20} = 20s$ έως $t_{30} = 30s$, άρα και για $t_{23} = 23s$,

ισχύει: $\frac{dL}{dt} = \frac{L_{30} - L_{20}}{t_{30} - t_{20}} = \frac{-60 kg \cdot m^2 / s}{10 s} = -6 kg \cdot m^2 / s^2$

δ)




## Προβλήματα

**5.50** α) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για το σφαιρίδιο μεταξύ της οριζόντιας και της κατακόρυφης θέσης.

$mg\ell = \frac{1}{2}mu^2$ ή $u = \sqrt{2g\ell}$ ή $u = 3 m / s$

$u = ω\ell$ ή $ω = \frac{u}{\ell}$ ή $ω = \frac{20}{3} rad / s$

β) $ω' = 0{,}8ω$, άρα: $ΔL = |L_{τελ} - L_{αρχ}| =$

$= |-mω'\ell^2 - mω\ell^2| = |-0{,}8mω\ell^2 - mω\ell^2| = 1{,}8mω\ell^2$

ή $ΔL = 2{,}43 kg \cdot m^2 / s$

γ) $Στ = \frac{ΔL}{Δt}$ ή $Στ = 24{,}3 N \cdot m$

**5.51** Α. $L=L_1+L_2=m_1\omega_1 d_A^2+m_2\omega_1 d_B^2=$

$=m\omega_1\frac{R^2}{16}+m\omega_1\frac{R^2}{64}=\frac{5m\omega_1R^2}{64}$

β$_1$) $L_{αρχ}=L_{τελ}$ ή $\frac{5m\omega_1R^2}{64}=m_1\omega_2\cdot 0+m_2\omega_2\frac{R^2}{16}$ ή

$\frac{5m\omega_1R^2}{64}=\frac{m\omega_2R^2}{16}$ ή $\omega_1=\frac{4}{5}\omega_2$

β$_2$) $L_2=m\omega_1\frac{R^2}{64}$ και $L_2'=m\omega_2\frac{R^2}{16}$

Επομένως: $\frac{L_2'}{L_2}=\frac{m\omega_2\frac{R^2}{16}}{m\omega_1\frac{R^2}{64}}=\frac{64\omega_2}{16\omega_1}=\frac{4\omega_2}{\frac{4}{5}\omega_2}=5$

β$_3$) $W_F=K_2-K_1$ ή $W_F=\frac{1}{2}mu_2^2-\frac{1}{2}mu_1^2$ ή

$W_F=\frac{1}{2}m\left(\omega_2^2\frac{R^2}{16}-\omega_1^2\frac{R^2}{64}\right)$ ή

$W_F=\frac{1}{2}m\frac{R^2}{16}\left(\frac{25}{16}\omega_1^2-\frac{1}{4}\omega_1^2\right)$ ή $W_F=\frac{21}{512}m\omega_1^2R^2$

**5.52** α$_1$) Έστω $υ_1$ η γραμμική ταχύτητα του σφαιριδίου στις καταστάσεις (1) και (2) αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της στροφορμής, έχουμε:

$L_{αρχ}=L_{τελ}$ ή $m\omega_1R_1^2=m\omega_2R_2^2$ ή $mυ_1R_1=mυ_2R_2$ ή

$\frac{υ_2}{υ_1}=\frac{R_1}{R_2}$ (1)

$F_2=64F_1$ ή $m\frac{υ_2^2}{R_2}=64m\frac{υ_1^2}{R_1}$ ή $\frac{υ_2^2}{υ_1^2}=64\frac{R_2}{R_1}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$\frac{R_1^2}{R_2^2}=64\frac{R_2}{R_1}$ ή $R_1^3=64R_2^3$ ή $R_1=4R_2$ (3)

α$_2$) $p_1R_1=p_2R_2$ ή $p_1\cdot 4R_2=p_2R_2$ ή $p_2=4p_1$

α$_3$) $\frac{α_{κ_1}}{α_{κ_2}}=\frac{\frac{F_1}{m}}{\frac{F_2}{m}}=\frac{F_1}{F_2}=\frac{F_1}{64F_1}=\frac{1}{64}$

Β. $W_F=K_2-K_1=\frac{1}{2}mυ_2^2-\frac{1}{2}mυ_1^2=\frac{1}{2}m\left(υ_2^2-υ_1^2\right)$ (4)

Από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει:

$\frac{υ_2}{υ_1}=\frac{4R_2}{R_2}$ ή $υ_2=4υ_1$ (5)

Από τις σχέσεις (4) και (5) έχουμε:

$W_F=\frac{1}{2}m\left(16υ_1^2-υ_1^2\right)=\frac{15}{2}mυ_1^2=\frac{15}{2}m\omega_1^2R_1^2$

**5.53** α$_1$) $L=L_1+L_2$ ή $L=m_1\omega\left(\frac{\ell}{2}\right)^2+m_2\omega\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$ ή

$L=\frac{1}{2}m\omega\ell^2$ ή $L=\frac{1}{2}m\frac{2\pi}{T}\ell^2$ ή $L=\frac{\pi}{T}m\ell^2$

α$_2$) $α_{κ_1}=\omega^2\frac{\ell}{2}=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{\ell}{2}=\frac{2\pi^2\ell}{T^2}$ και ομοίως:

$α_{κ_2}=\frac{2\pi^2\ell}{T^2}$

β$_1$) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής του συστήματος.

$L_{αρχ}=L_{τελ}$ ή $\frac{\pi}{T}m\ell^2=2m\omega'\left(\frac{\ell}{4}\right)^2$ ή

$\frac{\pi}{T}m\ell^2=\frac{1}{8}m\omega'\ell^2$ ή $\omega'=\frac{8\pi}{T}$

β$_2$) $\omega'=\frac{2\pi}{T'}$ ή $\frac{8\pi}{T}=\frac{2\pi}{T'}$ ή $T'=\frac{T}{4}$

$s=υ_{γρ_1}t+υ_{γρ_2}t$ ή $s=\omega'\frac{\ell}{4}\frac{T'}{4}+\omega'\frac{\ell}{4}\frac{T'}{4}$ ή

$s=\frac{\omega'\ell T'}{8}$ ή $s=\frac{\frac{8\pi}{T}\ell\frac{T}{4}}{8}$ ή $s=\frac{\pi\ell}{4}$

**5.54** α) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για το σφαιρίδιο $Σ_1$ μεταξύ των σημείων Α και Β:

$E_A=E_B$ ή $m_1g\ell=\frac{1}{2}m_1υ_1^2$ ή $υ_1=\sqrt{2g\ell}$ ή $υ_1=4m/s$

β) $\vec{L}_{αρχ}=\vec{L}_{τελ}$ ή $m_1υ_1\ell=\left(m_1+m_2\right)υ_σ\ell$ ή

$υ_σ=\frac{m_1υ_1}{m_1+m_2}$ ή $υ_σ=2m/s$

$\omega'=\frac{υ_σ}{\ell}$ ή $\omega'=2{,}5rad/s$

γ) $\pi_{L_1}\%=\frac{L_1'-L_1}{L_1}100\%=\frac{m_1υ_σ\ell-m_1υ_1\ell}{m_1υ_1\ell}100\%=$

$=\frac{υ_σ-υ_1}{υ_1}100\%=-50\%$

δ) $\Delta L_2 = L_2' - L_2$ ή $\Delta L_2 = L_2' = m_2 υ_σ \ell$ ή

$\Delta L_2 = 0{,}16 kg \cdot m^2 / s$

$Στ_2 = \dfrac{\Delta L_2}{\Delta t}$ ή $Στ_2 = 0{,}8 N \cdot m$

**5.55** α) $L = mω\left(\dfrac{R}{2}\right)^2 = m\dfrac{2π}{T}\dfrac{R^2}{4} = \dfrac{mπR^2}{2T}$

β) $L = L'$ ή $mω\dfrac{R^2}{4} = mω'\dfrac{R^2}{16}$ ή $ω' = 4ω$ ή $ω' = \dfrac{8π}{T}$

γ) $\dfrac{α_{κ_1}}{α_{κ_2}} = \dfrac{ω^2\dfrac{R}{2}}{ω'^2\dfrac{R}{4}} = \dfrac{2ω^2}{ω'^2} = \dfrac{2ω^2}{(4ω)^2} = \dfrac{1}{8}$ ή $α_{κ_2} = 8α_{κ_1}$

**5.56** α) $L_{αρχ} = L_1 + L_2$ ή $L_{αρχ} = m_1ωd_A^2 + m_2ωd_B^2$ ή

$L_{αρχ} = m_1ω\dfrac{R^2}{16} + m_2ω\dfrac{R^2}{9}$ ή $L_{αρχ} = 2{,}05 kg \cdot m^2 / s$

β) $L_{τελ} = L_{αρχ}$ ή $m_1ω'\dfrac{R^2}{4} + m_2ω'\dfrac{R^2}{4} = L_{αρχ}$ ή

$ω' = \dfrac{L_{αρχ}}{(m_1 + m_2)\dfrac{R^2}{4}}$ ή $ω' = 3{,}8 rad / s$

γ) $L_1 = m_1ωd_A^2$ ή $L_1 = 0{,}45 kg \cdot m^2 / s$

$L_1' = m_1ω'\dfrac{R^2}{4}$ ή $L_1' = 0{,}68 kg \cdot m^2 / s$

$π_{L_1}\% = \dfrac{L_1' - L_1}{L_1}100\%$ ή $π_{L_1}\% = 51{,}1\%$

**5.57** α) $L_A = m_Aω_0r_A^2$ ή $L_A = 2 kg \cdot m^2 / s$

β) $L_{αρχ} = L_{τελ}$ ή $L_A = L_A' + L_B' + L_Γ'$ ή

$L_A = m_Aωr_A^2 + m_Bωr_B^2 + m_Γωr_Γ^2$ ή

$ω = \dfrac{L_A}{m_Ar_A^2 + m_Br_B^2 + m_Γr_Γ^2}$ ή $ω = 10 rad / s$

γ) $L_A' = m_Aωr_A^2$ ή $L_A' = 0{,}2 kg \cdot m^2 / s$

$\Delta L_A = L_A' - L_A = -1{,}8 kg \cdot m^2 / s$ και

$Στ = \dfrac{\Delta L_A}{\Delta t}$ ή $Στ = -18 N \cdot m$

δ) $π_{L_A}\% = \dfrac{L_A' - L_A}{L_A}100\%$ ή $π_{L_A}\% = -90\%$

**5.58** α) $θ_1 = ω_1 t$ και $θ_2 = ω_2 t$

Επομένως: $θ_1 + θ_2 = (ω_1 + ω_2)t$ ή $\dfrac{2π}{3} = (ω_1 + ω_2)\dfrac{π}{15}$

ή $ω_1 + ω_2 = 10 rad / s$ (1)

$α_{κ_1} = 16α_{κ_2}$ ή $ω_1^2 r = 16ω_2^2 r$ ή $ω_1^2 = 16ω_2^2$ ή $ω_1 = 4ω_2$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$ω_2 = 2 rad / s$ και $ω_1 = 8 rad / s$

β) $\dfrac{L_1}{L_2} = \dfrac{m_1ω_1r^2}{m_2ω_2r^2}$ ή $\dfrac{L_1}{L_2} = \dfrac{m_1 \cdot 4ω_2}{4m_1 \cdot ω_2}$ ή $L_1 = L_2$

γ) $L_{αρχ} = L_{τελ}$ ή $L_1 - L_2 = L_{τελ}$ ή $L_{τελ} = 0$ ή

$(m_1 + m_2)ω_σ r^2 = 0$ ή $ω_σ = 0$, δηλαδή το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται αμέσως μετά τη σύγκρουση.

## 1ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ – ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ – ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ

### Θέμα 1ο

1β, 2β, 3γ, 4δ, 5: α-Λ, β-Λ, γ-Λ, δ-Λ, ε-Λ

### Θέμα 2ο

1α: $\left(υ_A = \dfrac{5}{3}υ_{cm},\ υ_B = \dfrac{1}{3}υ_{cm}\right)$

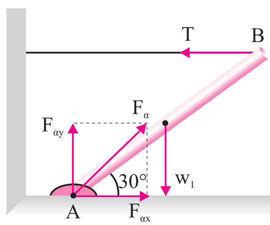
2γ: $\left(Στ_{(M)} = 0,\ τ_T + τ_{F_α} = 0\right)$

3β: $\left(α_{κ_1} = ω^2\dfrac{2R}{3},\ α_{κ_2} = ω^2\dfrac{3R}{4}\right)$

### Θέμα 3ο

α) $Στ_{(A)} = 0$ ή $w_1\dfrac{\ell}{2}συν30° = T\ell ημ30°$ ή

$T = 50\sqrt{3} N$




β) $ΣF_x = 0$ ή $F_{αx} = T = 50\sqrt{3} N$

$ΣF_y = 0$ ή $F_{αy} = w_1 = 100 N$

$F_α = \sqrt{F_{αx}^2 + F_{αy}^2} = 50\sqrt{7} N$

### Θέμα 4ο

α$_1$) $\upsilon_\Gamma = \upsilon_{cm} - \upsilon_{\gamma\rho} = \upsilon_{cm} - \omega\dfrac{R}{2} = \upsilon_{cm} - \dfrac{\upsilon_{cm}}{R}\dfrac{R}{2} =$

$= \dfrac{\upsilon_{cm}}{2}$ ή $\upsilon_{cm} = 2\upsilon_\Gamma = 10$m/s και

$\omega = \dfrac{\upsilon_{cm}}{R} = 20\,\text{rad/s}$

$\upsilon_{\gamma\rho_B} = \omega R = 10$m/s

α$_2$) $\alpha_{\kappa_A} = \dfrac{\upsilon_{\gamma\rho}^2}{R} = \omega^2 R = 200\,\text{m/s}^2$

β$_1$) Μέχρι τη στιγμή $t_1 = 2$s: $\theta_1 = \omega t_1 = 40$rad και

$N_1 = \dfrac{\theta_1}{2\pi} = \dfrac{20}{\pi}$ περιστροφές

Από τη στιγμή $t_1$ μέχρι να σταματήσει εκτελεί $N_2$ περιστροφές.

$N_2 = N_{o\lambda} - N_1 = \dfrac{12{,}5}{\pi}$ περιστροφές

$\theta_2 = 2\pi N_2 = 25$rad

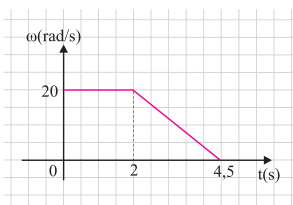
Αν σταματά τη στιγμή $t_2$:

$0 = \omega - |\alpha_{\gamma\omega\nu}|(t_2 - t_1)$ (1) και

$\theta_2 = \omega(t_2 - t_1) - \dfrac{1}{2}|\alpha_{\gamma\omega\nu}|(t_2 - t_1)^2$ (2)

Από (1) και (2): $\theta_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\omega^2}{|\alpha_{\gamma\omega\nu}|}$ ή $|\alpha_{\gamma\omega\nu}| = 8\text{rad/s}^2$

β$_2$) $t_2 - t_1 = \dfrac{\omega}{|\alpha_{\gamma\omega\nu}|}$ ή $t_2 = 4{,}5$s




## 2ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

### Θέμα 1ο

1α, 2δ, 3δ, 4α, 5: α-2, β-1, γ-3, δ-5, ε-6, στ-4

### Θέμα 2ο

1γ: $\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\epsilon\lambda}$ ή $m\upsilon_1 R_1 = m\upsilon_2 2R_1$ ή $\upsilon_2 = \dfrac{\upsilon_1}{2}$

$F_2 = m\dfrac{\upsilon_2^2}{R_2} = m\dfrac{\frac{\upsilon_1^2}{4}}{2R_1} = \dfrac{1}{8}m\dfrac{\upsilon_1^2}{R_1} = \dfrac{1}{8}F_1$

2γ: $\tau = Fd$ (ζεύγος δυνάμεων)

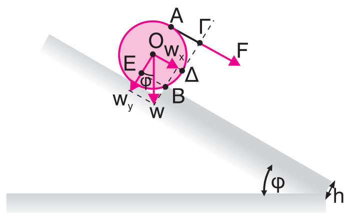
3α: Για να υπερπηδήσει ο δίσκος το εμπόδιο, πρέπει να ισχύει:

$\left|\tau_{F_{(B)}} + \tau_{w_{x(B)}}\right| > \left|\tau_{w_{y(B)}}\right|$ ή

$|F\cdot(B\Gamma) + w_x\cdot(B\Delta)| > |w_y\cdot(BE)|$ ή

$\left|\dfrac{mg\eta\mu\varphi}{8}\cdot 1{,}6R + mg\eta\mu\varphi\cdot 0{,}6R\right| > |mg\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot 0{,}8R|$

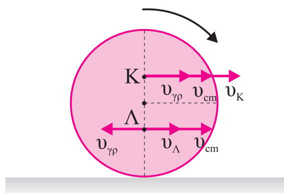
εφφ > 1 ή φ > 45$^o$




### Θέμα 3ο

α) $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{\alpha_{cm}}{R} = \dfrac{25}{3}\text{rad/s}^2$

β)




Για t = 2s: $\upsilon_{cm} = \alpha_{cm}t = 10$m/s

$\upsilon_K = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} = \upsilon_{cm} + \dfrac{\omega R}{3} = \dfrac{4\upsilon_{cm}}{3} = \dfrac{40}{3}\text{m/s}$

$\upsilon_\Lambda = \upsilon_{cm} - \upsilon_{\gamma\rho} = \upsilon_{cm} - \dfrac{\omega R}{3} = \dfrac{2\upsilon_{cm}}{3} = \dfrac{20}{3}\text{m/s}$

γ) Για t = 3s: $\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu}t = 25$rad/s

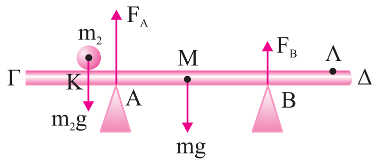
$\alpha_K = \alpha_\Lambda = \omega^2\dfrac{R}{3} = 125\,\text{m/s}^2$

**Θέμα 4ο**

Α. $\Sigma F = 0$ ή $F_A + F_B = mg + m_2 g$ ή $F_A + F_B = 70N$ (1)

$\Sigma\tau_A = 0$ ή $m_2 g(KA) - mg(MA) + F_B(BA) = 0$ ή $F_B = 10N$

Από (1): $F_A = 60N$




β$_1$) Η ράβδος είναι έτοιμη να ανατραπεί, όταν χάνει την επαφή με το στήριγμα στο σημείο Α. Έστω ότι αυτή τη στιγμή το $\Sigma_2$ βρίσκεται στο σημείο Λ.

$\Sigma\tau_{(B)} = 0$ ή $mg(MB) = m_2 g(B\Lambda)$ ή $B\Lambda = 0{,}75m$

β$_2$) $K\Lambda = 3m$ και $\upsilon_2' = \dfrac{K\Lambda}{t_1} = 1{,}2m/s$

Από ΑΔΜΕ για το $\Sigma_1$:

$\dfrac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = m_1 g\ell_1$ ή $\upsilon_1 = 6m/s$

Για την κρούση των $\Sigma_1$, $\Sigma_2$:

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_1\upsilon_1 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2'$ ή $\upsilon_1' = -3{,}6m/s$

β$_3$) $K_{αρχ} = \dfrac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = 9J$ ή

$K_{τελ} = \dfrac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \dfrac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = 6{,}12J$

$K_{αρχ} > K_{τελ}$, άρα η κρούση είναι ανελαστική.

β$_4$) $\dfrac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = m_1 gh$ ή $h = 0{,}648m$

# ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο

## ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

### Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

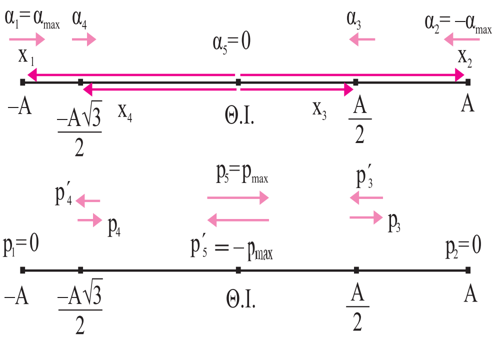
6.8γ, 6.9β, 6.10δ, 6.11γ, 6.12δ, 6.13α, 6.14γ, 6.15δ, 6.16α, 6.17β, 6.18β, 6.19δ, 6.20γ, 6.21γ, 6.22β, 6.23β, 6.24α, 6.25β, 6.26β, 6.27γ, 6.28δ, 6.29β, 6.30γ, 6.31δ, 6.32β, 6.33α, 6.34β

### Ερωτήσεις σωστού – λάθους

6.35Σ, 6.36Λ, 6.37Λ, 6.38Λ, 6.39Λ, 6.40Σ, 6.41Σ 6.42Λ, 6.43Σ, 6.44Λ, 6.45Λ, 6.46Σ, 6.47Λ, 6.48Λ, 6.49Λ, 6.50Σ, 6.51Σ, 6.52Σ, 6.53Λ, 6.54Λ, 6.55Σ

### Ασκήσεις

**6.56**




**6.57** $Α = Αημφ_0$, άρα $φ_0 = \frac{π}{2}$ rad

β) Σε χρόνο 2T διανύει 8A = 3,2m ή A = 0,4m

$f = \frac{N}{t}$ ή $f = \frac{10}{π}$Hz, άρα: $ω = 20$rad/s

$$x = 0{,}4ημ\left(20t + \frac{π}{2}\right) \quad SI$$

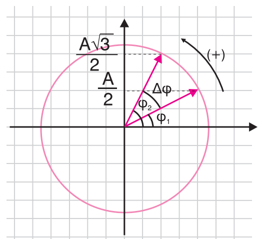
γ) $p = 16συν\left(20t + \frac{π}{2}\right)$ και για $t = \frac{π}{60}$s,

$p = -8\sqrt{3}$ kg · m/s

**6.58** α) Για t = 0: $0 = Αημφ_0$

και επειδή υ > 0 ισχύει: $φ_0 = 0$.

β)




Οι δύο ακραίες θέσεις απέχουν 2A = 0,2m ή A = 0,1m. Με χρήση του περιστρεφόμενου διανύσματος προκύπτει: $ημφ_1 = \frac{\frac{A}{2}}{A}$ ή $φ_1 = \frac{π}{6}$ rad

και $ημφ_2 = \frac{\frac{A\sqrt{3}}{2}}{A}$ ή $φ_2 = \frac{π}{3}$rad

$Δφ = φ_2 - φ_1 = ωΔt$ ή $ω = 40$rad/s

$$T = \frac{2π}{ω} = \frac{π}{20}s$$

γ) $α = -ω^2Αημ(ωt + φ_0) = -160ημ40t$

δ) Για $t = \frac{π}{120}$s: $x = 0{,}1\,ημ\frac{π}{3}$

ή $x = 0{,}05\sqrt{3}$m, $\frac{Δx}{Δt} = υ = 2$m/s και

$\frac{Δυ}{Δt} = α = -80\sqrt{3}$ m/s$^2$

**6.59** α) Από τη σχέση $\upsilon = f(t)$: $\varphi_0 = 0$, $\omega = \pi rad/s$

$\upsilon_{max} = 20 m/s$, άρα $A = \dfrac{20}{\pi} m$.

$x = \dfrac{20}{\pi} ημ\, \pi t$, άρα $x = 0$ για $t_1 = 0$ και $t_2 = 1s$.

β) $10\sqrt{3} = 20\, συν\, \pi t$, άρα $t_3 = \dfrac{1}{6} s$, $t_4 = \dfrac{11}{6} s$.

γ) Πρέπει $\upsilon = 0$ ή $συν\pi t = 0$, άρα $t_5 = 0{,}5 s$, $t_6 = 1{,}5 s$.

**6.60** α) Από $x = 0{,}1 ημ \dfrac{\pi}{4} t$ προκύπτει:

$A = 0{,}1$ m, $\omega = \dfrac{\pi}{4} rad/s$, $\varphi_0 = 0$

$\upsilon = \dfrac{\pi}{40} συν \dfrac{\pi}{4} t$ και για $t = 2s$: $\upsilon = 0$ και $p = 0$

$\alpha = -\dfrac{\pi^2}{160} ημ \dfrac{\pi}{4} t$ και για $t = 2s$: $\alpha = -\dfrac{1}{16} m/s^2$

β) $\alpha = -\omega^2 x$. Για $x = 0{,}08$m, $\alpha = -\dfrac{1}{20} m/s^2$

$\upsilon = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} = \pm 1{,}5\pi \cdot 10^{-2}$ m/s

**6.61** α) Από το διάγραμμα $\alpha = f(t)$: $A = 0{,}2$m

$\omega^2 A = \alpha_{max}$ ή $\omega = 40 rad/s$

Για $t = 0$: $0{,}2 = 0{,}2 ημ\varphi_0$

ή $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2} rad$

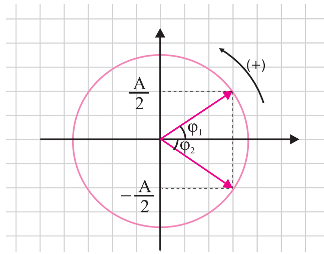
β) $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{\pi}{20} s$, άρα το σώμα κάνει δύο πλήρεις ταλαντώσεις σε χρόνο $2T = \dfrac{\pi}{10} s$.

γ) $\upsilon = 8 συν\left(40t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ SI

**6.62** α) Από το περιστρεφόμενο διάνυσμα προκύπτει:

$ημ\varphi_1 = \dfrac{\frac{A}{2}}{A}$ ή $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{6} rad$ και ομοίως

$\varphi_2 = \dfrac{\pi}{6} rad$.

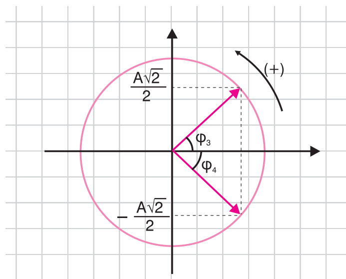



$\varphi_1 + \varphi_2 = \omega \Delta t$ ή $\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{T} \cdot \Delta t$ ή $T = \dfrac{2\pi}{5} s$

$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{5}{2\pi} Hz$

β) $ημ\varphi_3 = \dfrac{\frac{A\sqrt{2}}{2}}{A}$ ή $\varphi_3 = \dfrac{\pi}{4}$ rad και ομοίως

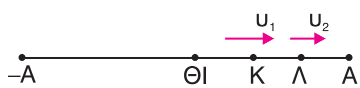
$\varphi_4 = \dfrac{\pi}{4}$ rad.




$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 5 rad/s$

$\Delta\varphi = \omega \Delta t_1$ ή $\Delta t_1 = \dfrac{\varphi_3 + \varphi_4}{\omega} = \dfrac{\pi}{10}$ s

γ) $\upsilon = \omega A συν\, \omega t$



Κ: $\omega A\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega A\sigma\upsilon\nu\omega t_1$, άρα $t_1 = \frac{\pi}{30}$ s

Λ: $\omega A\frac{\sqrt{2}}{2} = \omega A\sigma\upsilon\nu\omega t_2$, άρα $t_2 = \frac{\pi}{20}$ s

$\Delta t_2 = t_2 - t_1 = \frac{\pi}{60}$ s

**6.63** α) Για t = 0, x = 0 και υ > 0, άρα:

$\varphi_0 = 0$

$T = 0{,}2s$ και $\omega = \frac{2\pi}{T} = 10\pi\,rad/s$

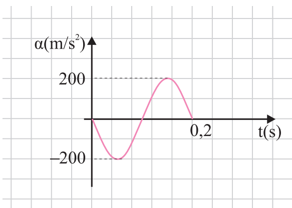
$4A = 0{,}8m$ ή $A = 0{,}2m$

υ=2πσυν10πt  SI

β) $\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$ και για $x = -0{,}1\sqrt{3}m$:

$\upsilon = \pm\pi\,m/s$

γ) $\alpha = -200\eta\mu 10\pi t$ SI

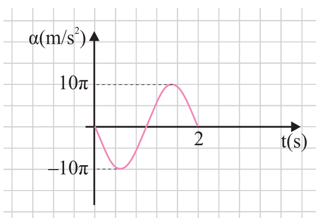



**6.64** α) Από το διάγραμμα $\upsilon = f(t)$ προκύπτει:

$T = 2s$, άρα $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\,rad/s$

$\upsilon_{max} = \omega A = 10\,m/s$ ή $A = \frac{10}{\pi}m$

$\varphi_0 = 0$, άρα: $\alpha = -\omega^2 A\eta\mu\omega t = -10\pi\eta\mu\pi t$ SI




β) Από τη σχέση $\alpha = \pm\omega\sqrt{\upsilon_{max}^2 - \upsilon^2}$, για

υ = 8m/s έχουμε: $\alpha = \pm 6\pi\,m/s^2$

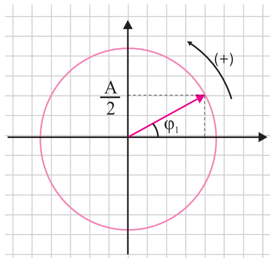
γ) $x = \frac{10}{\pi}\eta\mu\pi t$. Άρα, για $t = \frac{1}{6}s$: $x = \frac{5}{\pi}m$

**6.65** α) Από τις σχέσεις $\upsilon_1^2 = \omega^2\left(A^2 - x_1^2\right)$

και $\upsilon_2^2 = \omega^2\left(A^2 - x_2^2\right)$ προκύπτει: A = 0,2m

και $\omega = 10\,rad/s$

β)




$\eta\mu\varphi_1 = \frac{0{,}1}{0{,}2}$ ή $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$ rad

$\varphi_1 = \omega t$ ή $t = \frac{\pi}{60}$ s

γ) $\upsilon_{max} = \omega A = 2\,m/s$

**6.66** α) Από το διάγραμμα x = f(t) προκύπτουν:

$T = \frac{\pi}{10}s$, άρα $\omega = 20\,rad/s$

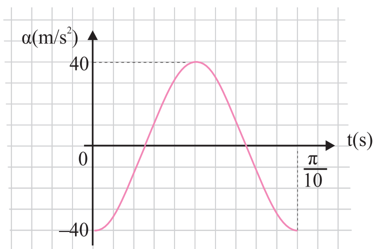
$A = 0{,}1m$, άρα $x = 0{,}1\eta\mu\left(20t + \varphi_0\right)$

και για t = 0, x = 0,1m, άρα 0,1 = 0,1ημ$\varphi_0$

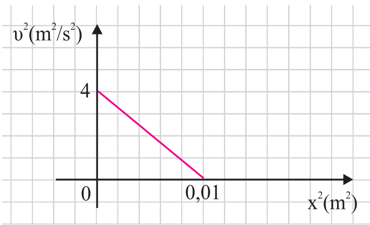
ή $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad.

$\upsilon = 2\sigma\upsilon\nu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI

β) $\alpha = -\omega^2 A\eta\mu\left(\omega t + \varphi_0\right) = -40\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI




γ) $\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$ ή




**6.67** α) Από τη σχέση

$$\alpha = -10\pi^2 \eta\mu\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right):$$

$$\omega = 10\pi \, rad/s, \text{ άρα } T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}2s$$

$$-10\pi^2 = -\omega^2 A \text{ ή } A{=}0{,}1m \text{ και } \varphi_0 = \frac{\pi}{2} rad$$

β) $x = 0{,}1\eta\mu\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI

$$\upsilon = \pi \, \sigma\upsilon\nu\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right), \text{ άρα:}$$

$$p = 2\pi \, \sigma\upsilon\nu\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad SI$$

γ) Για $t_1 = \frac{1}{20} = s : p = -2\pi kg \cdot m/s$

και για $t_2 = \frac{1}{10} s: \; p_2 = 0$

Άρα: $\Delta p = 2\pi \; kg \cdot m/s$

**6.68** α) Από τη σχέση $x = 0{,}4\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{2}\right)$

προκύπτουν: $A = 0{,}4m$, $\omega = \frac{\pi}{3} rad/s$,

άρα $T = 6s$ και $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} rad$

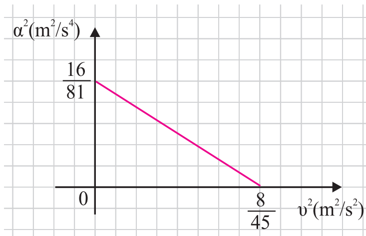
β) $\upsilon_{max} = \omega A = \frac{2\pi}{15} m/s$ και $\alpha_{max} = \omega^2 A = \frac{4}{9} m/s^2$

γ) $\upsilon = \frac{2\pi}{15}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI

$$\alpha = -\frac{4}{9}\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{2}\right) \quad SI$$

δ) Από τη σχέση $\alpha = \pm\omega\sqrt{\upsilon_{max}^2 - \upsilon^2}$ προκύπτει:

$$\alpha^2 = \frac{16}{81} - \frac{10}{9}\upsilon^2$$




**6.69** α) Όταν το σώμα βρίσκεται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης, έχει μέγιστη επιτάχυνση. Από το διάγραμμα α = f(t) προκύπτει ότι το σώμα βρίσκεται στις ακραίες θέσεις τις χρονικές στιγμές $t_1 = 0$ και $t_2 = 5s$.

β) Από το διάγραμμα α = f(t) προκύπτουν:

$$T = 10s, \text{ άρα } \omega = \frac{\pi}{5} rad/s, \; \varphi_0 = \frac{\pi}{2} rad$$

και $\alpha_{max} = \frac{\pi^2}{50} m/s^2$

$$\alpha_{max} = \omega^2 A \quad \text{ή} \quad A = 0{,}5m$$

$$\upsilon_{max} = \omega A = \frac{\pi}{10} m/s$$

γ) $x = 0{,}5\,\eta\mu\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI

$$\upsilon = \frac{\pi}{10}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right) \quad SI$$

**6.70** α) $T = \frac{\pi}{4}$s, άρα $\omega = \frac{2\pi}{T} = 8\text{rad/s}$

$\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

Για $x_K = 0{,}4\text{m} : \upsilon_K = \pm 2{,}4\,\text{m/s}$

και $p_K = m\upsilon_K = 9{,}6\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$

Για $x_\Lambda = 0{,}3\text{m},\ \upsilon_\Lambda = \pm 3{,}2\,\text{m/s}$

και $p_\Lambda = m\upsilon_\Lambda = 12{,}8\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$

β) $\alpha = -\omega^2 x$

$\alpha_K = -25{,}6\,\text{m/s}^2$ και $\alpha_\Lambda = -19{,}2\,\text{m/s}^2$

**6.71** α) $\alpha_1^2 = \omega^2\left(\upsilon_{max}^2 - \upsilon_1^2\right)$ (1) και

$\alpha_2^2 = \omega^2\left(\upsilon_{max}^2 - \upsilon_2^2\right)$ (2)

Από (1), (2) με διαίρεση κατά μέλη:

$\upsilon_{max} = 10\,\text{m/s}$ και $\omega = 100\,\text{rad/s}$

$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{50}{\pi}\text{Hz}$

Άρα, σε χρόνο $t = \pi s$ το σώμα εκτελεί

$N = f\cdot t = 50$ ταλαντώσεις.

β) $\upsilon_{max} = \omega A$ ή $A = 0{,}1\text{m}$

$\alpha_{max} = \omega^2 A = 10^3\,\text{m/s}^2$

**6.72** α) Η απόσταση που διανύει το σώμα είναι $d = 3A$ ή $A = 0{,}2\text{m}$.

$\alpha = -\alpha_{max}\eta\mu\left(\omega t + \varphi_0\right)$

Για $t = 0 : -20 = -20\eta\mu\varphi_0$ ή $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad

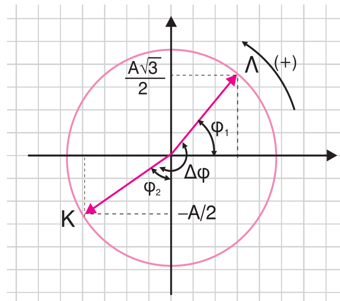
β) $\alpha_{max} = \omega^2 A$ ή $\omega = 10\,\text{rad/s}$ και

$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5}{\pi}\text{Hz}$

γ) $\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$ ή $\upsilon = 1\text{m/s}$

και $p = m\upsilon = 4\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$

**6.73** Για το Λ: $\eta\mu\varphi_1 = \dfrac{A\frac{\sqrt{3}}{2}}{A}$ ή $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}\text{rad}$




Για το σημείο Κ: $\sigma\upsilon\nu\varphi_2 = \dfrac{\frac{A}{2}}{A}$ ή $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ rad

Όταν το σώμα πηγαίνει από τη θέση Κ στη θέση Λ, το περιστρεφόμενο διάνυσμα διαγράφει γωνία Δφ.

$\Delta\varphi = \omega\Delta t$ ή $\varphi_2 + \frac{\pi}{2} + \varphi_1 = \omega\cdot t$

ή $\omega = \frac{\pi}{3}\text{rad/s}$, άρα $T = \frac{2\pi}{\omega} = 6\text{s}$

**6.74** $\upsilon_1 = \omega A\frac{\sqrt{3}}{2} = \upsilon_{max}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\pi\% = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{\upsilon_1}\cdot 100\%$ ή $\dfrac{\upsilon_2 - \upsilon_{max}\frac{\sqrt{3}}{2}}{\upsilon_{max}\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

ή $\upsilon_2 = \frac{\upsilon_{max}}{2}$

$\upsilon_2 = \upsilon_{max}\,\sigma\upsilon\nu\,\omega t_2$, άρα για $\upsilon_2 = \frac{\upsilon_{max}}{2}$ προκύπτει $\sigma\upsilon\nu\,\omega t_2 = \frac{1}{2}$ ή $t_2 = \frac{T}{6}$.

**6.75** Για $x = -\frac{A}{2}$: $-\frac{A}{2} = A\,\eta\mu\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

ή $t_1 = \frac{1}{15}$ s

Ομοίως: Για $x = -\frac{A\sqrt{3}}{2}$: $t_2 = \frac{1}{12}s$

**6.76** Από τη σχέση $x = f(t)$ προκύπτει:

$\omega = \frac{\pi}{10} rad/s$

$\alpha = -\omega^2 x$ και $\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

α) $\left|\frac{\alpha}{\upsilon}\right| = \frac{\pi}{10}\sqrt{3}\, s^{-1}$

β) $\left|\frac{\alpha}{\upsilon}\right| = \frac{\pi}{10} s^{-1}$ γ) $\left|\frac{\alpha}{\upsilon}\right| = \frac{\pi\sqrt{3}}{30} s^{-1}$

**6.77** Από τη σχέση $\upsilon = f(t)$ προκύπτει:

$\omega = 0{,}1\pi\, rad/s$ και $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} rad$

$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) = A\eta\mu\left(\frac{\pi t}{10} + \frac{\pi}{2}\right)$ SI

α) Για $x = -A : -A = A\eta\mu\left(\frac{\pi t}{10} + \frac{\pi}{2}\right)$ ή

$t_1 = 30s$ για δεύτερη φορά

β) Για $x = \frac{A}{2}$: $\frac{A}{2} = A\eta\mu\left(\frac{\pi t}{10} + \frac{\pi}{2}\right)$

ή $t_2 = \frac{50}{3} s$ για δεύτερη φορά

**6.78** Από το διάγραμμα προκύπτει:

$\varphi_1 = \omega_1 t$ ή $\omega_1 = 42\pi\, rad/s$ και

$\omega_2 = 54\pi\, rad/s$

$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 21Hz$ και $f_2 = 27Hz$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{N_1}{t}}{\frac{N_2}{t}} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{7}{9}$$

Τα σώματα βρίσκονται στην αρχική τους κατάσταση ταυτόχρονα, όταν το σώμα (1) έχει κάνει 7, 14, 21, ..., 7ν ταλαντώσεις και αντίστοιχα το σώμα (2) έχει κάνει 9, 18, 27, ..., 9ν ταλαντώσεις.

Για πρώτη φορά: $t_1 = 7 \cdot T_1 = 7\frac{1}{21}s = \frac{1}{3}s$

Για δεύτερη φορά: $t_2 = 14 \cdot T_1 = 14\frac{1}{21}s = \frac{2}{3}s$

# ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

## Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

6.88δ, 6.89γ, 6.90δ, 6.91γ, 6.92γ, 6.93γ, 6.94γ, 6.95δ, 6.96β, 6.97β, 6.98β, 6.99δ, 6.100β, 6.101α, 6.102γ, 6.103β, 6.104γ, 6.105δ, 6.106α, 6.107γ

## Ερωτήσεις σωστού – λάθους

6.108Λ, 6.109Σ, 6.110Σ, 6.111Σ, 6.112Λ, 6.113Λ, 6.114Λ, 6.115Λ, 6.116Σ, 6.117Σ, 6.118Σ, 6.119Λ, 6.120Σ, 6.121Σ, 6.122Σ, 6.123Σ, 6.124Λ

## Ασκήσεις

**6.125** α) $\upsilon_{max} = \omega A$ ή $\omega = 5 rad/s$

$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5}{2\pi} Hz$

β) $F_{max} = m\omega^2 A = 50N$

γ) $F = -m\omega^2 x$ ή $F = 25\sqrt{2}N$

**6.126** α) $F_{max} = DA = m\omega^2 A$ (1) και

$\upsilon_{max} = \omega A$ (2)

Από (1) και (2): A = 1m, $\omega = 10 rad/s$, άρα

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{5} s$

β) $F = -Dx = -10\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI

γ) $-5\sqrt{2} = -10\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$, άρα $t = \frac{\pi}{40}s$

**6.127** α) Για t = 0, x = +A, άρα $\Delta t = \frac{T}{2}$ ή

$T = \frac{\pi}{10}s$ και $\omega = \frac{2\pi}{T} = 20rad/s$

$D = k = m\omega^2 = 800N/m$

β) Για t = 0, x = +A, άρα:

$A = A\eta\mu\varphi_0$ ή $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}rad$

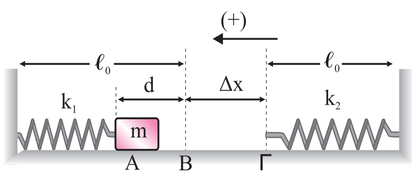
$x = 0{,}2\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI

γ) $F_{\varepsilon\pi} = -Dx = -160\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI

δ) $F_T = F_{\varepsilon\lambda} = F_{\varepsilon\pi}$ και για $t = \frac{\pi}{40}s : F_T = 0$

**6.128** $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} = \frac{\pi}{5}s$, $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 10rad/s$,

$A_1 = 0{,}1m$




$\upsilon_{max_1} = \omega_1 A_1 = 1m/s = \upsilon_{max_2}$

$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}} = \frac{\pi}{10}s$, $\omega_2 = 20rad/s$

α) Από τη θέση Α έως τη θέση Β: $t_1 = \frac{T_1}{4} = \frac{\pi}{20}s$

Από τη θέση Β έως τη θέση Γ: $t_2 = \frac{\Delta x}{\upsilon_{max_1}} = \frac{\pi}{10}s$

Η θέση Γ είναι η Θ.Ι. της ταλάντωσης του σώματος με το δεύτερο ελατήριο. Άρα, το σώμα επανέρχεται στη θέση Γ σε χρόνο

$t_3 = \frac{T_2}{2} = \frac{\pi}{20}s$. Η ταχύτητα στη Θ.Ι. είναι:

$\upsilon_{max_2} = \upsilon_{max_1} = 1m/s$

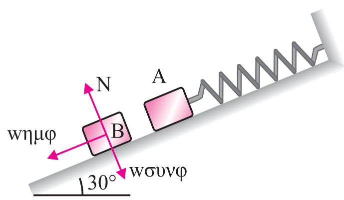
Από $\Gamma \rightarrow B : t_4 = \frac{\Delta x}{\upsilon_{max_2}} = \frac{\pi}{10}s$ και από

$B \rightarrow A : t_5 = \frac{T_1}{4} = \frac{\pi}{20}s$

Άρα: $t_{o\lambda} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = \frac{7\pi}{20}s$

β) $\upsilon_{max_2} = \omega_2 A_2$ ή $A_2 = 0{,}05m$

**6.129** α) Βλέπε βασική άσκηση 6.86: D = k



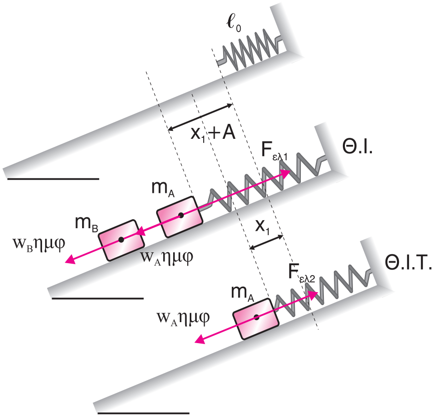

Για το σώμα Β: $w\eta\mu\varphi = m_B\alpha$ ή $\alpha = g\eta\mu\varphi$

$s = \frac{1}{2}g\eta\mu\varphi t^2$ ή $t = 4s$

Άρα: $2T_A = t$ ή $T_A = 2s$

β) $T_A = 2\pi\sqrt{\frac{m_A}{k}}$ ή $k = 20N/m$

γ) Θ.Ι.: $(m_A + m_B)g\eta\mu\varphi = F_{\varepsilon\lambda_1} = k(x_1 + A)$




Θ.Ι.Τ.: $m_A g ημφ = F_{ελ_2} = kx_1$

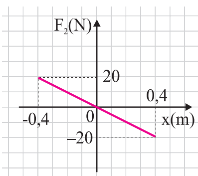
Άρα, Α = 0,5m, οπότε d = 8A = 4m.

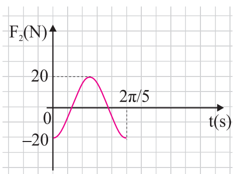
**6.130** α) Μελετάμε το σύστημα ως ενιαίο σώμα, οπότε D = k.

$$T = 2π\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}} = \frac{2π}{5}s \;\; \text{και} \;\; ω = \frac{2π}{T} = 5 rad/s$$

β) $F_2 = -m_2ω^2 x = -50x$ SI

$$x = 0{,}4ημ\left(5t + \frac{π}{2}\right), \text{άρα: } F_2 = -20ημ\left(5t+\frac{π}{2}\right) \text{ SI}$$



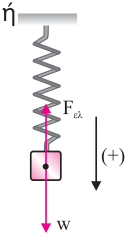

**6.131** α) Βλέπε βασική άσκηση 6.81: D = k

$$T = 2π\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{π}{4}s \;\; \text{και} \;\; ω = \frac{2π}{T} = 8 rad/s$$

β) $ΣF = -kx$ ή $w + F_{ελ} = -kx$ ή

$F_{ελ} = -100 - 640x$ με

$-0{,}5m \le x \le 0{,}5m$



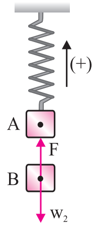

γ) $φ_0 = \frac{π}{2}$rad, άρα

$x = 0{,}5ημ\left(8t + \frac{π}{2}\right)$ και για

$t = \frac{π}{8}s : x = -0{,}5m$, άρα: $F_{ελ} = 220N$

**6.132** α) $x = 0{,}1ημ\left(2t + \frac{π}{2}\right)$,

άρα Α = 0,1 m και ω = 2 rad/s




$F - w_2 = -D_2 x$ ή

$F = w_2 - m_2ω^2 x$

ή F = 10 – 4x =

$= 10 - 4\left[0{,}1ημ\left(2t + \frac{π}{2}\right)\right] =$

$= 10 - 0{,}4ημ\left(2t + \frac{π}{2}\right)$ SI

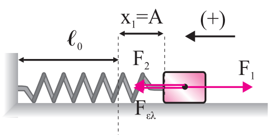
β) Για $t = \frac{π}{2}s$, $F = 10{,}4N$

γ) Για να είναι το νήμα τεντωμένο, πρέπει:

$F > 0$ ή $10 - 4x > 0$ ή $x < 2{,}5m$

Επειδή $A = 0{,}1m < 2{,}5m$, το νήμα δε χαλαρώνει ποτέ.

**6.133** α) $ΣF = 0$ ή $F_1 = F_2 + kx_1$ ή $x_1 = 0{,}1m$




β) Βλέπε βασική άσκηση 6.82: D = k

$$T = 2π\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{π}{5}s \;\; \text{και} \;\; ω = 10 rad/s$$

γ) $A = x_1 = 0{,}1m$ και $φ_0 = \frac{π}{2}$ rad, άρα

$$x = 0{,}1ημ\left(10t + \frac{π}{2}\right) \text{ SI}$$

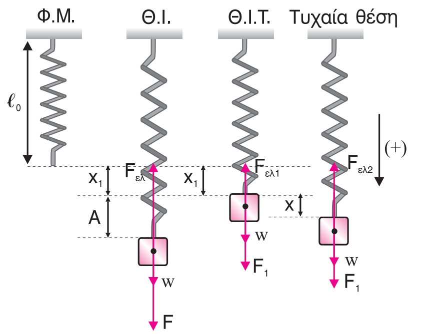
δ) $ΣF = -kx$ ή $F_1 - F_2 + F_{ελ} = -kx$ ή

$$F_{ελ} = -10 - 10ημ\left(10t + \frac{π}{2}\right) \text{ SI}$$

και για $t_1 = \frac{\pi}{20}s : F_{\varepsilon\lambda_1} = -10N$, για

$t_2 = \frac{\pi}{10}s : F_{\varepsilon\lambda_2} = 0$

**6.134** α) Θ.Ι.Τ.: $\Sigma F = 0$ ή $w + F_1 = kx_1$ (1)




Τυχαία θέση: $\Sigma F = w + F_1 - k(x_1 + x)$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2): $\Sigma F = -kx$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{15}s$$

β) Από σχέση (1) : $x_1 = \frac{15}{225}m$

Στη Θ.Ι.: $F + w = F_{\varepsilon\lambda_1} = k(A + x_1)$, άρα $A = \frac{1}{45}m$

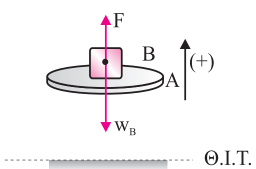
γ) $\Sigma F = -kx$ ή $F_1 + w + F_{\varepsilon\lambda} = -kx$

και για $x = \frac{1}{90}m : F_{\varepsilon\lambda} = -17{,}5N$

(φορά προς τα πάνω)

**6.135** α) $\omega = 2\pi f = \pi\, rad/s$

$D_B = m_B \cdot \omega^2 = 10N/m$




β) $\Sigma F_B = -D_B x$ ή $F - w_B = -D_B x$

ή $F = m_B g - D_B x = 10 - 10x$ SI

$F_1 = 9N$, $F_2 = 8N$, $F_3 = 12N$

γ) Χάνει επαφή, όταν F = 0, άρα x = 1m, οπότε ελάχιστο πλάτος $A_{min} = 1m$.

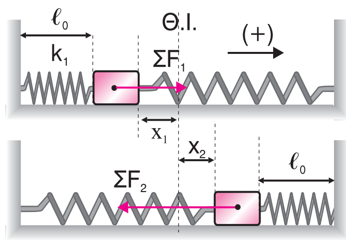
**6.136** Α. $\Sigma F = 0$ ή $k_1 x_1 = k_2 x_2$ ή $k_2 = 50N/m$

$\beta_1$) Βλέπε βασική άσκηση 6.80:

$D = k_1 + k_2 = 150N/m$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{\pi\sqrt{6}}{15}s$$

$\beta_2$)



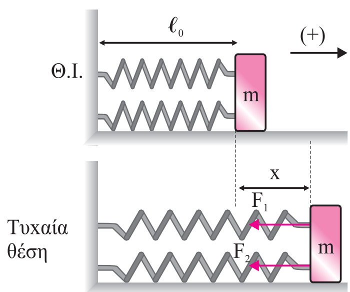

$$\Sigma F_1 = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = -(k_1 + k_2)(-x_1) = 15N$$

$$\Sigma F_2 = \frac{\Delta p_2}{\Delta t} = -(k_1 + k_2)x_2 = -30N$$

$\beta_3$) $\omega = \frac{2\pi}{T} = 5\sqrt{6}\, rad/s$

$u_{max} = \omega A = 3\sqrt{1{,}5}\, m/s$, $\alpha_{max} = \omega^2 A = 45m/s^2$

**6.137** α) $\Sigma F = -k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2)x$



$D = k_1 + k_2$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{\pi}{10}s$ και $\omega = \frac{2\pi}{T} = 20 rad/s$

β) Το σώμα ξεκινά από την ακραία θέση, άρα:

$A = 0,1m$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} rad$ και $x = 0,1ημ\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI

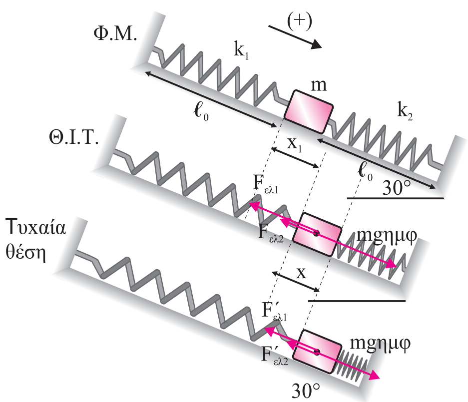
γ) $F_{τοιχ} = F_{ολ.ελ.} = F_{επ} = -Dx$

$F_{τοιχ} = -80ημ\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI

Για $t = t_1$: $F_1 = 80N$ και για $t = t_2$: $F_2 = 40\sqrt{2}N$

**6.138** α) Θ.Ι.Τ.: $\Sigma F = 0$ ή

$mgημφ = k_1x_1 + k_2x_1$ (1)




Τυχαία θέση:

$\Sigma F = mgημφ - k_1(x + x_1) - k_2(x + x_1)$ (2)

Από (1) και (2): $\Sigma F = -(k_1 + k_2)x$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{\pi}{5}s$ και $f = \frac{5}{\pi}Hz$

β) $\omega = 2\pi f = 10 rad/s$, $A = 0,4m$ και $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} rad$

$υ = 4συν\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI

γ) Για $t_1 = \frac{\pi}{60}s$, $p_1 = mυ_1 = -4kg \cdot m/s$

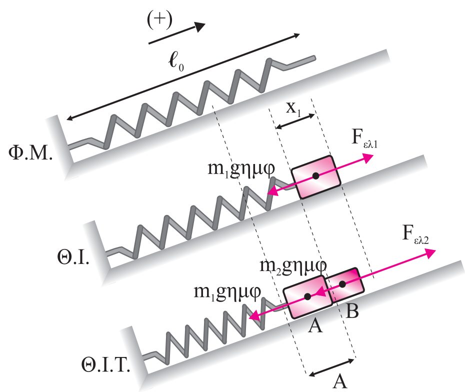
Για $t_2 = \frac{\pi}{30}s$: $p_2 = -4\sqrt{3}kg \cdot m/s$

$\Delta p = p_2 - p_1 = 4\left(1 - \sqrt{3}\right)kg \cdot m/s$

**6.139** α) Μελετάμε το σύστημα ως ενιαίο σώμα (βλέπε βασική άσκηση 6.86): D = k

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_{ολ}}{k}} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{5}s$ και $\omega = \frac{5\sqrt{2}}{2} rad/s$

β) Το σύστημα ξεκινάει την ταλάντωση από την ακραία θέση x = +A.




Θ.Ι.: $\Sigma F_x = 0$ ή $m_1gημφ = kx_1$ (1)

Θ.Ι.Τ.: $\Sigma F_x = 0$ ή $(m_1 + m_2)gημφ = k(x_1 + A)$ (2)

Από (1) και (2): A = 0,1m και $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad

$x = 0,1ημ\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI

γ) $p_A = m_1\omega A συν(\omega t + \varphi_0)$

Για $t = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}s$: $p_A = -1,5\sqrt{2}$ kg · m/s

# ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

## Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

6.155α, 6.156γ, 6.157β, 6.158α, 6.159γ, 6.160γ, 6.161α, 6.162α, 6.163δ, 6.164γ, 6.165α, 6.166δ, 6.167β, 6.168δ, 6.169γ, 6.170β, 6.171γ, 6.172γ, 6.173δ, 6.174δ, 6.175β, 6.176γ, 6.177δ, 6.178δ

## Ερωτήσεις σωστού – λάθους

6.179Λ, 6.180Σ, 6.181Σ, 6.182Σ, 6.183Λ, 6.184Σ, 6.185Σ, 6.186Σ, 6.187Λ, 6.188Λ, 6.189Λ, 6.190Λ, 6.191Σ, 6.192Σ, 6.193Λ, 6.194Λ, 6.195Λ, 6.196Λ, 6.197Λ, 6.198Σ

## Ασκήσεις

**6.199** $x = \pm A\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**6.200** Για $t = \dfrac{T}{6}$, $\upsilon = -\omega A\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$K = \dfrac{1}{2}m\upsilon^2 = \dfrac{3}{4}E$ ή $K = 75\%E$ και $U = 25\%E$

**6.201** Από τη σχέση $\alpha = f(t)$:

$\omega = 4\,rad/s,\ A = 0{,}1m$

$\alpha_1)$ $K = \dfrac{E}{2}$ ή $U = \dfrac{E}{2}$ ή $\dfrac{1}{2}Dx_1^2 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}DA^2$

ή $x_1 = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{20}m$

$\alpha_2)$ $K = 3U$ ή $4U = E$ ή $x_2 = \pm 0{,}05m$

Β. $W_{F_{\varepsilon\pi}} = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda} = \dfrac{1}{2}Dx_1^2 - \dfrac{1}{2}Dx_2^2$

$D = m\omega^2 = 48N/m$ και $W_{F_{\varepsilon\pi}} = 0{,}06J$

**6.202** Από $\upsilon = f(t)$: $\omega = 10\,rad/s$, $A = 0{,}2m$

α) $D = m\omega^2 = 100N/m$

β) $E = K_{max} = U_{max} = \dfrac{1}{2}DA^2 = 2J$

γ) $K = \dfrac{1}{2}m\upsilon^2 = 2\eta\mu^2 10t \quad SI$

$U = E - K = 2 - 2\eta\mu^2 10t = 2\sigma\upsilon\nu^2 10t \quad SI$

δ) $\dfrac{K}{U} = \varepsilon\varphi^2 10t$ και για $t = \dfrac{\pi}{30}s : \dfrac{K}{U} = 3$

**6.203** Από $\alpha = f(t)$: $\omega = 5\,rad/s$

α) $\alpha_{max} = \omega^2 A$ ή $A = 0{,}1m$

$\upsilon_{max} = \omega A = 0{,}5\,m/s$

β) $E = \dfrac{1}{2}DA^2 = \dfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 = 0{,}25\,J$

γ) $\dfrac{K}{U} = \dfrac{E-U}{U} = 1$

**6.204** α) $E = \dfrac{1}{2}DA^2 = 5\,J$ και

$\alpha_{max} = \omega^2 A = 50\,m/s^2$

$\dfrac{E}{\alpha_{max}} = \dfrac{mA}{2}$ ή $A = 0{,}1m$ και $\omega = 10\sqrt{5}\,rad/s$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{\pi\sqrt{5}}{25}s$

β) $\dfrac{K}{E}\cdot 100 = \dfrac{E-U}{E}\cdot 100 = 25\%$

γ) $\upsilon = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$. Για x=0,05m: $\upsilon = 0{,}5\sqrt{15}\,m/s$

$\left|\dfrac{\Delta K}{\Delta t}\right| = \left|\Sigma F\cdot\upsilon\right| = m\omega^2 x\upsilon = 25\sqrt{15}J/s$

**6.205** α) $K = 15U$ ή $16U = E$ ή $x = \pm 0{,}75m$

β) $\frac{U}{35} + U = E$ ή $x = \pm \frac{\sqrt{35}}{2} m$

γ) $U = \frac{E}{9}$ ή $x = \pm 1m$

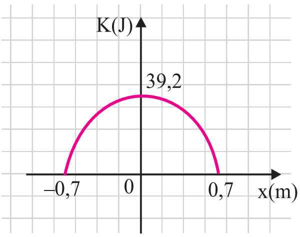
**6.206** Από x = f(t): A = 0,7m, $\omega = 2\pi rad/s$

α) $E = \frac{1}{2} DA^2 = 39{,}2J$

β) $|\alpha| = \omega^2 x$ ή $x = 0{,}5m$

$U = \frac{1}{2} Dx^2 = 20J$, άρα $K = 19{,}2J$

γ) $K = E - U = 39{,}2 - 80x^2$ SI




**6.207** α) $T = \frac{\pi}{10} s$, άρα $\omega = \frac{2\pi}{T} = 20 rad/s$

Από το διάγραμμα U = f(υ): $\upsilon_{max} = 1m/s$, $E = 2J$

$\upsilon_{max} = \omega A$ ή $A = 0{,}05m$

β) $K_{max} = \frac{1}{2} m\upsilon_{max}^2$ ή $m = 4kg$

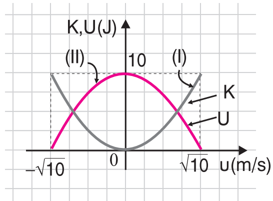
γ) K = 0,5J, άρα $U = E - K = 1{,}5J$

**6.208** α) $K = U$ ή $2U = E$ ή $2\frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2$

ή A = 0,2 m

β) $K_{max} = \frac{1}{2} m\upsilon_{max}^2$ ή $\upsilon_{max} = \sqrt{10} m/s$

$K = \frac{1}{2} m\upsilon^2$ και $U = E - K = 10 - \upsilon^2$ SI




**6.209** Από το διάγραμμα $K = f(t)$: $T = \frac{\pi}{5} s$,

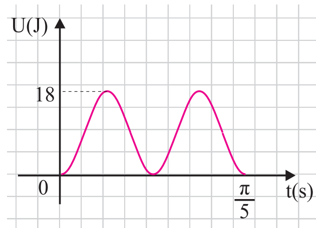
$\omega = 10 rad/s$

α) $K_{max} = \frac{1}{2} m\upsilon_{max}^2$ ή $\upsilon_{max} = 3m/s$

$\alpha_{max} = \omega^2 A = \omega \cdot \upsilon_{max} = 30m/s^2$

β) $\upsilon_{max} = \omega A$ ή $A = 0{,}3m$

γ) $x = 0{,}3ημ10t$, $U = \frac{1}{2} Dx^2 = 18ημ^2 10t$ SI




**6.210** α) $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} s$ ή $T = \pi s$ και $\omega = 2 rad/s$

$U = 100 - \upsilon^2$ και $U = E - \frac{1}{2} m\upsilon^2$

Άρα: E=100J και $m = 2kg$

β) $K_{max} = \frac{1}{2} m\upsilon_{max}^2$ ή $\upsilon_{max} = 10m/s$

$\upsilon_{max} = \omega A$ ή $A = 5m$

γ) $K = E - U = 100 - \frac{1}{2} Dx^2 = 100 - 4x^2$ SI

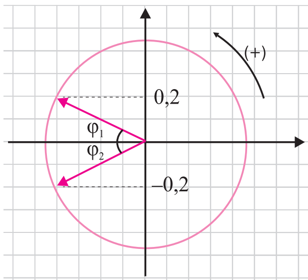
**6.211** α) Από x = f(t):

$A = 0{,}4m$ και $\omega = 2rad/s$

$\frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \Sigma F_1 = -Dx_1 = -8\cdot 10^{-3}N$ και για

$x_2 = -0{,}2m,\ \frac{\Delta p_2}{\Delta t} = 8\cdot 10^{-3}N$

β) Με τη βοήθεια του περιστρεφόμενου διανύσματος:




$\eta\mu\varphi_1 = \frac{0{,}2}{0{,}4}$ ή $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}rad$

και ομοίως $\varphi_2 = \frac{\pi}{6}rad$

$\varphi_1 + \varphi_2 = \omega\Delta t$ ή $\frac{\pi}{3} = \omega\cdot\Delta t$ ή $\Delta t = \frac{\pi}{6}s$

γ) $W_{F_{\varepsilon\pi}} = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}Dx_1^2 - \frac{1}{2}Dx_2^2 = 0$

**6.212** Από τη σχέση x = f(t):

$A = 0{,}2\sqrt{2}m$ και ω = 20π rad/s

$K = \frac{1}{4}E$ ή $U = \frac{3}{4}E$ ή $x = \pm 0{,}1\sqrt{6}m$

Για $x = \pm 0{,}1\sqrt{6}m$: $\pm 0{,}1\sqrt{6} = 0{,}2\sqrt{2}\,\eta\mu 20\pi t$, άρα:

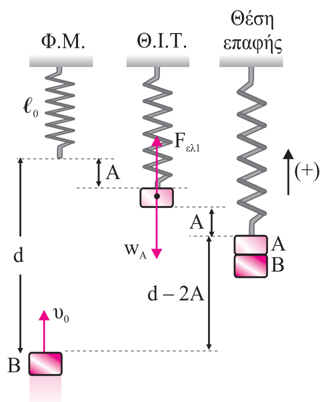
$t_1 = \frac{1}{60}s,\ t_2 = \frac{2}{60}s,\ t_3 = \frac{4}{60}s,\ t_4 = \frac{5}{60}s$

**6.213** $F = -Dx$, άρα: $D = 3{,}6N/m$

$D = m\omega^2$ ή $\omega = 6rad/s$ και $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3}{\pi}Hz$

$E = \frac{1}{2}DA^2$ ή $A = 0{,}1m$

**6.214** α) Το Α εκτελεί α.α.τ. με D = k = 100 N/m και ξεκινά από τη θέση $x = +A$. Σταματά στιγμιαία στη θέση $x = -A$ μετά από χρόνο $t_1 = \frac{T}{2}$.




$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_A}{k}} = \frac{\pi}{5}s$, άρα $t_1 = \frac{\pi}{10}s$

Θ.Ι.Τ.: $m_A g = kA$ ή $A = 0{,}1m$

Μέχρι το σημείο συνάντησης το Α έχει διανύσει απόσταση 2Α=0,2m και το Β απόσταση s=d – 2A.

Για το Β: $s = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ (1) και $\upsilon = \upsilon_0 - gt$ (2)

Για $t_1 = \frac{\pi}{10}s$ και υ=0: $\upsilon_0 = \pi m/s$, $s = 0{,}5m$,

άρα: $d = 0{,}7m$

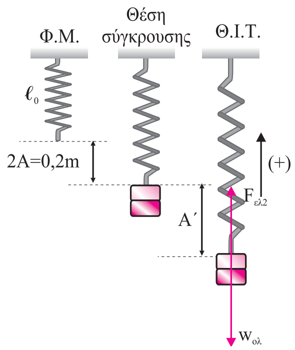
β) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_A + m_B}{k}} = \dfrac{2\pi}{5}s$

γ) Το συσσωμάτωμα ξεκινά την ταλάντωση χωρίς αρχική ταχύτητα από την ακραία θέση $x = +A΄$, όπου Α΄ το πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος.

$w_{ολ} = F_{ελ_2}$ ή $(m_A + m_B)g = k(A΄ + 2A)$

ή $A΄ = 0{,}2m$

$E = \dfrac{1}{2}DA΄^2 = 2J$




**6.215** α) Β: $K_1 = 3U_1$ ή $4U_1 = E$ ή $x_B = \dfrac{A}{2}$

Γ: $U_2 = 3K_2$ ή $\dfrac{4}{3}U_2 = E$ ή $x_Γ = \dfrac{A\sqrt{3}}{2}$

β) Β: $\dfrac{A}{2} = Aημωt$ ή $t_1 = \dfrac{T}{12}$

Γ: $\dfrac{A\sqrt{3}}{2} = Aημωt$ ή $t_2 = \dfrac{T}{6}$

$t_{min} = \Delta t = t_2 - t_1 = \dfrac{T}{12}$

γ) $W_{F_{επ}} = U_Γ - U_B = \dfrac{m\pi^2 A^2}{T^2}$

**6.216** α) Το σύστημα εκτελεί α.α.τ. με $D = k$

Β: $\Sigma F = F_{επ} = -D_2 x = -m_2\omega^2 x$

Η δύναμη επαναφοράς $F_{επ}$ είναι η δύναμη επαφής που δέχεται το Β από το Α. Όταν $F_{επ} = 0$ ή $x = 0$, δηλαδή στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, τα σώματα χάνουν επαφή.

β) Για το σύστημα το πλάτος είναι $A_1 = d$ και για το σώμα Α το πλάτος είναι: $A_2 = \dfrac{d}{5}$

$υ_{max_1} = υ_{max_2}$ ή $\omega_1 A_1 = \omega_2 A_2$ ή

$\sqrt{\dfrac{k}{m_1 + m_2}} \cdot d = \sqrt{\dfrac{k}{m_1}} \cdot \dfrac{d}{5}$

Άρα: $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{1}{24}$

γ) $D_1 = m_1\omega^2, D_2 = m_2\omega^2, D = (m_1 + m_2)\omega^2 = k$

Άρα: $D_1 = \dfrac{k}{25}$, $D_2 = \dfrac{24}{25}k$

**6.217** α) Βλέπε βασική άσκηση 6.145

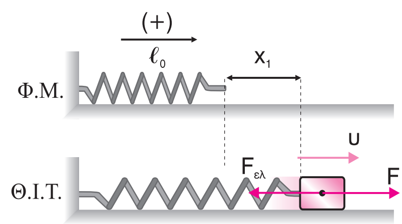
$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = \dfrac{\pi}{5}s$ και $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 10 rad/s$

β) Για την αρχική ταλάντωση από ΑΔΕΤ:

$υ = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 2\sqrt{3}m/s$

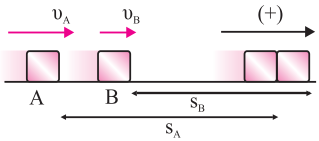
Για τη νέα ταλάντωση η Θ.Ι. υπολογίζεται από τη σχέση $\Sigma F = 0$ ή $F = kx_1$ ή $x_1 = 0{,}2m$. Δηλαδή, όταν ασκείται η F, το σώμα βρίσκεται στη νέα θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, άρα:

$υ = υ_{max} = \omega A΄$ ή $A΄ = \dfrac{\sqrt{3}}{5}m$




γ) $W_F = F \cdot A΄ = 16\sqrt{3}J$

**6.218** α) $s_A = υ_A t$ και $s_B = υ_B t$



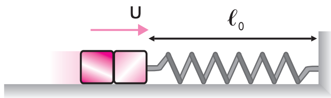

$s_A - s_B = 100m$, άρα: $t = 20s$ και $s_A = 200m$

β) Από την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή

$m_A υ_A + m_B υ_B = (m_A + m_B)υ$ ή $υ = 7{,}5m/s$

γ) $υ = υ_{max} = ωA = \sqrt{\dfrac{k}{m_A + m_B}} \cdot A$ ή $A = 0{,}75m$

$T = \dfrac{π}{5}s$




δ) $U_B = \dfrac{1}{2} m_B ω^2 A^2 = 28{,}125 J$

**6.219** α) $E = \dfrac{1}{2}DA^2$ (1) και $F_{max} = DA$ (2)

Διαιρώντας κατά μέλη, έχουμε:

A = 0,04m και D = k = 50 N/m

β) $D = mω^2$ ή $ω = 50rad/s$

$υ = ωAσυν(ωt + φ_0) = 2συν\left(50t + \dfrac{π}{2}\right)$ SI

γ) $\dfrac{ΔK}{Δt} = ΣF \cdot υ = -Dxυ$. Για $t = \dfrac{π}{100}s$: $\dfrac{ΔK}{Δt} = 0$

**6.220** A. $x = Aημ\left(ωt + \dfrac{π}{2}\right)$

Για $t = \dfrac{T}{12}$: $x = A\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

α$_1$) $\dfrac{K}{U} = \dfrac{E-U}{U} = \dfrac{1}{3}$ α$_2$) $\dfrac{U}{E} = \dfrac{3}{4}$

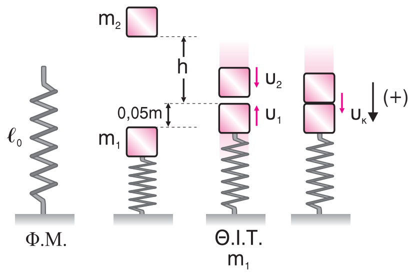
B. Ομοίως: $\dfrac{U}{K} = \dfrac{1}{3}$ και $\dfrac{K}{E} = \dfrac{3}{4}$

**6.221** α) $T = 2π\sqrt{\dfrac{m_1}{k}} = \dfrac{π}{5}s$ και $ω = 10rad/s$.

Η σύγκρουση γίνεται σε χρόνο t = T/4.

$h = \dfrac{1}{2}gt^2 = \dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{π}{20}\right)^2 = \dfrac{1}{8}m$

β) $υ_1 = ωA = 0{,}5m/s$ και $υ_2 = gt = \dfrac{π}{2}m/s$




Από διατήρηση ορμής:

$m_2 υ_2 - m_1 υ_1 = (m_1 + m_2)υ_κ$ ή $υ_κ = 0{,}535m/s$

γ) Θ.Ι.Τ.: $(m_1 + m_2)g = kx_1$ ή $x_1 = 0{,}2m$

δ) E = K + U ή $\dfrac{ΔE}{Δt} = \dfrac{ΔK}{Δt} + \dfrac{ΔU}{Δt}$ ή

$\dfrac{ΔU}{Δt} = -\dfrac{ΔK}{Δt} = -ΣF \cdot υ = 0$

## ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

### Ερωτήσεις κατανόησης

**6.222** γ: $\frac{A}{2} = A\eta\mu\omega t$ ή $t_1 = \frac{T}{12}$ και

$t_2 = \frac{T}{4} - \frac{T}{12} = \frac{T}{6}$

Άρα: $t_2 = 2t_1$

**6.223** α: $\alpha_{max_1} = \omega_1^2 A_1$ ή $\omega_1 = 2rad/s$ και $T_1 = \pi s$

Ομοίως $T_2 = 2\pi s$, άρα: $\frac{T_1}{2} < \frac{T_2}{2}$

**6.224** γ: $\alpha_{max_1} = \omega_1^2 A = \frac{k}{m} \cdot A$, $\alpha_{max_2} = \frac{2k}{m} A$

Άρα: $\alpha_{max_2} = 2\,\alpha_{max_1}$

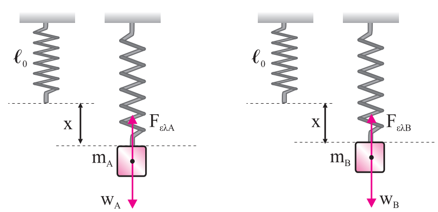
**6.225** β: $m_A g = k_A x$ (1) και $m_B g = k_B x$ (2)

Από (1), (2): $\frac{m_A}{m_B} = \frac{k_A}{k_B}$ ή $\frac{m_A}{k_A} = \frac{m_B}{k_B}$

$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{m_A}{k_A}}$, $T_B = 2\pi\sqrt{\frac{m_B}{k_B}}$

Άρα: $T_A = T_B$

Επομένως, οι ελάχιστοι χρόνοι για τη μετάβαση των σωμάτων από τη θέση x = +A στη θέση $x = \frac{A\sqrt{2}}{2}$ είναι ίσοι.




**6.226** γ: Για t = 0 έχουμε: $U = E\eta\mu^2\frac{\pi}{2}$

ή U = E και K = 0.

Για $t = \frac{T}{12}$ έχουμε:

$U = E\eta\mu^2\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{12} + \frac{\pi}{2}\right)$ ή $U = \frac{3E}{4}$ ή U = 3K

Άρα, στο χρονικό διάστημα $\left[0, \frac{T}{12}\right)$ ισχύει: U > 3K.

**6.227** α: Για το $\Sigma_1$:

$\upsilon_{1max}^2 = \omega_1^2 A^2$ ή $1 = \omega_1^2 \cdot 10^{-2}$ ή $\omega_1 = 10$ rad/s

Για το $\Sigma_2$:

$\upsilon_{2max}^2 = \omega_2^2 A^2$ ή $0{,}64 = \omega_2^2 \cdot 10^{-2}$ ή $\omega_2 = 8$ rad/s

Άρα: $t_1 = \frac{T_1}{4} = \frac{\frac{2\pi}{\omega_1}}{4} = \frac{\pi}{20}$ s

και $t_2 = \frac{T_2}{4} = \frac{\frac{2\pi}{\omega_2}}{4} = \frac{\pi}{16}$ s

**6.228** γ: K = U ή 2U = E ή $x = \pm\frac{A\sqrt{2}}{2}$

K = U ή 2K = E ή $\upsilon = \pm\frac{\omega A\sqrt{2}}{2}$

$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon = -Dx \cdot \upsilon = \pm m\omega^2 \frac{A\sqrt{2}}{2}\frac{\omega A\sqrt{2}}{2} = \pm\frac{m\omega^3 A^2}{2}$

**6.229** α: Για το $\Sigma_1$: $2F = D_1 A$ (1)

Για το $\Sigma_2$: $F = D_2 \cdot 2A$ (2)

Από (1), (2) έχουμε: $\frac{D_1}{D_2} = 4$

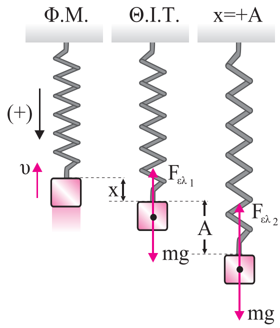
$E_1 = \frac{1}{2}D_1A^2 = \frac{1}{2}4D_2A^2 = \frac{1}{2}D_2 4A^2 = E_2$

**6.230** γ: $F = -F_{max}\frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $-Dx = -DA\frac{\sqrt{2}}{2}$ ή

$x = \frac{A\sqrt{2}}{2}$

$|p_1| = m|\upsilon_1| = m\omega\sqrt{A^2 - x^2} = p_{max}\frac{\sqrt{2}}{2}$

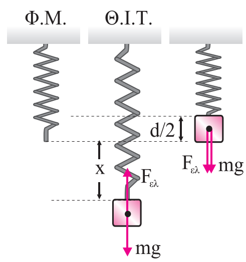
**6.231** γ: Θ.Ι.Τ.: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή mg = kx ή $x = \frac{mg}{k}$




ΑΔΕΤ: $\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mυ^2 = \frac{1}{2}kA^2$ ή

$A = \sqrt{x^2 + \frac{m}{k}υ^2} > x$ ή $A > \frac{mg}{k}$

**6.232** γ:

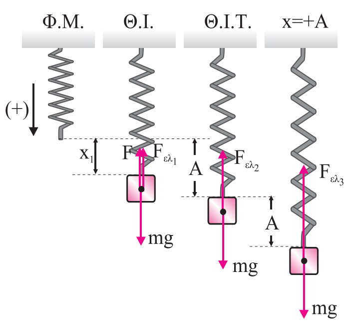



Θ.Ι.Τ.: $mg = kx$ ή $x = \frac{mg}{k}$

$|F_{επ_1}| = k\frac{d}{2}$, $|F_{επ_2}| = k\left(\frac{d}{2} + x\right)$

Άρα: $|F_{επ_1}| < |F_{επ_2}|$

**6.233** β:




Θ.Ι.: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $F + F_{ελ_1} = mg$ ή $F_{ελ_1} = \frac{mg}{2}$ ή

$kx_1 = \frac{mg}{2}$ ή $x_1 = \frac{mg}{2k}$

Θ.Ι.Τ.: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $F_{ελ_2} = mg$ ή

$k(x_1 + A) = mg$ ή $A = \frac{mg}{2k}$

Άρα: $F_{ελ_3} = F_{ελ_{max}} = k(x_1 + A + A) = 3kA =$

$= 3k\frac{mg}{2k} = \frac{3mg}{2}$

**6.234** β: $8A = 2{,}4$ m ή $A = 0{,}3$ m και $E = 9$ J

$W_{Fεπ} = U_1 - U_2 = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 =$

$= \frac{1}{2}k\frac{A^2}{4} - \frac{1}{2}k\frac{3A^2}{4} = \frac{E}{4} - \frac{3E}{4} = -4{,}5$ J

**6.235** γ: Θ.Ι.Τ.: $E_{μηχ} = \frac{1}{2}mυ_{max}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + U_B$

$E_{ταλ} = \frac{1}{2}mυ_{max}^2$

**6.236** β: Τη χρονική στιγμή $t_1 + \frac{T}{2}$ έχουμε:

$x = Aημ\frac{2π}{T}\left(t_1 + \frac{T}{2}\right) = Aημ\left(\frac{2πt_1}{T} + π\right)$ ή

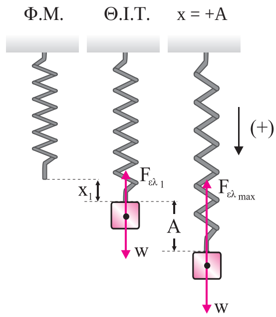
$x = -Aημ\frac{2πt_1}{T} = -\frac{A}{3}$

$|υ_1| = |υ_2| = ω\sqrt{A^2 - \frac{x^2}{9}}$, άρα: $K_2 - K_1 = 0$

**6.237** γ: ΑΔΜΕ: $E = K + U = U_{B_{max}}$ ή

$E = \frac{1}{2}mυ^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 2mgR$

**6.238** α:




Θ.Ι.Τ.: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $kx_1 = mg$ ή $x_1 = \dfrac{mg}{k}$

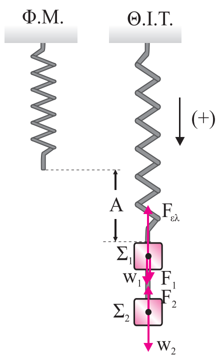
$x = +A$: $F_{ελ_{max}} = k(A + x_1)$ ή

$3mg = k\left(A + \dfrac{mg}{k}\right)$ ή $A = \dfrac{2mg}{k}$

Για $t_0 = 0$, $x = -x_1 = -\dfrac{A}{2}$

$$\frac{K}{E} = \frac{E-U}{E} = 1 - \frac{U}{E} = 1 - \frac{x_1^2}{A^2} = \frac{3}{4}$$

**6.239** α:




Θ.Ι.Τ.: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $kA = (m_1 + m_2)g$ ή

$A = 0{,}1$ m

Για το $Σ_2$ τη χρονική στιγμή $t_1$:

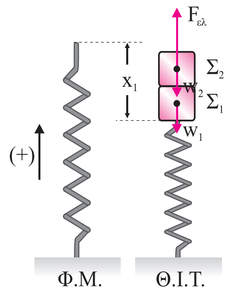
$\Sigma F_2 = -D_2 x$ ή $F_2 + w_2 = -m_2\omega^2 x$ ή

$$x = -\frac{w_2 + F_2}{m_2 \dfrac{k}{m_1 + m_2}} = 0{,}05 \text{ m}$$

$$\frac{K}{U} = \frac{E-U}{U} = \frac{E}{U} - 1 = \frac{A^2}{\dfrac{A^2}{4}} - 1 = 3$$

**6.240** α: Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{2m}}$ και

$A = d = \dfrac{8mg}{k}$.




Θ.Ι.Τ.: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $kx_1 = 2mg$ ή $x_1 = \dfrac{2mg}{k}$

Τα σώματα χάνουν επαφή στη θέση όπου η δύναμη N που ασκεί το $Σ_1$ στο $Σ_2$ μηδενίζεται.

Για το $Σ_2$: $\Sigma F_2 = -D_2 x$ ή $-w_2 = -m_2\omega^2 x$ ή

$x = \dfrac{2mg}{k}$

Άρα, τα σώματα χάνουν επαφή στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Από ΑΔΕΤ για το $Σ_2$ έχουμε:

$\dfrac{1}{2}D_2A^2 = \dfrac{1}{2}D_2x^2 + K_2$ ή $K_2 = \dfrac{15m^2g^2}{k}$

ΘΜΚΕ για το $Σ_2$: $K_{τελ} - K_2 = W_w$ ή

$0 - K_2 = -m_2gh$ ή $h = \dfrac{15mg}{k}$

Άρα: $s = d + x_1 + h = \dfrac{25mg}{k} = \dfrac{25d}{8}$

**6.241** β: $f_1 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1}{m_1}} = \dfrac{10}{\pi}$ Hz

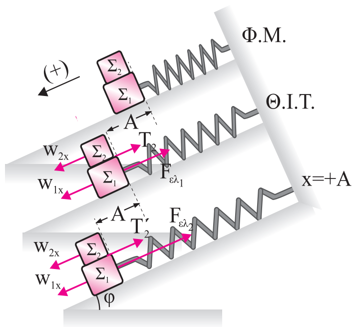
$f_2 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_2}{m_2}} = \dfrac{15}{2\pi}$ Hz

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\dfrac{N_1}{t}}{\dfrac{N_2}{t}} \text{ ή } \frac{N_1}{N_2} = \frac{4}{3}$$

Για πρώτη φορά βρίσκονται στην ίδια θέση τη χρονική στιγμή:

$$t_1 = 4T_1 = 3T_2 \text{ ή } t_1 = \frac{4}{f_1} = \frac{3}{f_2} = \frac{2\pi}{5}\,\text{s}$$

**6.242** α:




Θ.Ι.Τ.: Για το σύστημα: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή

$$(m_1 + m_2)g\eta\mu\varphi = kA \text{ ή } A = \frac{(m_1 + m_2)g\eta\mu\varphi}{k}$$

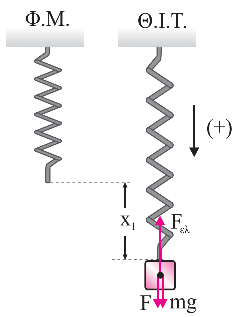
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

Θ.Ι.Τ.: Για το $\Sigma_2$: $\Sigma\vec{F}_2 = 0$ ή $T_2 = m_2 g\eta\mu\varphi$

$x = +A$: Για το $\Sigma_2$: $\Sigma F_2 = -D_2 x$ ή

$m_2 g\eta\mu\varphi - T_2' = -m_2\omega^2 A$ ή $T_2' = 2T_2$

**6.243** α:

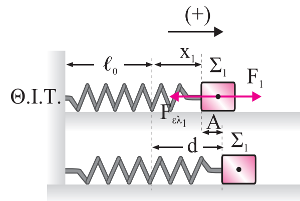



Θ.Ι.Τ.: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $F_{\varepsilon\lambda} = 2mg$ ή $x_1 = \dfrac{2mg}{k} = x$

Άρα, το σώμα ξεκινάει την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.

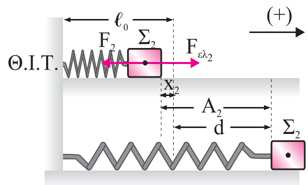
$$\upsilon = \upsilon_{max} = \omega A \text{ ή } A = \upsilon\sqrt{\frac{m}{k}}$$

**6.244** β:




Θ.Ι.Τ.: $\Sigma\vec{F}_1 = 0$ ή $F_{\varepsilon\lambda_1} = F_1$ ή $x_1 = \dfrac{d}{2}$

$$A_1 = d - x_1 = \frac{d}{2},\ E_1 = \frac{1}{2}k_1A_1^2 = \frac{1}{2}k\frac{d^2}{4}\ (1)$$




Θ.Ι.Τ.: $\Sigma\vec{F}_2 = 0$ ή $F_{\varepsilon\lambda_2} = F_2$ ή $x_2 = \dfrac{d}{2}$

$$A_2 = d + x_2 = \frac{3d}{2},\ E_2 = \frac{1}{2}k_2A_2^2 = \frac{1}{2}k\frac{9d^2}{4}\ (2)$$

Από (1), (2): $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{1}{9}$

**6.245** γ: $T_1 = T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = T_1$ το $\Sigma_1$ έχει εκτελέσει μία πλήρη ταλάντωση και βρίσκεται στην αρχική του θέση.

Το σώμα $\Sigma_2$ χάνει την επαφή του τη χρονική στιγμή $t = \dfrac{T_1}{4}$ και συνεχίζει να κινείται ευθύγραμμα ομαλά με σταθερή ταχύτητα

$$\upsilon_2 = \upsilon_{max} = \omega_2 A = \frac{2\pi}{T_1}d.$$

Στο χρονικό διάστημα $\frac{3T_1}{4}$ διανύει διάστημα:

$$s_2 = \upsilon_2 \frac{3T_1}{4} = \frac{3\pi d}{2}$$

$$s = d + s_2 = d\left(1 + \frac{3\pi}{2}\right)$$

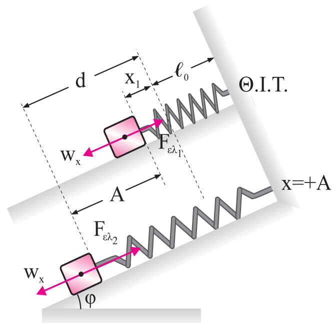
**6.246** β: Μέχρι $t_1 = T$ έχουμε:

Για το $Σ_1$: $s_1 = 4A = 4d$

Για το $Σ_2$: $s_2 = \frac{1}{2}\alpha_2 t_1^2 = \frac{1}{2}\omega^2 A T^2 = 2\pi^2 d$

Άρα: $\frac{s_2}{s_1} = \frac{\pi^2}{2}$

**6.247** γ:




Θ.Ι.Τ.: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $mg\eta\mu\varphi = kx_1$ ή

$$x_1 = \frac{mg\eta\mu\varphi}{k} = 0{,}05\ m$$

Από ΘΜΚΕ για την κίνηση του σώματος από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου μέχρι να επιστρέφει σ' αυτή, ισχύει:

$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_w + W_{F\varepsilon\lambda}$ ή

$$0 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = 0 - \frac{1}{2}kd^2 \text{ ή } d = 0{,}2\ m$$

$A = d - x_1 = 0{,}15\ m$

**6.248** α: Για το $Σ_1$:

$$\upsilon_{x_1} = \omega_1 d = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}d,\ \upsilon_{y_1} = gt_1$$

Για το $Σ_2$:

$$\upsilon_{x_2} = \omega_2 d = \sqrt{\frac{4k_1}{4m_1}}d = \upsilon_{x_1},\ \upsilon_{y_2} = gt_2$$

Επειδή $t_1 = t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, ισχύει: $\upsilon_{y_1} = \upsilon_{y_2}$

Άρα: $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_{x_1}^2 + \upsilon_{y_1}^2}$

**6.249** β: Θ.Ι.Τ.: $m_1 g\eta\mu\varphi = kx_1$

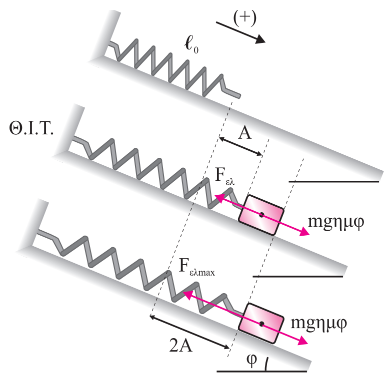
Θ.Ι. για το σύστημα των $Σ_1$, $Σ_2$:

$3m_1 g\eta\mu\varphi = k(x_1 + A)$

Άρα: $A = \frac{2m_1 g\eta\mu\varphi}{k}$ και $d = 2A = \frac{2mg}{k}$

**6.250** γ: Θ.Ι.Τ.: $mg\eta\mu\varphi = kA$

$F_{\varepsilon\lambda_{max}} = k \cdot 2A = 2mg\eta\mu\varphi$




**6.251** α: $A = \frac{3mg}{2k}$, $|F_{\varepsilon\pi}| = kA = \frac{3}{2}mg$,

$$|F_{\varepsilon\lambda}| = k(2A - x) = \frac{5}{2}mg$$

Άρα: $\frac{|F_{\varepsilon\pi}|}{|F_{\varepsilon\lambda}|} = \frac{3}{5}$

**6.252** δ: $\Sigma F = F_{\varepsilon\lambda} + mg$

Στη θέση φυσικού μήκους:

$F_{\varepsilon\lambda} = 0$, άρα $\Sigma F = mg$

**6.253** γ: Θ.Ι.Τ.: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $F\sigma\upsilon\nu\varphi = kA$ ή

$$A = \frac{mg}{2k}$$

$$s = 8A = \frac{4mg}{k}$$

**6.254** β: $A_1 = A_2 = \dfrac{mg}{k}, E_1 = E_2 = \dfrac{1}{2}kA_1^2 = \dfrac{1}{2}kA_2^2$

**6.255** β: $x = A\eta\mu\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot\dfrac{T}{4} + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma F \cdot \upsilon = -Dx\upsilon = 0$$

γ: Για t = 0, $x_0 = A$

$$W_{F_{\varepsilon\pi}} = \frac{1}{2}Dx_0^2 - \frac{1}{2}Dx_1^2 = \frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}D\frac{A^2}{4} > 0$$

**6.256** α: $x = A\eta\mu\omega t$

Για $t = 0$, $x = 0$, άρα: $K = E$ και $U = 0$

Για $t = \dfrac{T}{8}$, $x = \dfrac{A\sqrt{2}}{2}$, άρα: $K = U = \dfrac{E}{2}$

**6.257** γ: $K_1 = 3U_1$, άρα: $x_1 = \dfrac{A}{2}$ και $t_1 = \dfrac{T}{12}$

$U_2 = 3K_2$, άρα: $x_2 = \dfrac{A\sqrt{3}}{2}$ και $t_2 = \dfrac{T}{6}$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{T}{12}$$


**6.258** α: $\alpha = \alpha_{max}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ή $x = -A\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{K}{U} = \frac{E-U}{U} = \frac{A^2}{x^2} - 1 = \frac{1}{3}$$

**6.259** γ: $p = p_{max}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\upsilon = \upsilon_{max}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$K = \dfrac{E}{2}$ και $U = \dfrac{E}{2}$, άρα: $\dfrac{K}{U} = 1$

**6.260** γ: Για $x = +A\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $U = \dfrac{E}{2} = K$

**6.261** γ: $\pi_E\% = \dfrac{\frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}DA_0^2}{\frac{1}{2}DA_0^2}\cdot 100\% = \dfrac{700}{9}$

ή $A = \dfrac{4}{3}A_0$

$$\pi_A\% = \frac{A - A_0}{A_0}100\% = 33{,}33\%$$

**6.262** α: $\dfrac{\Delta p}{\Delta t} = \Sigma F = kA$, $\dfrac{\Delta p'}{\Delta t} = k\dfrac{A}{2}$

β: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (σταθερό)

**6.263** β: Θ.Ι.Τ.: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $qE = kA$ ή $A = \dfrac{qE}{k}$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2E^2}{k}$$

**6.264** γ: $\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή $0 = m_2\upsilon_2 - m_1\upsilon_1$ ή

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} \quad (1)$$

Για να συναντηθούν, πρέπει σε χρόνο $\dfrac{3T_1}{4}$ το $\Sigma_2$ να διανύσει διάστημα $s_2 \le A$. Άρα:

$$\upsilon_2\frac{3T_1}{4} \le \frac{\upsilon_1}{\omega_1} \text{ ή } \upsilon_2\frac{3T_1}{4} \le \frac{\upsilon_1 T_1}{2\pi} \text{ ή } \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} \le \frac{2}{3\pi} \quad (2)$$

Από (1), (2): $\dfrac{m_1}{m_2} \le \dfrac{2}{3\pi}$

**6.265** δ: $D_1 = m_1\omega^2, D_2 = m_2\omega^2$

και $D = k = (m_1 + m_2)\omega^2$

Άρα: $D_1 = \dfrac{4k}{5}$ και $D_2 = \dfrac{k}{5}$

**6.266** δ: $F_1 = D_1A, F_2 = D_2A$, άρα: $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = 2$

**6.267** δ: $F_{max_1} = m_1\omega^2 A$, $F'_{max_1} = m_1\omega'^2 A'$

$$\frac{F_{max_1}}{F'_{max_1}} = \frac{\omega^2 A}{\omega'^2 A'} \quad (1)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}},\ \omega' = \sqrt{\frac{k}{2m_1}},\ \text{άρα: } \frac{\omega}{\omega'} = \sqrt{2} \quad (2)$$

Από αρχή διατήρησης της ορμής στον άξονα x΄x:

$$m_1 u_{max_1} = 2m_1 u'_{max_1} \quad (3)$$

Αλλά $u_{max_1} = \omega A$, $u'_{max_1} = \omega' A'$, άρα η (3) γίνεται:
$\omega A = 2\omega' A'$ και λόγω της (2) έχουμε:

$$A' = \frac{A\sqrt{2}}{2} \quad (4)$$

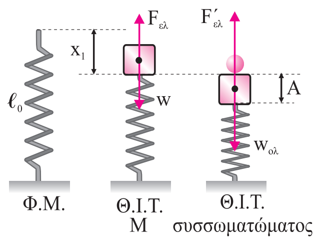
Από (1), (2), (4): $\dfrac{F_{max_1}}{F'_{max_1}} = 2\sqrt{2}$

**6.268** β: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1}}$, $\omega' = \sqrt{\dfrac{k}{2m_1}}$, άρα: $\dfrac{\omega}{\omega'} = \sqrt{2}$

$$\pi_D\% = \frac{m_1\omega'^2 - m_1\omega^2}{m_1\omega^2}100\% = -50\%$$

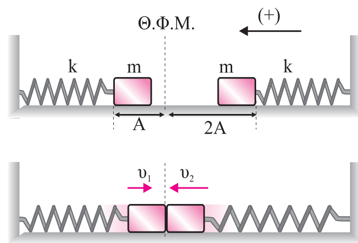
**6.269** α: Θ.Ι.Τ. Μ: $Mg = kx_1$

Θ.Ι.Τ. συσ.: $(M+m)g = k(x_1 + A)$




Άρα: $A = \dfrac{mg}{k}$ και $E = \dfrac{1}{2}kA^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{m^2g^2}{k}$

**6.270** α: $E = \dfrac{1}{2}kA^2 + \dfrac{1}{2}k4A^2 = \dfrac{5}{2}kA^2 \quad (1)$




Τα σώματα έχουν ίδια περίοδο $T_1 = T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, άρα φτάνουν ταυτόχρονα στη θέση ισορροπίας, όπου συγκρούονται πλαστικά.
Από αρχή διατήρησης ορμής:

$$-m\omega A + m\omega 2A = 2m\upsilon_\kappa = 2m\omega' A' \quad (2)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},\quad \omega' = \sqrt{\frac{2k}{2m}} = \omega,\ \text{άρα } A' = \frac{A}{2}$$

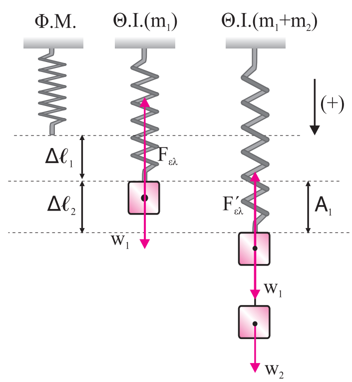
$$E' = \frac{1}{2}DA'^2 = \frac{1}{2}2k\frac{A^2}{4} = \frac{kA^2}{4} \quad (3),\ \text{άρα από (1)}$$

και (3) έχουμε: $\dfrac{E}{E'} = 10$

**6.271** β: Θ.Ι.$(m_1)$: $\Sigma F = 0$ ή $F_{ελ} = w_1$ ή $\Delta\ell_1 = \dfrac{m_1 g}{k}$

Θ.Ι.$(m_1+m_2)$: $\Sigma F = 0$ ή $F'_{ελ} = w_1 + w_2$ ή

$$k(\Delta\ell_1 + \Delta\ell_2) = w_1 + w_2 \text{ ή } \Delta\ell_2 = \frac{m_2 g}{k}$$



Άρα $A_1 = \frac{m_2 g}{k}$. Ομοίως $A_2 = \frac{m_1 g}{k}$.

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}kA_1^2 \\ E_2 &= \frac{1}{2}kA_2^2 \end{aligned}\right\} \text{άρα: } \frac{E_1}{E_2} = \frac{m_2^2}{m_1^2}$$

**6.272** α: $\Sigma_1$: $x_1 = \frac{mg}{k}, F_{max_1} = k(x_1 + A) = mg + kA$

$\Sigma_2$: $x_2 = \frac{2mg}{k}, F_{max_2} = k(x_2 + 2A) = 2mg + 2kA$

**6.273** β: $A_1 = \frac{mg}{k}$ και $\alpha_{max_1} = \omega_1^2 A_1 = g$

$A_2 = \frac{mg}{2k}$ και $\alpha_{max_2} = \omega_2^2 A_2 = g$

**6.274** β: Εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ για το σώμα μάζας $m_2$, έχουμε:

$$\frac{1}{2}m_2 \upsilon_2^2 = m_2 gh \quad \text{ή} \quad \upsilon_2 = \sqrt{2gh}$$

Επειδή η κρούση είναι κεντρική και ελαστική και ισχύει $m_1 = m_2$, τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες.

Άρα: $\upsilon_1' = \upsilon_2 = \sqrt{2gh}$

Επειδή η ταλάντωση του σώματος μάζας $m_1$ ξεκινά από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, ισχύει:

$$\upsilon_1' = \upsilon_{max} = \sqrt{2gh}$$

**6.275** β: Επειδή η κρούση είναι κεντρική και ελαστική και ισχύει $m_1 = m_2$, για τα μέτρα των ταχυτήτων των σωμάτων μετά την κρούση έχουμε:

$\upsilon_1' = \upsilon_2$ ή $\upsilon_1' = 2\upsilon_1$ (1)

Επειδή η κρούση γίνεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, οι ταχύτητες $\upsilon_1$ και $\upsilon_1'$ είναι μέγιστες για την ταλάντωση πριν και μετά τη σύγκρουση.

Άρα, από τη σχέση (1) έχουμε:

$\omega A' = 2\omega A$ ή $A' = 2A$

**6.276** γ: Εάν $\upsilon_1$ η ταχύτητα του σώματος $\Sigma_1$ ακριβώς πριν από την κρούση, οι ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -\frac{1}{3}\upsilon_1 \quad \text{και}$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{2}{3}\upsilon_1$$

$$\frac{K_1'}{K_2'} = \frac{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2}{\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2} = \frac{m \cdot \frac{1}{9}\upsilon_1^2}{2m \cdot \frac{4}{9}\upsilon_1^2} = \frac{1}{8}$$

**6.277** α: Για την κεντρική και ελαστική κρούση ισχύει:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{2m}{4m}\upsilon_1 = \frac{1}{2}\upsilon_1$$

$\upsilon_2' = \upsilon_{max} = \omega A$ ή

$$A = \frac{\upsilon_1}{2\omega} = \frac{\upsilon_1}{2\sqrt{\frac{k}{m_2}}} = \frac{\upsilon_1\sqrt{3m}}{2\sqrt{k}}$$

$$F_{max} = kA = \frac{k\upsilon_1\sqrt{3m}}{2\sqrt{k}} = \frac{\upsilon_1}{2}\sqrt{3km}$$

**6.278** γ: Για την ταχύτητα $\upsilon_1$ του σώματος μάζας m, ακριβώς πριν από την κρούση ισχύει:

$\upsilon_1 = \upsilon_{max} = \omega A = \omega d$

Για την κεντρική και ελαστική κρούση ισχύει:

$\upsilon_2' = \upsilon_1 = \omega A$

$\upsilon_2' = \upsilon_{max} = \omega' A'$ ή $\omega' A' = \omega d$ ή

$$A' = \frac{\omega d}{\omega'} = \frac{\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}d}{\sqrt{\frac{k_2}{m_2}}} = \frac{d}{2}$$

**6.279** α: Στην ελαστική κρούση ισχύει:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_0 \quad \text{ή} \quad \upsilon_2' = \upsilon_0$$

$$A_1 = \frac{\upsilon_2'}{\omega_1} = \frac{\upsilon_0}{\sqrt{\frac{k}{m_1}}} = \frac{\upsilon_0\sqrt{m_1}}{\sqrt{k}} \quad (1)$$

Στην πλαστική κρούση ισχύει:

$$m_1 υ_0 = (m_1 + m_2) υ_K \quad ή \quad υ_K = \frac{υ_0}{2}$$

$$υ_K = ω_2 A_2 \quad ή$$

$$A_2 = \frac{υ_K}{ω_2} = \frac{\frac{υ_0}{2}}{\sqrt{\frac{k}{2m_1}}} = \frac{υ_0}{2}\frac{\sqrt{2m_1}}{\sqrt{k}} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{υ_0\sqrt{m_1}}{\sqrt{k}}}{\frac{υ_0}{2}\frac{\sqrt{2m_1}}{\sqrt{k}}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

**6.280** γ: Για την κρούση ισχύει:

$$\vec{p}_{αρχ_x} = \vec{p}_{τελ_x} \quad ή \quad m_2 υ_{max} = (m_1 + m_2) υ_K \quad ή$$

$$υ_K = \frac{m_2 υ_{max}}{2m_2} = \frac{υ_{max}}{2}$$

$$W_F = K_{τελ} - K_{αρχ} = \frac{1}{2} m_2 υ_K^2 - \frac{1}{2} m_2 υ_{max}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_2 \frac{υ_{max}^2}{4} - \frac{1}{2} m_2 υ_{max}^2 = -\frac{3m_2 υ_{max}^2}{8}$$

**6.281** β: Στην πλαστική κρούση ισχύει:

$$m_2 υ_2 = (m_1 + m_2) υ_K \quad ή \quad υ_K = \frac{m_2 υ_2}{m_1 + m_2}$$

Το σώμα $Σ_1$ έχει πλάτος ταλάντωσης $A_1$ και ενέργεια ταλάντωσης: $E_1 = \frac{1}{2} k A_1^2$

Το συσσωμάτωμα έχει πλάτος ταλάντωσης $A_2$ και ενέργεια ταλάντωσης:

$$E_2 = K + U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) υ_K^2 + \frac{1}{2} k A_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) υ_K^2 + E_1 \quad ή \quad E_2 > E_1$$

**6.282** α: Για τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του $m_2$ ισχύει:

$$ΣF = 0 \quad ή \quad F_{ελ} = w_2 \quad ή \quad kx_1 = m_2 g \quad (1)$$

Για τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος ισχύει:

$$ΣF = 0 \quad ή \quad F'_{ελ} = w_1 + w_2 \quad ή$$

$$k(x_1 + Δx) = (m_1 + m_2) g \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$Δx = \frac{m_2 g}{k}$$

**6.283** γ: Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το σώμα $Σ_1$ πριν και μετά την κρούση:

$$\frac{1}{2} m_1 υ_1^2 - 0 = m_1 gημφ s_1 \quad ή \quad υ_1 = \sqrt{2gημφ s_1}$$

$$ή \quad υ_1 = \sqrt{g s_1}$$

$$0 - \frac{1}{2} m_1 υ_1'^2 = -m_1 gημφ s_2 \quad ή$$

$$υ_1' = \sqrt{2gημφ\frac{s_1}{4}} = \frac{\sqrt{g s_1}}{2} = \frac{υ_1}{2}$$

Από ΑΔΟ για την κρούση έχουμε:

$$m_1 υ_1 = -m_1 υ_1' + m_2 υ_{max} \quad ή$$

$$m_1 υ_1 + m_1 \frac{υ_1}{2} = \frac{m_1}{2} υ_{max} \quad ή \quad υ_{max} = 3\sqrt{g s_1}$$

**6.284** α: Για την πλαστική κρούση στον άξονα x΄x ισχύει:

$$m_1 υ_1 συνφ = (m_1 + m_2) υ_K \quad ή \quad υ_K = \frac{m_1 υ_1 συνφ}{m_1 + m_2}$$

$$υ_K = υ_{max} = ωA \quad ή$$

$$A = \frac{m_1 υ_1 συνφ}{(m_1 + m_2)ω} = \frac{m_1 υ_1 συνφ}{m_1 + m_2} \cdot \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}$$

Άρα, το πλάτος εξαρτάται από τη γωνία φ.

**6.285** α: Για την πλαστική κρούση ισχύει:

$$m_1 υ_1 = (m_1 + m_2) υ_K \quad ή \quad υ_K = \frac{m_1 υ_1}{m_1 + m_2} \quad ή$$

$$υ_K = \frac{υ_1}{2}$$

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) υ_K^2 \quad ή \quad K = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot \frac{υ_1^2}{4} \quad ή$$

$$K = \frac{1}{2}\frac{m υ_1^2}{2} = \frac{1}{2} E$$

**6.286** α: $\upsilon_1 = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = \frac{\omega A}{2}$

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon_κ$ ή

$m_1\frac{\omega A}{2} - m_1\frac{\omega A}{2} = 2m_1\upsilon_κ$ ή $\upsilon_κ = 0$

Άρα: $A' = x = \frac{A\sqrt{3}}{2}$

**6.287** β: $\frac{1}{2}m_1\upsilon^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = m_1gh$ ή

$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh}$

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m\upsilon = 2m\upsilon_κ$ ή

$\upsilon_κ = \frac{\upsilon}{2} = \frac{\sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh}}{2}$ (1)

ΑΔΕΤ: $\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}2m\upsilon_κ^2 = \frac{1}{2}kA^2$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι το πλάτος A εξαρτάται από την απόσταση h και το μέτρο της ταχύτητας $\upsilon_0$.

**6.288** α: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $0 = m\upsilon_0 - 9m\upsilon$ ή $\upsilon = \frac{\upsilon_0}{9}$

$\upsilon = \upsilon_{max}$ ή $\frac{\upsilon_0}{9} = \omega A$ ή $\frac{\upsilon_0}{9} = \sqrt{\frac{k}{9m}}A$ ή

$A = \frac{\upsilon_0}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}$

**6.289** α: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_1\upsilon_{max} = (m_1 + m_2)\omega'\frac{A}{2}$ ή

$m_1\omega A = (m_1 + m_2)\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}\frac{A}{2}$ ή

$m_1\sqrt{\frac{k}{m_1}}A = (m_1 + m_2)\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}\frac{A}{2}$ ή

$m_1 = \frac{1}{4}(m_1 + m_2)$ ή $m_2 = 3m_1$

**6.290** α: Για $t_1 = \frac{T_1}{3}$: $x_1 = d\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T_1}\frac{T_1}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{d}{2}$

$U_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}k\frac{d^2}{4} = \frac{E_1}{4}$, $K_1 = \frac{3E_1}{4}$

Για τη δεύτερη ταλάντωση ισχύουν:

$K_2 = \frac{1}{3}K_1 = \frac{E_1}{4}$

$U_2 = U_1 = \frac{E_1}{4}$

$E_2 = K_2 + U_2 = \frac{E_1}{2}$ ή

$\frac{1}{2}kA_2^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}kA_1^2$ ή $\frac{A_1}{A_2} = \sqrt{2}$

**6.291** β: $\upsilon_1 = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}d$

Από ΑΔΟ για το σύστημα των δύο σωμάτων ισχύει:

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $(m_1 + m_2)\upsilon_x$ ή

$\upsilon_x = \sqrt{\frac{k}{m}}\frac{d}{2}$

$h = \frac{1}{2}gt^2$ ή $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$\upsilon_y = gt = \sqrt{2gh}$

$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\frac{k}{m}\frac{d^2}{4} + 2gh}$

**6.292** β: $\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -\frac{5}{3}\omega A$

Το $Σ_2$ ξεκινά τη νέα ταλάντωση από τυχαία θέση με $x = +A$ και $\upsilon_2' = -\frac{5}{3}\omega A$.

Από ΑΔΕΤ έχουμε:

$E' = \frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 =$

$= E + \frac{1}{2}m_2\frac{25}{9}\omega^2A^2 = E + \frac{25}{9}E$

Άρα: $\Delta E = E' - E = \frac{25E}{9}$.

**2.293** γ: ΘΜΚΕ για το $Σ_2$:

$$\frac{1}{2}m_2υ_2^2 - \frac{1}{2}m_2υ_0^2 = -m_2 gημφs \text{ ή } υ_2 = 2\sqrt{gs}$$

Μετά την κρούση: $υ_1' = υ_2 = 2\sqrt{gs}$ (Τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες.)

Το $Σ_1$ ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας, άρα:

$$υ_1' = υ_{max} = ωA \text{ ή } A = \frac{υ_1'}{ω} = \frac{2\sqrt{gs}}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\sqrt{\frac{gsm}{k}}$$

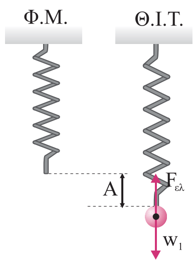
**6.294** α: Το $Σ_1$ ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου που είναι ακραία θέση ($υ = 0$). Επομένως:

Θ.Ι.Τ.: $ΣF = 0$ ή $F_{ελ} = w_1$ ή $kA = mg$ ή

$$A = \frac{mg}{k}$$

$$υ_{max} = ωA = \sqrt{\frac{m}{k}}\,g$$

$$υ_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1 = -\frac{υ_{max}}{2} = -\frac{ωA}{2}$$




Επειδή η Θ.Ι. δε μεταβάλλεται ισχύει:

$$|υ_1'| = υ_{max}' = \frac{υ_{max}}{2} \text{ ή } ωA' = \frac{ωA}{2} \text{ ή}$$

$$A' = \frac{A}{2} = \frac{mg}{2k}$$

Σε μία ταλάντωση διανύει απόσταση:

$$s = 4A' = \frac{2mg}{k}$$

**6.295** α: Το $Σ_1$ χάνει επαφή με το ελατήριο, όταν αυτό βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Η ταχύτητα του $Σ_1$, όταν χάνει την επαφή του, είναι:

$$υ_1 = ωd = \sqrt{\frac{k}{m_1}}\,d$$

Για την κρούση ισχύει:

$$υ_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}υ_1 = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad (1)$$

Για την οριακή ανακύκλωση ισχύουν: $T = 0$ και

$$F_κ = m_2 g \text{ ή } m_2\frac{υ_2''^2}{\ell} = m_2 g \text{ ή } υ_2''^2 = g\ell \quad (2)$$

ΘΜΚΕ για το $Σ_2$:

$$\frac{1}{2}m_2υ_2''^2 - \frac{1}{2}m_2υ_2'^2 = -m_2 g2\ell$$

$$υ_2''^2 = υ_2'^2 - 4g\ell \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε:

$$d = 2\sqrt{\frac{5g\ell m_1}{k}}$$

**6.296** α: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή

$$m_1υ_1 - m_2|υ_2| = -m_1|υ_1'| + m_2|υ_2'| = 0$$

Άρα: $|υ_2'| = \dfrac{|υ_1'|}{6}$

Για το σώμα $Σ_2$ μετά τη σύγκρουση:

$ΣF = w - F = 0$

Άρα, το $Σ_2$ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με $|υ_2'| = \dfrac{υ_1'}{6}$.

Το $Σ_1$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με

$υ_{max} = |υ_1'|$ και $A' = \dfrac{|υ_1'|}{ω}$

Για να συναντηθούν, πρέπει σε χρόνο $\dfrac{3T}{4}$ το σώμα $Σ_2$ να έχει διανύσει διάστημα $s_2 \leq A'$.

$$|υ_2'|\frac{3T}{4} \leq A' \text{ ή } \frac{|υ_1'|}{6}\cdot\frac{3T}{4} \leq \frac{|υ_1'|}{2π}T \text{ ή } 4 \geq π,$$

που ισχύει.

**6.297** β: ΑΔΕΤ για το $Σ_1$:

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}kA^2 \text{ ή } \upsilon_1 = \frac{A}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\upsilon_κ = \frac{\upsilon_1}{2} = \frac{A}{4}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

ΘΜΚΕ για το $Σ_2$ κατά τη διάρκεια της κρούσης:

$K_2' - K_2 = W_F$ ή

$$W_F = \frac{1}{2}m\upsilon_κ^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_κ^2 = \frac{1}{32}kA^2$$

**6.298** γ: Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των σωμάτων Σ, $Σ_1$ και $Σ_2$.

$m_1\upsilon_1συνφ_1 - m_2\upsilon_2συνφ_2 = (m_1 + m_2 + m)\upsilon_κ$ ή

$$\frac{m\upsilon}{2} - m\upsilon\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 3m\upsilon_κ \text{ ή } \upsilon_κ = -\frac{\upsilon}{6}$$

Επειδή η Θ.Ι. δεν αλλάζει, ισχύει: $\upsilon_κ = \upsilon_{max}$

$$E_2 = \frac{1}{2}m_2\upsilon_{max}^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\upsilon}{6}\right)^2 = \frac{m\upsilon^2}{72}$$

**6.299** α: ΑΔΜΕ για το $Σ_1$:

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = m_1g\ell(1 - συν60^o) \text{ ή } \upsilon_1 = \sqrt{g\ell}$$

Για την κρούση:

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)\upsilon_κ$ ή

$$\upsilon_κ = \frac{\upsilon_1}{2} = \frac{\sqrt{g\ell}}{2}$$

Για την ταλάντωση ισχύει: $\upsilon_{max} = \upsilon_κ$

$$\text{Άρα: } E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_{max}^2 = \frac{mg\ell}{4}$$

## Προβλήματα

**6.300** Α. Το πλάτος είναι A = d = 0,3 m.

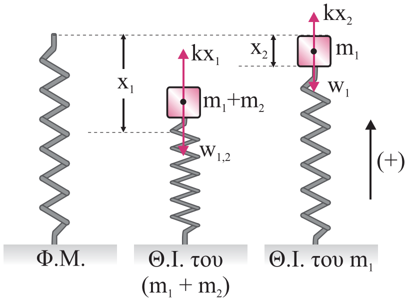
Η ενέργεια που προσφέρθηκε είναι ίση με την ενέργεια ταλάντωσης του συστήματος.

$$π\% = \frac{\frac{1}{2}m_1\omega^2A^2}{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\omega^2A^2}100\% = 25\%$$

β$_1$) Από ΑΔΕΤ:

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon'^2 + \frac{1}{2}kx'^2 \text{ ή } \upsilon_1 \approx 2{,}9 \text{ m/s}$$

β$_2$)




Στη Θ.Ι. του $(m_1 + m_2)$ : $kx_1 = (m_1 + m_2)g$ ή

$x_1 = 0{,}1$ m

Στη Θ.Ι. του $m_1$: $kx_2 = m_1g$ ή $x_2 = 0{,}025$ m

$x' = x_1 - x_2$, άρα όταν απομακρύνεται το $Σ_2$, το $Σ_1$ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσής του και ισχύει:

$$\upsilon' = \upsilon_{max} = \omega'A' = \sqrt{\frac{k}{m_1}}A' \text{ ή } A' = 0{,}145 \text{ m}$$

β$_3$) $U_{ελ_{max}} = \frac{1}{2}k(x_2 + A')^2 = 5{,}78$J

$A' > x_2$, άρα το σώμα διέρχεται από τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου και $U_{ελ_{min}} = 0$.

**6.301** α) Κατά τη διάρκεια της διάσπασης:

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $0 = m_2\upsilon_2 - m_1\upsilon_1$ ή $\upsilon_2 = 6$ m/s

Η ενέργεια που προσφέρθηκε είναι:

$$E_{πρ} = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = 24 \text{ J}$$

β) $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = 10$ rad/s και

$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = 10$ rad/s και

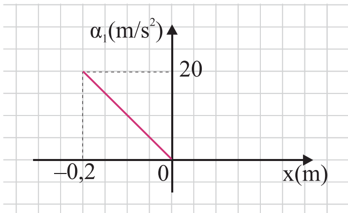
$\upsilon_1 = \upsilon_{1_{max}} = \omega_1A_1$ ή $A_1 = 0{,}2$ m και

$\upsilon_2 = \upsilon_{2_{max}} = \omega_2A_2$ ή $A_2 = 0{,}6$ m γ) Τα δύο σώματα ξεκινούν ταυτόχρονα την ταλάντωσή τους από τη θέση ισορροπίας και, επειδή έχουν ίδια περίοδο, ξαναφτάνουν στη θέση ισορροπίας ταυτόχρονα, τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{2}$, με $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{5}$ s.

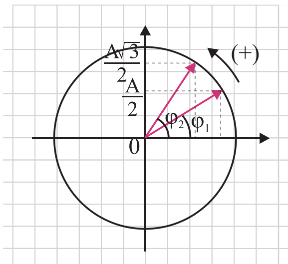
Για το $Σ_1$:

$α_1 = -\omega_1^2 x = -100x$ με

$α_{max} = 20$ m/s² και $-0{,}2 \le x \le 0$




δ) Από το περιστρεφόμενο διάνυσμα προκύπτει ότι:




$$ημφ_1 = \frac{\frac{A_2}{2}}{A_2} = \frac{1}{2} \text{ ή } φ_1 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$ημφ_2 = \frac{\frac{A_2\sqrt{3}}{2}}{A_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ή } φ_2 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$Δφ = φ_2 - φ_1 = \frac{\pi}{6} \text{ rad και } Δφ = \omega_2 Δt \text{ ή}$$

$$Δt = \frac{\pi}{60} \text{ s}$$

**6.302** α) $A = d = 0{,}2\sqrt{3}$ m

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = 5 \text{ rad/s}$$

β) Στη Θ.Ι.Τ.:

$(m_1+m_2)gημφ = kx_1$ ή $x_1 = 0{,}2$ m

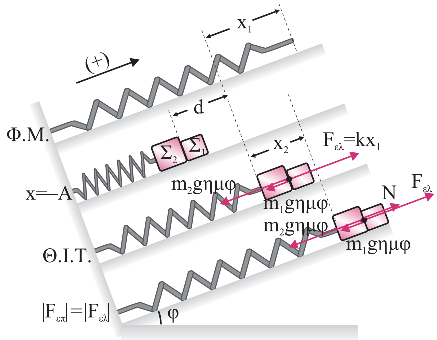
Όταν $|F_{επ}| = |F_{ελ}|$: $kx_2 = k(x_1 - x_2)$ ή

$$x_2 = \frac{x_1}{2} = 0{,}1 \text{ m}$$

Για το σώμα $Σ_1$:

$ΣF = -D_1x_2$ ή

$N - m_1gημφ = -m_1\omega^2 x_2$ ή $N = 2{,}5$ N




γ) Όταν τα σώματα χάνουν την επαφή τους, ισχύει: $N = 0$.

Άρα, για το σώμα $Σ_1$ ισχύει:

$-m_1gημφ = -m_1\omega^2 x$ ή $x = 0{,}2$ m

δ) Στη θέση που τα σώματα χάνουν την επαφή τους, από την ΑΔΕΤ για το σύστημα έχουμε:

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)υ^2 = \frac{1}{2}kA^2 \text{ ή } υ = \sqrt{2} \text{ m/s}$$

Από ΘΜΚΕ για το $Σ_1$ από τη θέση που χάνει την επαφή του με το $Σ_2$ μέχρι την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου:

$$0 - \frac{1}{2}m_1υ^2 = -m_1gημφs' \text{ ή } s' = 0{,}2 \text{ m}$$

Άρα: $s = \ell + x + s' = 1{,}4$ m.

**6.303** α) Από ΑΔΕΤ:

$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}kA^2$ ή $A = 0,25$ m

β) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 15$ rad/s

$\left(\frac{dp}{dt}\right)_1 = \Sigma F = -m\omega^2 x_1$ ή $x_1 = -0,15$ m

$|u_1| = \omega\sqrt{A^2 - x_1^2} = 3$ m/s

γ) $\alpha_2 = -\omega^2 x_2$ ή $x_2 = -0,125$ m

$K + U = E$ ή $K = E - U$ ή $K = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$

$$\pi\% = \frac{K}{E}100\% = \frac{\frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx_2^2}{\frac{1}{2}kA^2}100\% = 75\%$$

δ) Το σώμα χάνει την επαφή του με το ελατήριο, όταν φτάνει στο φυσικό μήκος του ελατηρίου. Η ενέργεια του σώματος, όταν αυτό συναντά το κεκλιμένο επίπεδο, είναι:

$E = \frac{1}{2}kA^2 = 7,03$ J

Στο ύψος h του κεκλιμένου επιπέδου το σώμα έχει ενέργεια:

$E' = mgh = 6$ J

$E \neq E'$, άρα το κεκλιμένο επίπεδο δεν είναι λείο.

$Q = E - E' = 1,03$ J.

**6.304** α) Στη θέση ισορροπίας:

$\Sigma F = 0$ ή $F_1 + F_{\varepsilon\lambda_1} = m_1 g$ ή $F_{\varepsilon\lambda_1} = 0$,

άρα η θέση ισορροπίας αντιστοιχεί στο φυσικό μήκος του ελατηρίου.

Ομοίως: $F_{\varepsilon\lambda_2} = F_{\varepsilon\lambda_3} = 0$.

β) Τα σώματα εγκαταλείπουν τα ελατήρια στη θέση ισορροπίας, δηλαδή στη θέση φυσικού μήκους, στην οποία φτάνουν τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{4}$.

$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = \frac{\pi}{5}$ s

Ομοίως: $T_2 = T_3 = \frac{\pi}{5}$ s

γ) $W_{F_1} = F_1 \Delta x_1 = 1$ J

και ομοίως $W_{F_2} = 4$ J, $W_{F_3} = 9$ J

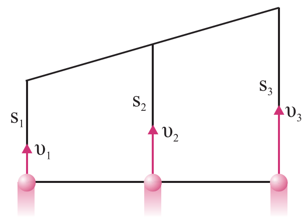
δ) Στη θέση ισορροπίας:

$u_1 = \omega_1 A_1 = \frac{2\pi}{T_1}\Delta x_1 = 1$ m/s και ομοίως

$u_2 = 2$ m/s, $u_3 = 3$ m/s

Τα σώματα εκτελούν κατακόρυφη βολή προς τα πάνω.

$s_1 = u_1 t - \frac{1}{2}gt^2$, $s_2 = u_2 t - \frac{1}{2}gt^2$, $s_3 = u_3 t - \frac{1}{2}gt^2$,




Για να βρίσκονται τα σώματα συνεχώς σε μία ευθεία, πρέπει να ισχύει $s_2 = \frac{s_1 + s_3}{2}$ (διάμεσος του τραπεζίου) κάθε χρονική στιγμή κατά την ανοδική και καθοδική κίνησή τους.

$$\frac{s_1 + s_3}{2} = \frac{u_1 t + u_3 t - gt^2}{2} = \frac{(u_1 + u_3)t}{2} - \frac{1}{2}gt^2 =$$

$$= u_2 t - \frac{1}{2}gt^2 = s_2$$

ε) Από ΘΜΚΕ προκύπτει ότι η ταχύτητα του σώματος μάζας $m_1$, όταν αυτό έρχεται ξανά σε επαφή με το ελατήριο, έχει μέτρο:

$u_1' = u_1 = 1$ m/s

Για τη Θ.Ι. της νέας ταλάντωσης:

$m_1 g = k_1 x_1'$ ή $x_1' = 0,1$ m

Από ΑΔΕΤ:

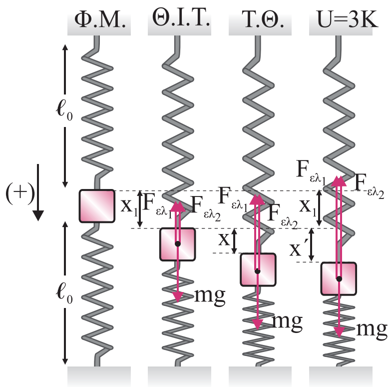
$\frac{1}{2}k_1x_1'^2 + \frac{1}{2}m_1u_1'^2 = \frac{1}{2}k_1A_1'^2$ ή $A_1' = 0{,}1\sqrt{2}$ m

**6.305** α) Στη Θ.Ι.: $mg - F_{ελ_1} - F_{ελ_2} = 0$ ή

$mg = k_1x_1 + k_2x_1$ (1) ή $x_1 = 0{,}4$ m

Στην τυχαία θέση:

$ΣF = mg - k_1(x_1 + x) - k_2(x_1 + x)$ (2)




Από (1) και (2): $ΣF = -(k_1 + k_2)x = -Dx$

με $D = k_1 + k_2 = 200$ N/m

$ω = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = 5$ rad/s, $A = 0{,}2$ m, $φ_0 = \frac{π}{2}$ rad

$x = 0{,}2ημ\left(5t + \frac{π}{2}\right)$ SI

β) Για $F_{ελ_2} = -50$ N, η φορά της είναι προς τα πάνω.

$|F_{ελ_2}| = k_2|x_2|$ ή $|x_2| = 0{,}5$ m, άρα το σώμα έχει απομάκρυνση $x = 0{,}1$ m από τη Θ.Ι.

$ΣF = -Dx = -20$ N

$υ = \pm ω\sqrt{A^2 - x^2} = \pm 0{,}5\sqrt{3}$ m/s

και για πρώτη φορά: $υ = -0{,}5\sqrt{3}$ m/s

$p = mυ = -4\sqrt{3}$ kg · m/s

γ) $U = 3K$ ή $\frac{4U}{3} = E$ ή $x' = \pm\frac{A\sqrt{3}}{2}$

Για πρώτη φορά: $x' = \frac{A\sqrt{3}}{2} = 0{,}1\sqrt{3}$ m

$α = -ω^2x' = -2{,}5\sqrt{3}$ m/s$^2$

$F_{ελ_2} = -k_2(x_1 + x') = -(40 + 10\sqrt{3})$ N και

$F_{ελ_1} = F_{ελ_2}$.

δ) $K = 3U$ ή $4U = E$ ή $x'' = \pm\frac{A}{2}$

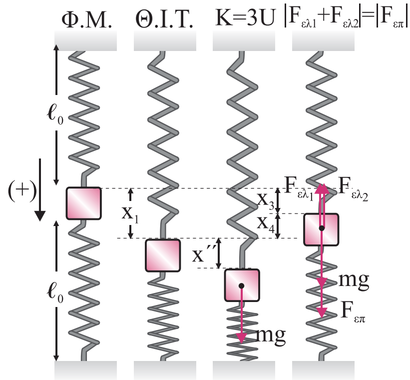
Για πρώτη φορά: $x'' = \frac{A}{2} = 0{,}1$ m

$|F_{ελ_1} + F_{ελ_2}| = |F_{επ}|$ ή $2kx_3 = Dx_4$ ή

$2kx_3 = 2kx_4$ ή $x_3 = x_4$

Αλλά $x_3 + x_4 = x_1$, άρα $x_3 = x_4 = 0{,}2$ m

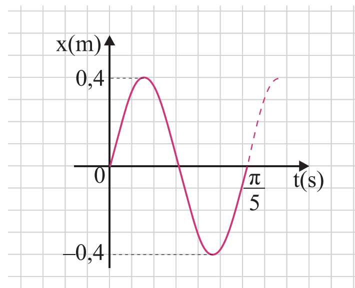
$W_w = -mg(x'' + x_4) = -24$ J




**6.306** α$_1$) $ω = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10$ rad/s, $T = \frac{2π}{ω} = \frac{π}{5}$ s

$υ = υ_{max} = ωA$ ή $A = 0{,}4$ m, $φ_0 = 0$

$x = 0{,}4ημ10t$ SI

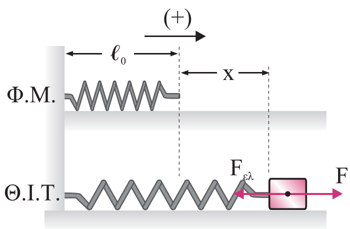



α$_2$) $υ_1 = υ_{max}συνωt_1 = 2$ m/s,

$υ_2 = υ_{max}συνωt_2 = 4$ m/s

$W_{F_{ελ}} = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}mυ_2^2 - \frac{1}{2}mυ_1^2 = 6$ J

β$_1$) $x_3 = Aημωt_3 = 0{,}2$ m




Θ.Ι.Τ.: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $F_{ελ} = F$ ή $kx = F$ ή

$x = 0{,}2\ m = x_3$

Άρα, τη χρονική στιγμή $t_3$ το σώμα διέρχεται από τη Θ.Ι. της νέας ταλάντωσης:

$υ'_{max} = υ_3 = ωAσυνωt_3 = 2\sqrt{3}\ m/s$

$$A' = \frac{υ'_{max}}{ω} = \frac{\sqrt{3}}{5}\ m$$

$$E = \frac{1}{2}kA'^2 = 6\ J$$

$β_2$) $|F_{επ}| = |F_{ελ}|$ ή $k|x'| = k(0{,}2 - |x'|)$ ή

$|x'| = 0{,}1\ m$

$$\frac{K}{U} = \frac{E - U}{U} = \frac{A'^2}{x'^2} - 1 = 11$$

**6.307** α) Για το σώμα $Σ_2$:

- στο κεκλιμένο επίπεδο:

$$α_2 = \frac{ΣF_2}{m_2} = gημφ = 5\ m/s^2$$

$$s_2 = \frac{h}{ημφ} = 0{,}9\ m$$

$$s_2 = \frac{1}{2}α_2t_2^2 \text{ ή } t_2 = 0{,}6\ s$$

$$υ_2 = α_2t_2 = 3\ m/s$$

- στο οριζόντιο επίπεδο

$$|α'_2| = \frac{ΣF'_2}{m_2} = \frac{T}{m_2} = μg = \frac{45}{11}\ m/s^2$$

$$υ'_2 = υ_2 - |α'_2|(t'_2 - t_2) \text{ ή } t'_2 = \frac{4}{3}\ s$$

$$s'_2 = υ_2(t'_2 - t_2) - \frac{1}{2}|α'_2|(t'_2 - t_2)^2 = 1{,}1\ m$$

$$s = s_2 + s'_2 = 2\ m$$

$$s = 8A \text{ ή } A = 0{,}25\ m \text{ και } 2T = t'_2 \text{ ή } T = \frac{2}{3}\ s$$

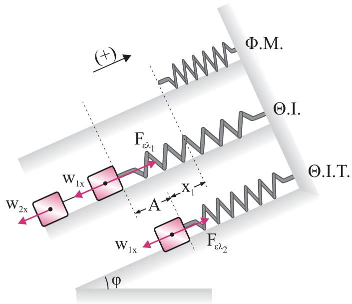
β) $T = 2π\sqrt{\dfrac{m_1}{k}}$ ή $k = 180\ N/m$

γ) Θ.Ι. $(m_1, m_2)$: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή

$(m_1 + m_2)gημφ = k(A + x_1)$ (1)

Θ.Ι.Τ.: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $m_1gημφ = kx_1$ (2)

Από (1), (2) έχουμε: $m_2 = 9\ kg$

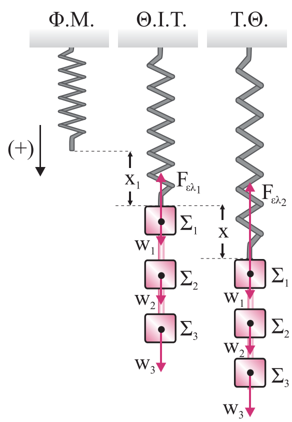



δ) $F_{ελ_{max}} = k(A + x_1) = 55\ N$

ε) $K = U$ ή $U = \dfrac{E}{2}$ ή $x = \pm 0{,}125\sqrt{2}\ m$

$$\left|\frac{Δp}{Δt}\right| = |ΣF| = |kx| = 22{,}5\sqrt{2}\ N$$

**6.308** α) Θα αποδείξουμε ότι το σύστημα των τριών σωμάτων εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Άρα, και κάθε σώμα ξεχωριστά εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.



Θ.Ι.Τ.: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $(m_1 + m_2 + m_3)g = kx_1$ (1)

Τ.Θ.: $\Sigma F = (m_1 + m_2 + m_3)g - k(x + x_1) =$

$= -kx = -Dx$

Άρα, το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2 + m_3}{D}} = \frac{\pi}{5}\,s,\ \omega = 10\ rad/s$$

$D_3 = m_3\omega^2 = 300$ N/m

β) $$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2}D_1A^2}{\frac{1}{2}D_2A^2} = \frac{D_1}{D_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{E_1}{E_3} = \frac{1}{3},\ \frac{E_2}{E_3} = \frac{2}{3}$$

γ) $\Sigma F_3 = -D_3x$ ή $w_3 + F_3 = -D_3x$ ή

$x = -0{,}05$ m

$\Sigma F_2 = -D_2x$ ή $w_2 + F'_3 + F_1 = -m_2\omega^2x$ ή

$F_1 = -25$ N

δ) $$\frac{\left(\frac{dK}{dt}\right)_1}{\left(\frac{dK}{dt}\right)_2} = \frac{\Sigma F_1 \cdot \upsilon}{\Sigma F_2 \cdot \upsilon} = \frac{-D_1x}{-D_2x} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}$$ ή

$$\left(\frac{dK}{dt}\right)_1 = -5\ J/s$$

**6.309** α) $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $N + F_{\varepsilon\lambda_1} = w$ ή

$kx_1 = mg - N$ ή $x_1 = 0{,}1$ m

β) $\vec{p}_{\alpha\rho\chi_x} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda_x}$ ή $0 = m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2$ ή

$\upsilon_1 = -1$ m/s

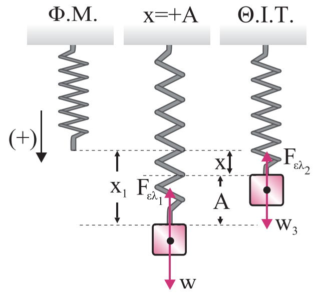
Το σώμα $\Sigma_3$ αρχίζει να κινείται προς τα πάνω χωρίς αρχική ταχύτητα.

γ) Θ.Ι.Τ.: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $kx = m_3g$ ή $x = 0{,}05$ m

Άρα: $A = x_1 - x = 0{,}05$ m

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\,rad,\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m_3}} = 10\sqrt{2}\ rad/s$$

$$x = 0{,}05\eta\mu\left(10\sqrt{2}\,t + \frac{\pi}{2}\right)\ SI$$




δ) Το σώμα $\Sigma_3$ σταματά στιγμιαία για πρώτη φορά στη θέση $x = -A$ τη χρονική στιγμή

$t_1 = \frac{T}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{20}$ s έχοντας διανύσει απόσταση

$s_3 = 2A = 0{,}1$ m.

Το σώμα $\Sigma_1$ έχει διανύσει απόσταση:

$$s_1 = |\upsilon_1|\frac{T}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{20}\ m$$

Άρα: $d = \sqrt{s_1^2 + s_3^2} = 0{,}1\sqrt{6}$ m

ε) $s_2 = \upsilon_2t_2$ ή $t_2 = \frac{\pi\sqrt{2}}{80}$ s

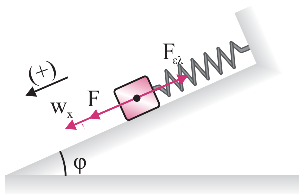
$$x_3 = 0{,}05\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}025\sqrt{2}\ m$$

$$\frac{K_3}{E_3} = \frac{E_3 - U_3}{U_3} = \frac{E_3}{U_3} - 1 = \frac{A^2}{x_3^2} - 1 = 1$$

**6.310** α₁) $\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}$ ή

$$\alpha = \frac{mg\eta\mu\varphi + F - F_{\varepsilon\lambda}}{m} = 6\ m/s^2$$

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.




α$_2$) Στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος έχουμε:

$\Sigma\vec{F} = 0$ ή $mgημφ = kx_1$ ή $x_1 = \dfrac{1}{80}$ m

$d = \dfrac{1}{2}\alpha t_1^2 = 0{,}25$ m

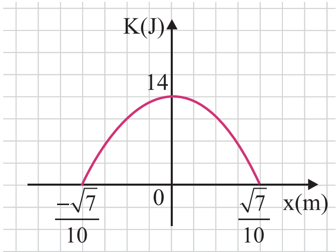
$x = x_1 + d = \dfrac{21}{80}$ m

β$_1$) $υ_1 = \alpha t_1 = \sqrt{3}$ m/s

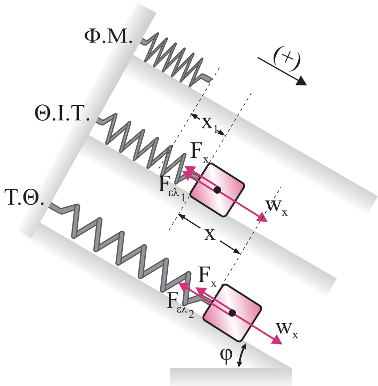
ΑΔΕΤ: $E = K + U$ ή $E = \dfrac{1}{2}mυ_1^2 + \dfrac{1}{2}kd^2 = 14$ J

β$_2$) $E = \dfrac{1}{2}kA^2$ ή $A = \dfrac{\sqrt{7}}{10}$ m

$K = E - U = E - \dfrac{1}{2}kx^2 = 14 - 200x^2$ SI




**6.311** α$_1$) Θ.Ι.Τ.: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $w_x = F_x + F_{ελ_1}$ ή $mgημφ = Fημφ + kx_1$ (1)




Τ.Θ.: $\Sigma F = w_x - F_x - F_{ελ_2}$ ή

$\Sigma F = mgημφ - Fημφ - k(x + x_1) = -kx$

Άρα, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k = 100$ N/m.

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = \dfrac{2\pi}{5}$ s

α$_2$) Από τη σχέση (1) έχουμε: $x_1 = 0{,}14$ m

Στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει:

$\Sigma\vec{F} = 0$ ή $mgημφ = kx_2$ ή

$mgημφ = k(A + x_1)$ ή $A = 0{,}06$ m

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 5$ rad/s, $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ rad

$x = 0{,}06ημ\left(5t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ SI

β$_1$) Θ.Ι.Τ. (για τη νέα ταλάντωση): $mgημφ = kx_2$ ή $x_2 = 0{,}2$ m

Η δύναμη F καταργείται στη θέση $x = -0{,}06$ m, επομένως απέχει από το φυσικό μήκος του ελατηρίου απόσταση $d = 0{,}14 - 0{,}06 = 0{,}08$ m. Αυτή η θέση είναι ακραία θέση της ταλάντωσης ($υ = 0$).

Επειδή η Θ.Ι. της νέας ταλάντωσης απέχει από το Φ.Μ. του ελατηρίου απόσταση $x_2 = 0{,}2$ m, το πλάτος της νέας ταλάντωσης είναι:

$A' = x_2 - d = 0{,}12$ m

$υ_{max} = \omega A' = 0{,}6$ m/s

$\alpha_{max} = \omega^2 A' = 3$ m/s$^2$

β$_2$) $|F_{ελ_{max}}| = k(x_2 + A') = 32$ N.

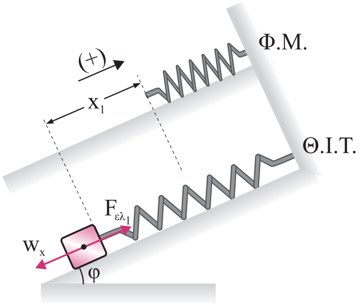
**6.312** α) ΘΜΚΕ: $\dfrac{1}{2}mυ^2 - \dfrac{1}{2}mυ_0^2 = -mgημφd$

ή $υ = \sqrt{3}$ m/s

β) Θ.Ι.Τ.: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $mgημφ = kx_1$ ή

$x_1 = 0{,}2$ m

ΑΔΕΤ: $\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}kA^2$ ή $A = 0{,}4$ m



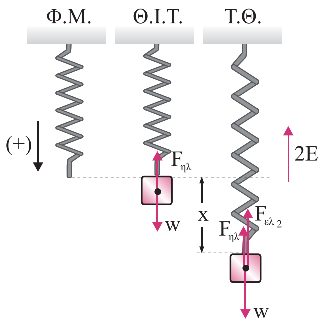

γ) $\frac{dp}{dt} = ΣF = -kx$ ή $x = -0{,}1$ m

$F_{ελ} = k(x_1 + |x|) = 30$ N

**6.313** α) Θ.Ι.Τ.: $Σ\vec{F} = 0$ ή $mg = F_{ελ_1} + q \cdot 2E$ ή

$F_{ελ_1} = 0$

Επομένως, η Θ.Ι.Τ. είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.




Τ.Θ.: $ΣF = w - F_{ηλ} - F_{ελ_2} = -F_{ελ_2} = -kx$

Άρα, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$.

$T = 2π\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{π}{5}$ s

β) Η αρχική θέση ισορροπίας του σώματος είναι ακραία θέση της ταλάντωσης. Άρα:

$Σ\vec{F} = 0$ ή $w = qE + kA$ ή $A = 0{,}05$ m

$φ_0 = \frac{π}{2}$ rad, $ω = \frac{2π}{T} = 10$ rad/s

$α = -5ημ\left(10t + \frac{π}{2}\right)$ SI

γ) $s = 2A + \frac{A}{2}$

Άρα, το σώμα βρίσκεται στη θέση:

$x = -\frac{A}{2} = -0{,}025$ m

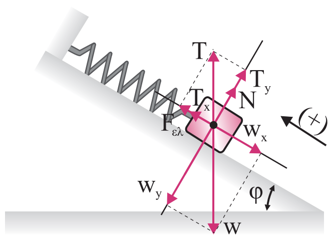
$F_{ελ} = k\frac{A}{2} = 2{,}5$ N

δ) $υ = \frac{p}{m} = 0{,}25$ m/s

$α = ω\sqrt{υ_{max}^2 - υ^2} = 2{,}5\sqrt{3}$ m/s²

**6.314** α₁) $Σ\vec{F}_x = 0$ ή $w_x = T_x + F_{ελ}$ ή

$Tημφ = mgημφ - kx$ ή $T = 10$ N



$\alpha_2$) $\Sigma\vec{F}_y = 0$ ή $T_y + N = w_y$ ή

$N = mg\sigma\upsilon\nu\varphi - T\sigma\upsilon\nu\varphi = 24$ N

$\beta_1$) Το σώμα ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση $x = +A$.

Θ.Ι.Τ.: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $kx_1 = mg\eta\mu\varphi$ ή $x_1 = 0{,}24$ m

$A = x_1 - x = 0{,}06$ m

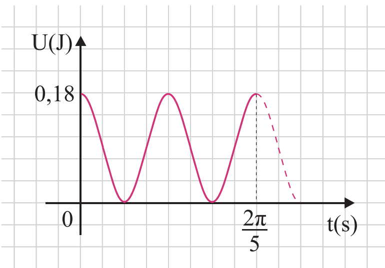
$$E = \frac{1}{2}kA^2 = 0{,}18 \text{ J}$$

$\beta_2$) $U = \frac{1}{2}kx^2 = E\eta\mu^2(\omega t + \varphi_0)$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 5 \text{ rad/s}, \ \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5} \text{ s}$$

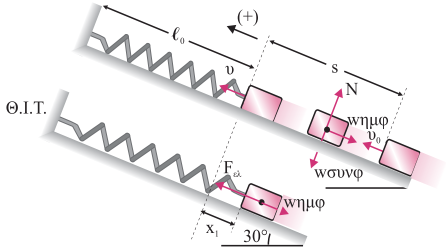
$$U = 0{,}18\eta\mu^2\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ SI}$$




**6.315** α) ΘΜΚΕ: $K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_w$ ή

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -mg\eta\mu\varphi \cdot s \ \text{ ή } \ \upsilon = \sqrt{3}\,\text{m/s}$$

β) Θ.Ι.Τ.: $mg\eta\mu\varphi = kx_1$ ή $x_1 = 0{,}1$m




Το σώμα ξεκινά την ταλάντωση από τυχαία θέση με $x = x_1$.

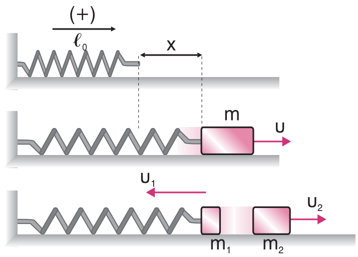
ΑΔΕΤ: $\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2$ ή $A = \frac{\sqrt{7}}{10}$m

γ) $W_{F_{\varepsilon\pi}} = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = 0 - \frac{1}{2}m\upsilon^2 = -3$J

δ) $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \Sigma F = -kx_1 = -10$N

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma F \cdot \upsilon = -kx_1 \cdot \upsilon = -10\sqrt{3}\,\text{J/s}$$

**6.316** α) $E_{\pi\rho} = E_{\tau\varepsilon\lambda} - E_{\alpha\rho\chi}$




$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\alpha\lambda} = \frac{1}{2}kA^2 = 200\text{J}$$

Στη θέση $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$m: $\upsilon = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 5$m/s

Από αρχή διατήρησης ορμής: $\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή

$m\upsilon = m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2$ ή $\upsilon_1 = -30$m/s

$E_{τελ} = K_1 + U_1 + K_2 = \frac{1}{2}m_1υ_1^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m_2υ_2^2 =$

$= 1.016,66\,J$

$E_{πρ} = 816,66\,J$

β) ΑΔΕΤ: $\frac{1}{2}m_1υ_1^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA'^2$ ή $A' = \sqrt{3}m$

$ω = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20\,rad/s$

γ) $\frac{K}{U} = \frac{E-U}{U} = \frac{E}{U} - 1 =$

$$\frac{\frac{1}{2}kA'^2}{\frac{1}{2}k\left(\frac{A'}{2}\right)^2} - 1 = 3$$

δ) $W_{F_{ελ}} = W_{F_{επ}} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = -450J$

**6.317** Α. Για t = 0: 0,4 = 0,4ημ$φ_0$ ή

$φ_0 = \frac{π}{2}$ rad

$ω = \sqrt{\frac{k}{m}} = 5\,rad/s,\ x = 0,4\,ημ\left(5t + \frac{π}{2}\right)SI$

Β. Κατά τη διάσπαση, ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $0 = m_Aυ_A + m_Bυ_B$ ή

$υ_B = -4\sqrt{2}\,m/s$

β$_1$) Κατά τη διάσπαση, δε μεταβάλλεται η δυναμική ενέργεια των σωμάτων και του ελατηρίου. Η ενέργεια Ε που προσφέρθηκε είναι:

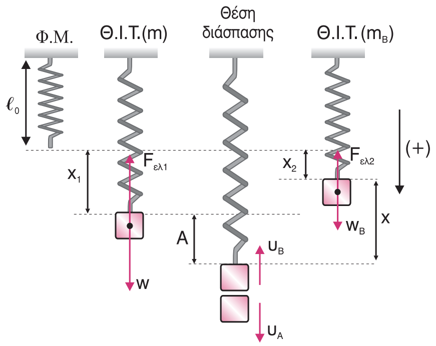
$E = K_A + K_B = \frac{1}{2}m_Aυ_A^2 + \frac{1}{2}m_Bυ_B^2 = 64\,J$

β$_2$) Το $m_B$ ξεκινά την ταλάντωση από τυχαία θέση που απέχει x από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσής του.

Θ.Ι.Τ.(m): $mg = kx_1$ ή $x_1 = 0,4\,m$

Θ.Ι.Τ.($m_B$): $m_Bg = kx_2$ ή $x_2 = 0,2\,m$

$x = A + x_1 - x_2 = 0,6m$




Από ΑΔΕΤ: $\frac{1}{2}m_Bυ_B^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA'^2$ ή

$A' = 1m$

β$_3$) $W_{F_{επ}} = U_{αρχ} - U_{τελ} = 18\,J$

**6.318** α) Για t = 0: $A = Aημφ_0$ ή $φ_0 = \frac{π}{2}rad$

$ω = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10\,rad/s,\ x = 1ημ\left(10t + \frac{π}{2}\right)SI\ (1)$

β) Για τη χρονική στιγμή της σύγκρουσης ισχύει:

Από (1): $\frac{\sqrt{2}}{2} = ημ\left(10t + \frac{π}{2}\right)$ ή $t = \frac{π}{40}s$

$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{32}m$

γ) Ακριβώς πριν από τη σύγκρουση:

$E_{μηχ.αρχ} = m_2gh + \frac{1}{2}kA^2 = 50,3125\,J$

Αμέσως μετά την κρούση:
Από αρχή διατήρησης της ορμής στον άξονα x΄x έχουμε: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_1υ = (m_1 + m_2)υ_K$

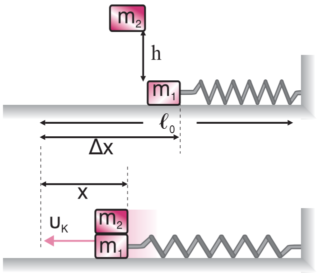
Επειδή $υ = 10συν\left(10 \cdot \frac{π}{40} + \frac{π}{2}\right) = -5\sqrt{2}\,m/s$,

$υ_K = \frac{-5\sqrt{2}}{2}m/s$

$E_{μηχ.τελ} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)υ_K^2 = 37,5\,J$

$π_K\% = \frac{E_{μηχ.τελ} - E_{μηχ.αρχ}}{E_{μηχ.αρχ}} = -25,46\%$

δ) ΑΔΕΤ για το συσσωμάτωμα:




$$\frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon_K^2 \;\; ή \;\; A' = \frac{\sqrt{3}}{2}m$$

ε) Στην ακραία θέση, γιατί δε μεταβάλλεται η κινητική και η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης.

**6.319** α) Από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας:

$$m_1gh = \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 \quad ή \quad \upsilon = 8m/s$$

β) $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή

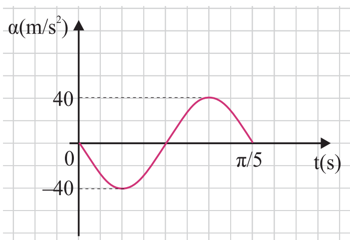
$$m_1\upsilon = (m_1+m_2)\upsilon_K \quad ή \quad \upsilon_K = 4m/s$$

Το συσσωμάτωμα ξεκινά την ταλάντωση από τη Θ.Ι.Τ., άρα:

$$\upsilon_K = \upsilon_{max} = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}\cdot A \;\; ή \;\; A = 0{,}4m$$

γ) $\omega = 10rad/s, \;\; \varphi_0 = 0$

$$\alpha = -40ημ10t \;\; και \;\; T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{5}s$$




δ) $F_{ελ} = (m_1+m_2)\alpha$. Για $t = \frac{\pi}{40}s$: $F_{ελ} = 40\sqrt{2}N$

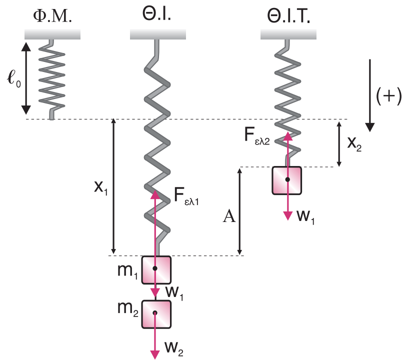
ε) $p = 8$ συν$10t$

Για $t_1 = \frac{\pi}{60}s$: $p_1 = 4\sqrt{3}kg\cdot m/s$

Για $t_2 = \frac{\pi}{30}s$: $p_2 = 4kg\cdot m/s$

$$\pi\% = \frac{p_2-p_1}{p_1}\cdot 100\% = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right)\cdot 100\%$$

**6.320** α) Βλέπε βασική άσκηση 6.81: D = k




Θ.Ι.: $(m_1+m_2)g = kx_1 \quad ή \quad k = 100N/m$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = \frac{\pi}{5}s$$

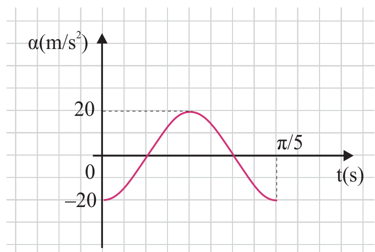
β) Το $m_1$ ξεκινά την ταλάντωση από την ακραία θέση $x = A$.

Θ.Ι.Τ.: $m_1g = kx_2 \quad ή \quad x_2 = 0{,}1m$

Άρα: $A = x_1 - x_2 = 0{,}2m$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}rad, \; \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10rad/s$$

$$\alpha = -20ημ\left(10t+\frac{\pi}{2}\right) \;\; SI$$



γ) Η Θ.Ι. απέχει $x_2 = 0{,}1\text{m}$ από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και $A > x_2$, άρα το σώμα διέρχεται από τη θέση του φυσικού μήκους.

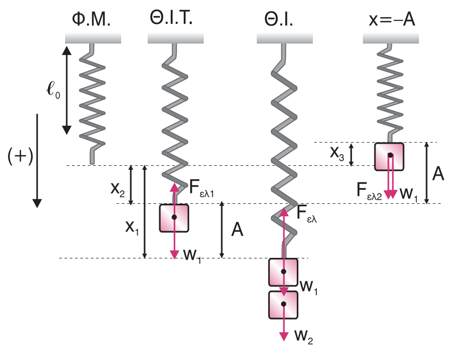
δ) $\dfrac{\Delta p}{\Delta t} = \Sigma F = -kx = 10\text{N}$

$$\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} = \pm\sqrt{3}\,\text{m/s}$$

ε) $W_{w_1} = -m_1 g 2A = -4\text{J}$

Στη θέση $x = -A$ το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $x_3 = A - x_2 = 0{,}1\text{m}$.

$$W_{F_{\varepsilon\lambda}} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_3^2 = 4\text{J}$$




**6.321** α) Θ.Ι.: $(m_1 + m_2)g = kx_1$ ή $k = 100\text{N/m}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = 5\,\text{rad/s}$$

$E_1 = \dfrac{1}{2}m_1\omega^2 A^2 = 24\,\text{J}$ και ομοίως $E_2 = 8\text{J}$.

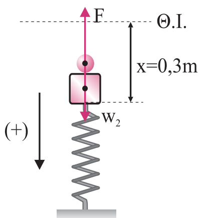
β) Για το $m_2$:

$\Sigma F = -D_2 x$ ή

$m_2 g - F = -m_2\omega^2 x$ (1)

Από την (1) για $x = 0{,}3$ m:

$F = 17{,}5\text{N}$

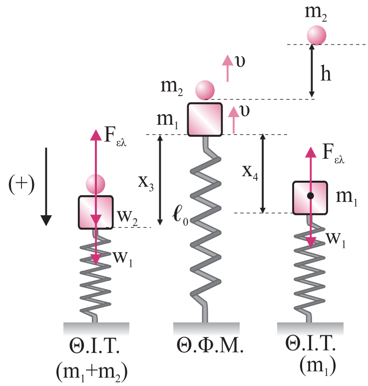



γ) Πρέπει $F = 0$. Από την (1):

$F = m_2 g + m_2\omega^2 x_3 = 0$

Άρα $x_3 = -0{,}4\text{m}$, δηλαδή στη θέση φυσικού μήκους.

δ) Υπολογισμός ταχύτητας σωμάτων, όταν χάνουν επαφή:




$$\upsilon = -\omega\sqrt{A^2 - x_3^2} = -2\sqrt{3}\,\text{m/s}$$

Θ.Ι.Τ. $(m_1)$: $\Sigma F = 0$ ή $m_1 g = kx_4$ ή $x_4 = 0{,}3\text{m}$

ΑΔΕΤ: $\dfrac{1}{2}kx_4^2 + \dfrac{1}{2}m_1\upsilon^2 = \dfrac{1}{2}kA'^2$ ή $A' = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}\text{m}$

ε) ΘΜΚΕ για το $m_2$:

$$0 - \frac{1}{2}m_2\upsilon^2 = -m_2 g h \quad \text{ή} \quad h = 0{,}6\text{m}$$

**6.322** α) $\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή $m_2\upsilon_0 = (m_1 + m_2)\upsilon_K$ ή

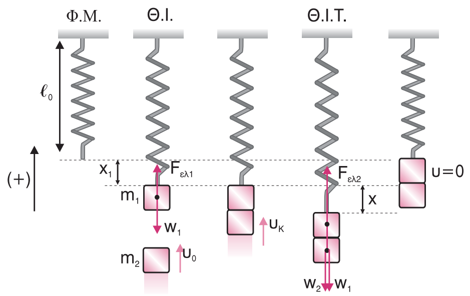
$$\upsilon_K = \sqrt{\frac{3}{2}}\ \text{m/s}$$

Θ.Ι.: $m_1 g = kx_1$ ή $x_1 = 0{,}1\text{m}$

Θ.Ι.Τ.: $(m_1 + m_2)g = k(x_1 + x)$, άρα $x = 0{,}1\text{m}$

ΑΔΕΤ: $\dfrac{1}{2}kx^2 + \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_\kappa^2 = \dfrac{1}{2}kA^2$

ή $A = 0{,}2\text{m}$




β) $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1 + m_2}} = 5\sqrt{2}\ \text{rad/s}$

και $υ_{max} = ωA = \sqrt{2}$ m/s

γ) $W_{F_{επ}} = K_{τελ} - K_{αρχ} = -1{,}5\,J$

$W_w = -(m_1 + m_2)gx_1 = -2\,J$

$W_{F_{ελ}} = W_{F_{επ}} - W_w = 0{,}5\,J$

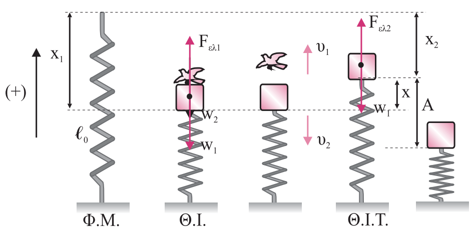
δ) Για το $m_2$: $\Sigma F = -D_2 x$ ή $F_2 - w_2 = -D_2 x$

Για x = 0, έχουμε: $F_2 = w_2 = 10$ N

**6.323** α) $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή

$0 = +m_1υ_1 + m_2υ_2$ ή $υ_1 = -0{,}4\,m/s$

Η μηχανική ενέργεια Ε που πρόσφερε το περιστέρι στο σύστημα είναι: $E = K_1 + K_2 = 0{,}48\,J$




β) $\Sigma F = \left|\dfrac{\Delta p}{\Delta t}\right| = \dfrac{|m_1υ_1|}{t} = 4\,N$

γ) Θ.Ι.: $(m_1 + m_2)g = kx_1$ ή $x_1 = 0{,}06\,m$

Θ.Ι.Τ.: $m_1 g = kx_2$ ή $x_2 = 0{,}05\,m$

Άρα: $x = x_1 - x_2 = 0{,}01\,m$

ΑΔΕΤ: $\dfrac{1}{2}kx^2 + \dfrac{1}{2}m_1υ_1^2 = \dfrac{1}{2}kA^2$ ή $A = 0{,}03\,m$

δ) Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι στη θέση x = – A, δηλαδή:

$U_{max} = \dfrac{1}{2}k(A + x_2)^2 = 0{,}64\,J$

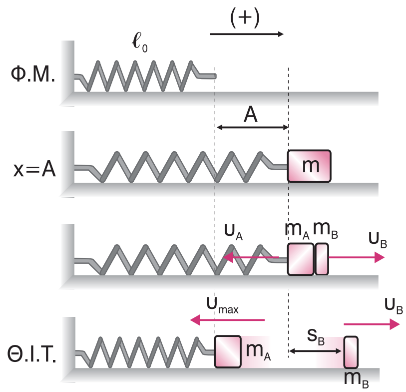
**6.324** α) Κατά τη διάσπαση: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή

$0 = m_Bυ_B + m_Aυ_A$ ή $υ_A = -1\,m/s$

$E_{αρχ} = \dfrac{1}{2}kA^2 = 0{,}5\,J$

$E_{τελ} = \dfrac{1}{2}kA^2 + \dfrac{1}{2}m_Aυ_A^2 + \dfrac{1}{2}m_Bυ_B^2 = 6{,}5\,J$

$π_E\,\% = \dfrac{E_{τελ} - E_{αρχ}}{E_{αρχ}} \cdot 100\% = 1.200\%$




β) ΘΜΚΕ για το $m_B$:

$\Delta K = W_{\Sigma F}$ ή $\dfrac{1}{2}m_Bυ_B^2 = W_{\Sigma F} = 4{,}5\,J$

γ) ΑΔΕΤ: $\dfrac{1}{2}kA^2 + \dfrac{1}{2}m_Aυ_A^2 = \dfrac{1}{2}kA'^2$

ή $A' = 0{,}2\,m$

$K_{max} = E_{ταλ} = \dfrac{1}{2}kA'^2 = 2\,J$

**6.325** α) Από το διάγραμμα $U = f(t)$:

$\dfrac{T}{4} = \dfrac{\pi}{40}\,s$ ή $T = 0{,}1\pi\,s$

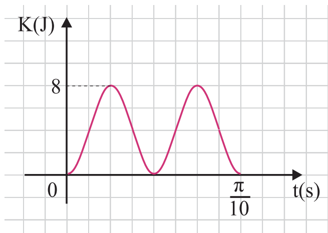
$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ ή $k = 400 N/m$

β) $U_{max} = \dfrac{1}{2}kA^2 = 8J$ ή $A = 0,2m$

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 20\ rad/s$ και $\upsilon_{max} = \omega A = 4m/s$

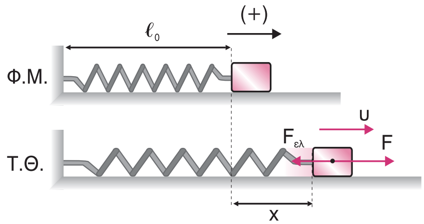
$\alpha = \pm\omega\sqrt{\upsilon_{max}^2 - \upsilon^2}$ ή $\alpha = \pm 20\sqrt{16 - \upsilon^2}$

γ) $K = 8\sigma\upsilon\nu^2\left(20t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ SI




δ) $p = m\upsilon = 4\sigma\upsilon\nu\left(20t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ SI

**6.326** α$_1$) Τ.Θ.: $\Sigma F = F - F_{\varepsilon\lambda} = 100 + 100x - 100x =$
$= 100N$




$\Sigma F = m_A\alpha$ ή $\alpha = 2m/s^2$

Το σώμα Α εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

α$_2$) $x = \dfrac{1}{2}\alpha t^2$ ή $x = 0,75m$

Β. Για $t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}s$, $\upsilon = \alpha t = \sqrt{3}m/s$

ΑΔΕΤ: $\dfrac{1}{2}kx^2 + \dfrac{1}{2}m_A\upsilon^2 = \dfrac{1}{2}kA^2$ ή $A = \dfrac{\sqrt{33}}{4}m$

Γ. Μετά τη σύγκρουση το πλάτος παραμένει ίδιο, γιατί η σύγκρουση γίνεται στη θέση $x = +A$, όπου η ταχύτητα είναι μηδέν πριν και μετά τη σύγκρουση.

$\upsilon_{max_1} = \omega_1 A$ και $\upsilon_{max_2} = \omega_2 A$

$$\frac{\upsilon_{max_1}}{\upsilon_{max_2}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{\dfrac{k}{m_A}}}{\sqrt{\dfrac{k}{m_A + m_B}}} = \sqrt{2}$$

**6.327** α) $E_{\alpha\rho\chi} = \dfrac{1}{2}kA^2 = 24J$, $E_{\tau\varepsilon\lambda} = \dfrac{1}{2}kA'^2 = 96J$

$\dfrac{A}{A'} = \dfrac{1}{2}$

β) $\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή $m_2\upsilon = (m_1 + m_2)\upsilon_\kappa$

ή $\upsilon_\kappa = \dfrac{\upsilon}{20}$ (1)

ΑΔΕΤ για το συσσωμάτωμα:

$K + E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή $\dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_\kappa^2 = 72$ (2)

Από (1) και (2): $\upsilon = 240\ m/s$

γ) Από τη σχέση (1): $\upsilon_\kappa = 12 m/s$

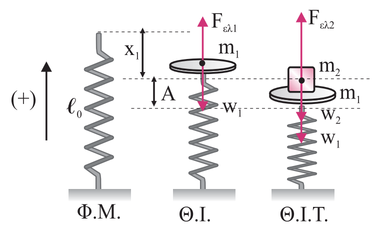
δ) $\pi_E\% = \dfrac{p_{B_{\tau\varepsilon\lambda}} - p_{B_{\alpha\rho\chi}}}{p_{B_{\alpha\rho\chi}}}100\% = \dfrac{\upsilon_\kappa - \upsilon}{\upsilon}100\% = -95\%$

**6.328** α) $D = k$, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1 + m_2}{k}} = \dfrac{2\pi}{5}s$

β) $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 5 rad/s$

$D_1 = m_1\omega^2 = 75 N/m$ και $D_2 = m_2\omega^2 = 25 N/m$

γ) Υπολογισμός πλάτους Α:



Θ.Ι.: $m_1 g = kx_1$

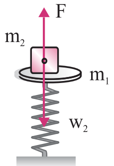
Θ.Ι.Τ.: $(m_1 + m_2)g = k(x_1 + A)$

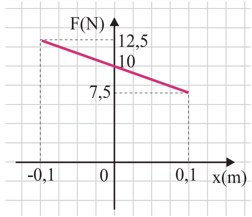
Άρα: $A = 0{,}1m$

Για το σώμα $m_2$: $\Sigma F = -D_2 x$ ή

$F - w_2 = -25x$ ή $F = 10 - 25x$

με $-0{,}1m \le x \le 0{,}1m$




δ) $x = 0{,}1\eta\mu\left(5t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ SI

Για $t = \dfrac{3\pi}{10}s$, $x = 0$ και $F = 10N$

**6.329** α) $D = k$ και $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = \dfrac{\pi}{5}s$

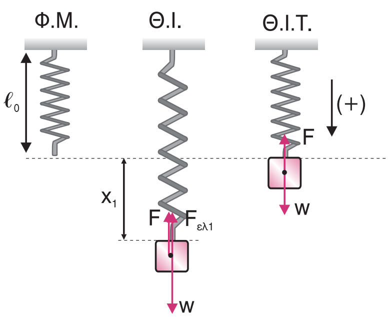
β) Θ.Ι.: $mg = kx_1$ ή $x_1 = 0{,}1m$

Θ.Ι.Τ.: $F + F_{\varepsilon\lambda} = mg$ ή $F_{\varepsilon\lambda} = 0$

Άρα η Θ.Ι.Τ. είναι η θέση φυσικού μήκους και $A = x_1 = 0{,}1m$.

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 10 rad/s$ και $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2} rad$

$x = 0{,}1\eta\mu\left(10t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ SI




γ) $\dfrac{\Delta p}{\Delta t} = \Sigma F = -kx$

Για $t = \dfrac{\pi}{10}s$, $x = -0{,}1m$ και $\dfrac{\Delta p}{\Delta t} = 1N$

$\dfrac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma F \cdot \upsilon = 0$, γιατί $\upsilon = 0$, αφού το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = -A$.

δ) $W_F = F\Delta x = 0$, γιατί $\Delta x = 0$ στη διάρκεια μίας περιόδου.

**6.330** α) $D_1 = m_1\omega^2$, $D_2 = m_2\omega^2$ και

$D = (m_1 + m_2)\omega^2 = k$

Άρα: $D_1 = \dfrac{9k}{10}$ και $D_2 = \dfrac{k}{10}$

β) $E_2 = \dfrac{1}{2}D_2A^2$ , $E = \dfrac{1}{2}DA^2$ , άρα: $E_2 = 10\%E$

γ) Για $t_1 = \dfrac{T}{12}$, $\upsilon_1 = -\dfrac{\upsilon_{max}}{2}$ και

για $t_2 = \dfrac{T}{4}$, $\upsilon_2 = -\upsilon_{max}$

$W_{F_{\varepsilon\pi}} = K_2 - K_1 = \dfrac{3}{8}m_2\upsilon_{max}^2$

δ) $\Delta p = -m_2\upsilon_{max} + m_2\dfrac{\upsilon_{max}}{2} = -\dfrac{m_2\upsilon_{max}}{2}$

**6.331** α) $D = k$ (βλέπε βασική άσκηση 6.81)

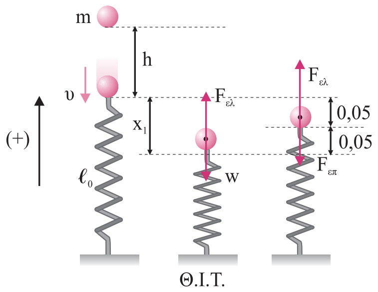
$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = \dfrac{\pi}{5}s$ και $f = \dfrac{5}{\pi}Hz$

β) ΘΜΚΕ για το m:

$\dfrac{1}{2}m\upsilon^2 = mgh$ ή $\upsilon = \sqrt{3}\, m/s$

Θ.Ι.Τ.: $mg = kx_1$ ή $x_1 = 0{,}1m$

ΑΔΕΤ: $\dfrac{1}{2}kx_1^2 + \dfrac{1}{2}m\upsilon^2 = \dfrac{1}{2}kA^2$ ή $A = 0{,}2m$




γ) $\dfrac{K}{U} = \dfrac{E-U}{U} = \dfrac{E}{U} - 1 =$

$$\frac{\frac{1}{2}DA^2}{\frac{1}{2}D\frac{3}{4}A^2} - 1 = \frac{1}{3}$$

δ) $F_{επ} = -k\dfrac{A}{4} = -5N$ και $F_{ελ} = k\dfrac{A}{4} = 5N$

Άρα: $\dfrac{F_{επ}}{F_{ελ}} = -1$

**6.332** α) $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1}} = 10 rad/s$

$x = 0{,}3ημ10t$ SI και $υ = 3συν10t$ SI

Για $t = \dfrac{\pi}{60}s$, $p = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} kg \cdot m/s$

β) Για $t = \dfrac{T}{4}$, $x = A = 0{,}3m$

$W_{F_{επ}} = K_{τελ} - K_{αρχ} = -4{,}5J$

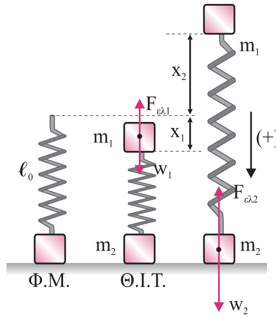
$W_{w_1} = mgA = 3J$ και

$W_{F_{ελ}} = W_{F_{επ}} - W_{w_1} = -7{,}5J$

γ) Για να χάσει επαφή, πρέπει το ελατήριο να είναι επιμηκυμένο, ώστε η $F_{ελ}$ να έχει φορά προς τα πάνω. Όταν οριακά χάνεται η επαφή, η δύναμη επαφής με το έδαφος είναι μηδέν και ισχύει: $F_{ελ_2} = w_2$ ή $kx_2 = m_2g$ ή $x_2 = 0{,}4m$

Θ.Ι.Τ.: $m_1g = kx_1$ ή $x_1 = 0{,}1m$

Άρα: $A = x_1 + x_2 = 0{,}5m$




**6.333** α) Από x = f(t): A = 0,1m και ω = 10rad/s

$E = \dfrac{1}{2}kA^2$ ή $k = 1.200 N/m$

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1}}$ ή $m_1 = 12kg$

β) $E' = \dfrac{1}{2}kA'^2 = 36J$ και

$\omega' = \sqrt{\dfrac{k}{m_1+m_2}} = \dfrac{10\sqrt{6}}{3} rad/s$

γ) $υ_1 = 1συν10t$ και για $t = \dfrac{\pi}{10}s$: $υ_1 = -1m/s$

$|υ_K| = \omega' A' = 2m/s$

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $-m_1|υ_1| - m_2υ_2 = (m_1+m_2)υ_K$

ή $υ_2 = -4m/s$

**6.334** α) Από ΑΔΕΤ:

$\dfrac{1}{2}kx^2 + \dfrac{1}{2}m_1υ_1^2 = \dfrac{1}{2}kA^2$ ή $υ_1 = 0{,}8m/s$

β) $υ_1' = \dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}υ_1 = 0{,}4m/s$ και

$υ_2' = \dfrac{2m_1}{m_1+m_2}υ_1 = 1{,}2m/s$

γ) $\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = \frac{1}{2}kA'^2$ ή $A' = 0{,}072m$

**6.335** α) Τη στιγμή της σύγκρουσης το $m_2$ είναι ακίνητο. Άρα:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -1m/s \text{ και}$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = 2m/s$$

Από ΑΔΕΤ: $\frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = \frac{1}{2}kA'^2$ ή $A'=0{,}64m$

β) $$\pi_\kappa\% = \frac{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}100\% = -88{,}89\%$$

γ) Από ΘΜΚΕ:

$$W_F = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = -16J$$

**6.336** α) Από ΑΔΜΕ:

$$m_3g(\ell - \ell\sigma\upsilon\nu 60^\circ) = \frac{1}{2}m_3\upsilon_3^2 \text{ ή } \upsilon_3 = 4m/s$$

β) Επειδή τα $m_3$, $m_1$ έχουν ίσες μάζες, κατά τη σύγκρουση ανταλλάσσουν ταχύτητες. Επομένως:

$\upsilon_3' = 0$ και $\upsilon_1' = 4m/s$

Μετά τη σύγκρουση του $m_1$ με το $m_2$:

$$\upsilon_1'' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1' = -2m/s \text{ και}$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1' = 2m/s$$

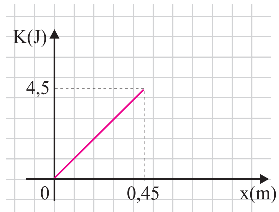
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = 5rad/s$$

$\upsilon_2' = \upsilon_{max} = \omega A$ ή $A = 0{,}4m$

γ) $T_3 = m_3g + m_3\frac{\upsilon_3^2}{\ell} = 40N$ και $T_3' = m_3g = 20N$

**6.337** α) $K = m_1gx = 10x$ SI

με $0 \leq x \leq 0{,}45m$




β) Από ΘΜΚΕ: $m_1gh = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2$ ή $\upsilon_1 = 3$ m/s

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -1m/s \text{ και}$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = 2m/s$$

γ) Η θέση ισορροπίας δε μεταβάλλεται, άρα:

$\upsilon_2' = \upsilon_{max}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = 10rad/s$$

$\upsilon_2' = \omega A$ ή $A = 0{,}2m$

δ) $$\pi\% = \frac{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}100\% = 11{,}11\%$$

**6.338** α) Από ΘΜΚΕ: $\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = -m_1gh$

ή $\upsilon_1 = 6m/s$

β) Επειδή $m_1 = m_2$, τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες: $\upsilon_1' = 0$, $\upsilon_2' = 6m/s$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = 10rad/s$$

$\upsilon_2' = \upsilon_{max} = \omega A$ ή $A = 0{,}6m$ και

$\alpha_{max} = \omega^2 A = 60m/s^2$

γ) $x = 0{,}6\eta\mu 10t$ SI

Για $t_1 = \frac{\pi}{60} s : x = 0{,}3m$

$\Sigma F = -kx$ ή $-m_2 g + F_{\varepsilon\lambda} = -kx$ ή $F_{\varepsilon\lambda} = -40N$

δ) Το $m_2$ σταματά στιγμιαία μετά από χρόνο

$\Delta t = \frac{T}{4}$.

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{5} s$, άρα $\Delta t = \frac{\pi}{20} s$

Στο ίδιο χρονικό διάστημα το $m_1$ έχει διανύσει

απόσταση: $h_1 = \frac{1}{2} g \Delta t^2 = 0{,}125m$

$\Delta x = h_1 + A = 0{,}725m$

**6.339** α) Η σύγκρουση του $m_1$ με το έδαφος είναι ελαστική, άρα δε χάνεται ενέργεια.
Από ΘΜΚΕ για το $m_1$ από την αρχική του θέση μέχρι να συγκρουστεί με το $m_2$:

$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 - \frac{1}{2} m_1 u_0^2 = -m_1 g h$ ή $u_1 = 5m/s$

β) $u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 = -2{,}5 m/s$ και

$u_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 = 2{,}5 m/s$

γ) $u_2' = u_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m_2}} A$ ή $A = 0{,}25m$

$U_{max} = E = \frac{1}{2} k A^2 = 18{,}75J$

δ) $W_{F_{\varepsilon\pi}} = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda} =$

$= 0 - \frac{1}{2} k \left(\frac{A}{2}\right)^2 = -4{,}687J$

**6.340** α) $h = \ell$ συν$60^o = \frac{11}{15} m$

Από ΑΔΜΕ για το σώμα $m_1$:

$\frac{1}{2} m_1 u_0^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + m_1 g (h + \ell)$ ή $u_1 = 10m/s$

β) $u_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 = 10 m/s$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = 20 rad/s$ , $u_2' = u_{max} = \omega A$ ή

$A = 0{,}5m$

$K = 3U$ ή $E - U = 3U$ ή $U = \frac{E}{4}$, άρα: $x = \pm \frac{A}{2}$

$\left|\frac{\Delta p}{\Delta t}\right| = |\Sigma F| = kx = 100N$

γ) $u_2 = \omega \sqrt{A^2 - x^2} = 6 m/s$

**6.341** α) Από ΘΜΚΕ για το $m_1$: $\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = m_1 g h_1$

ή $u_1 = 3$ m/s

$T_1 - w_1 = m_1 \frac{u_1^2}{\ell_1}$ ή $T_1 = 19N$

β) $m_1 = m_2$, άρα $u_2' = u_1 = 3$ m/s και $u_1' = 0$

$\frac{1}{2} m_1 u_1''^2 = m_1 g h_2$ ή $u_1'' = 10m/s$

γ) $u_3' = \frac{2m_1}{m_1 + m_3} u_1'' = 5 m/s$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_3}} = 10 rad/s$

$u_3' = u_{max} = \omega A$ ή $A = 0{,}5m$

δ) $\frac{K}{U} = \frac{1}{3}$ ή $\frac{E - U}{U} = \frac{1}{3}$ ή $\frac{E}{U} = \frac{4}{3}$ ή

$\frac{\frac{1}{2} D A^2}{\frac{1}{2} D x^2} = \frac{4}{3}$ ή $x = \pm\, 0{,}25\sqrt{3}\, m$

ε) $\frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = m_2 g h_{max}$ ή $h_{max} = 0{,}45m$

**6.342** Α. $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 5 rad/s$

$u_1 = \omega \sqrt{A^2 - x^2} = 2 m/s$

$\beta_1$) $u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 = -\frac{4}{3} m/s$ και

$u_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 = \frac{2}{3} m/s$

$\beta_2$) $\frac{1}{2} m_2 u_2''^2 - \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = m_2 g s$ημ$30°$ ή

$\upsilon_2'' = 6{,}36\,m/s$

β₃) $W_{\Sigma F} = K_2' = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = 2{,}22\,J$

**6.343** α) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10\,rad/s,\ A = 0{,}2\,m$

$\upsilon_1 = \upsilon_{max} = \omega A = 2\,m/s$

β) $\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -1\,m/s$ και

$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = 1\,m/s$

γ) $\upsilon'_{max} = |\upsilon_1'| = \omega A'$ ή $A' = 0{,}1\,m$

δ) Το σώμα $\Sigma_1$ ακινητοποιείται στιγμιαία για δεύτερη φορά μετά από χρόνο

$t_1 = \frac{3T}{4} = \frac{3}{4}\frac{2\pi}{\omega} = 0{,}471\,s$ και βρίσκεται στη θέση $x = +A = 0{,}1\,m$.
Στον ίδιο χρόνο το $\Sigma_2$ έχει διανύσει απόσταση:

$s_2 = \upsilon_2' t_1 = 0{,}471\,m$
Άρα: $\Delta s = s_2 - x = 0{,}371\,m$

**6.344** α₁) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}$ ή $k = 200\,N/m$

α₂) $\omega = \frac{2\pi}{T} = 10\,rad/s$

$\upsilon_{max} = \omega A = 1\,m/s$

β₁) $m_1gh = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2$ ή $\upsilon_1 = 6\,m/s$

$m_1 = m_2$, άρα τα σώματα κατά την κρούση ανταλλάσσουν ταχύτητες και τα μέτρα τους είναι:
$\upsilon_1' = 1\,m/s$ και $\upsilon_2' = 6\,m/s$

$\upsilon_2' = \omega A'$ ή $A' = 0{,}6\,m$ η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου.
β₂) Ο χρόνος που χρειάζεται το $\Sigma_2$ για να φτάσει στη θέση $x = -A'$ είναι $t = \frac{3T}{4}$.
Στο ίδιο χρονικό διάστημα το $\Sigma_1$ έχει διανύσει απόσταση $\Delta x = \upsilon_1'\frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{20}m < A'$, άρα τα $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ συγκρούονται ξανά.

**6.345** α) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10\,rad/s$

$\upsilon_1 = \upsilon_{max} = \omega A$ ή $A = 0{,}8\,m$

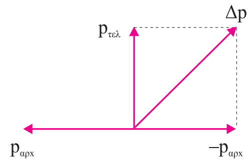
β) $\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -4\,m/s$ και

$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = 4\,m/s$

γ) $\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = m_2 g\ell + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2''^2$ ή $\upsilon_2'' = 3\,m/s$

δ) $\Delta\vec{p} = \vec{p}_{\tau\epsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi}$

ή $\Delta p = \sqrt{p_{\alpha\rho\chi}^2 + p_{\tau\epsilon\lambda}^2} =$
$= 15\,kg\cdot m/s$




**6.346** α) $\vec{p}_{\alpha\rho\chi_x} = \vec{p}_{\tau\epsilon\lambda_x}$ ή

$m_1\upsilon_0\sigma\upsilon\nu 60^\circ = (m_1 + m_2)\,\upsilon_\kappa$ ή $\upsilon_\kappa = 10\,m/s$

β) $\pi\% = \dfrac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_\kappa^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2}100\% = -87{,}5\%$

γ) Ορίζουμε θετική τη φορά προς τα κάτω.
$\Delta p = 0 - p_{y_1} = 0 - m_1\upsilon_0\eta\mu 60^\circ =$
$= -10\sqrt{3}\ kg\cdot m/s$

δ) $(m_1 + m_2)\,\upsilon_\kappa = (m_1 + m_2 + m_3)\,\upsilon_\kappa'$ ή

$\upsilon_\kappa' = 5\ m/s$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{(m_1 + m_2 + m_3)}} = 10\,rad/s$

$A = \frac{\upsilon_\kappa'}{\omega}$ ή $A = 0{,}5\ m$

ε) $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m_3\upsilon_\kappa' - 0}{\Delta t} = 50\,N$

**6.347** α) Από ΘΜΚΕ για το $m_1$:

$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = m_1g\eta\mu 30^\circ s$ ή

$\upsilon_1 = 12\ m/s$
β) $m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)\upsilon_\kappa$ ή $m_1 = 2\,kg$

γ) Θ.Ι. του $m_2$: $m_2 g ημ30^ο = kx_1$ (1)

Θ.Ι. του συσσωματώματος:

$(m_1 + m_2)\, gημ30^ο = k\,(x_1 + x)$ (2)

Από (1), (2): $m_1 gημ30^ο = kx$ ή

$x = 0{,}025m$ και $x_1 = 0{,}0125m$

Από ΑΔΕΤ:

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)υ_κ^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2 \;\text{ ή } A \simeq 0{,}69m$$

$$π\%=\frac{\frac{1}{2}kA^2}{m_1gsημ30^\circ+\frac{1}{2}m_1υ_0^2}100\%\simeq 66{,}12\%$$

$$δ)\;\; F_{ελ_{max}}=k(A+x+x_1)=291N$$

**6.348** α) $ω=\sqrt{\dfrac{k}{m_1}}=20rad/s$ , $A=0{,}2m$

$$|υ|=ω\sqrt{A^2-x^2}=2{,}4m/s$$

$$|p|=m|υ|=2{,}4kg\cdot m/s$$

β) Στη θέση της σύγκρουσης:

$υ_1 = υ_{max} = ωA = 4m/s$

$m_1υ_1 = (m_1 + m_2)\, υ_κ$ ή $υ_κ = 2m/s$

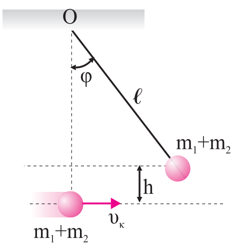
γ) $T = m_2 g = 10N$

$$T΄- (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)\,\frac{υ_κ^2}{\ell} \;\text{ ή } T΄ = 30N$$

$$π\%=\frac{T΄-T}{T}100\%=200\%$$

δ) Από ΘΜΚΕ:

$$0-\frac{1}{2}(m_1+m_2)υ_κ^2=-(m_1+m_2)gh \;\text{ ή } h=0{,}2m$$

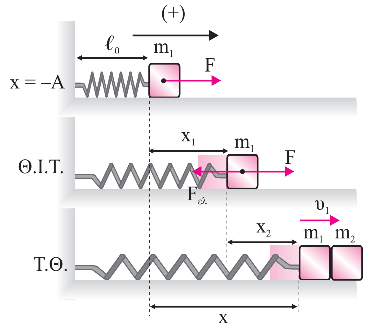



$$συνφ=\frac{\ell-h}{\ell}=0{,}75$$

**6.349** α) Το σώμα ξεκινάει την ταλάντωση από την ακραία θέση $x = -A$.

Θ.Ι.: $F = kx_1$ ή $x_1 = 0{,}2m$

Άρα: $A = 0{,}2m$




β) $W_F = Fx = 7{,}2J$

γ) $ω=\sqrt{\dfrac{k}{m_1}}=10rad/s$

$x_2 = x - x_1 = 0{,}16m$

$υ_1=ω\sqrt{A^2-x_2^2}=1{,}2m/s$ η ταχύτητα του $Σ_1$ πριν από τη σύγκρουση.

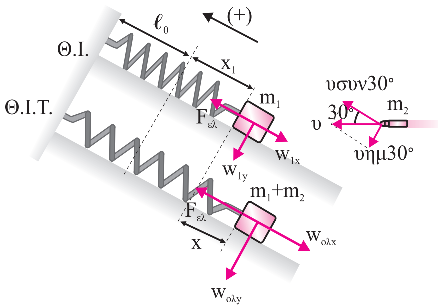
$\vec{p}_{αρχ}=\vec{p}_{τελ}$ ή $m_1υ_1 = (m_1 + m_2)\, υ_κ$ ή $υ_κ = 0{,}6m/s$

$$W_F=ΔK=\frac{1}{2}m_2υ_κ^2-0=0{,}18J$$

δ) Η θέση ισορροπίας για την ταλάντωση του συσσωματώματος είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Από ΑΔΕΤ:

$$\frac{1}{2}kA'^2=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}(m_1+m_2)υ_κ^2 \;\text{ ή } A΄\simeq 0{,}37m$$

**6.350** α) $m_2υσυν30^ο = (m_1 + m_2)\, υ_κ$ ή $υ_κ = 1m/s$




$$ΔK=\frac{1}{2}m_2υ_κ^2-\frac{1}{2}m_2υ^2=-4{,}33J$$

β) Στη Θ.Ι.: $w_{1x} = kx_1$ ή

$m_1 gημ30^ο = kx_1$ ή $x_1 = 0{,}1m$

Στη Θ.Ι.Τ.: $(m_1 + m_2)gημ30^ο = k(x_1+x)$

ή $x = 0{,}1m$

Από ΑΔΕΤ:

$$\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}(m_1+m_2)u_\kappa^2=\frac{1}{2}kA^2 \text{ ή } A=\frac{\sqrt{5}}{10}m$$

γ) $W_{F_{\varepsilon\pi}}=K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=0-\frac{1}{2}m_1u_\kappa^2=-1J$

δ) Το συσσωμάτωμα διέρχεται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, γιατί $A>x+x_1$.

$$\left|\frac{dp}{dt}\right|=|\Sigma F|=k(x_1+x)=20N$$

**6.351** α) ΘΜΚΕ για το σώμα Α:

$K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=W_w$ ή

$\frac{1}{2}m_Au^2-\frac{1}{2}m_Au_0^2=-2m_Ag\ell$ ή

$u=8$ m/s η ταχύτητα του Α ακριβώς πριν από την κρούση.

$T_1-w_A=m_A\frac{u_0^2}{\ell}$ ή $T_1=121{,}11N$

$T_2+w_A=m_A\frac{u^2}{\ell}$ ή $T_2=61{,}11N$

β) $m_Au=(m_A+m_B)u_\kappa$ ή $u_\kappa=2m/s$

$$\pi\%=\frac{\frac{1}{2}m_Au_\kappa^2-\frac{1}{2}m_Au^2}{\frac{1}{2}m_Au^2}100\%=-93{,}75\%$$

γ) $\omega=\sqrt{\frac{k}{m_A+m_B}}=10rad/s$

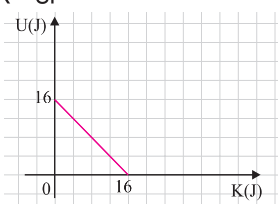
Από ΑΔΕΤ: $\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}(m_A+m_B)u_\kappa^2=\frac{1}{2}kA^2$ ή

$A=\frac{\sqrt{2}}{5}m$

$F_{\varepsilon\lambda_{max}}=kA=80\sqrt{2}N$

δ) $U_{max}=\frac{1}{2}kA^2=16J$

$U=16-K$ SI




**6.352** α) Το σώμα Α ξεκινάει την ταλάντωση από την ακραία θέση $x=+A$.

Θ.Ι.: $(m_A+m_B)g=k_1(x+A)$ (1)

Θ.Ι.Τ. του Α: $m_Ag=k_1x$ (2)

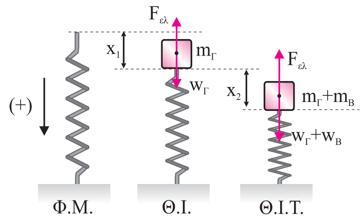
Από (1) και (2): $A=0{,}05m$

β) $h=\frac{1}{2}gt^2$ ή $t=\sqrt{0{,}12}s$

$u=gt=2\sqrt{3}m/s$ η ταχύτητα του Β ακριβώς πριν από την κρούση.

$m_Bu=(m_B+m_\Gamma)u_\kappa$ ή $u_\kappa=\sqrt{3}m/s$

γ) Θ.Ι.: $m_\Gamma g=k_2x_1$ ή $x_1=0{,}2m$




Θ.Ι.Τ.: $(m_\Gamma+m_B)g=k_2(x_1+x_2)$ ή $x_2=0{,}2m$

Από ΑΔΕΤ:

$$\frac{1}{2}(m_B+m_\Gamma)u_\kappa^2+\frac{1}{2}k_2x_2^2=\frac{1}{2}k_2A'^2 \text{ ή } A'=0{,}4m$$

**6.353** α) Στον άξονα x΄x: $\vec{p}_{\alpha\rho\chi}=\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή

$m_2u_2\sigma\upsilon\nu60^o=(m_1+m_2)u_\kappa$ ή $u_\kappa=5m/s$

$$\pi\%=\frac{\frac{1}{2}(m_1+m_2)u_\kappa^2-\frac{1}{2}m_2u_2^2}{\frac{1}{2}m_2u_2^2}100\%=$$

$=-93{,}75\%$

β) $\omega=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}=10rad/s$

$u_{max}=u_\kappa=\omega A$ ή $A=0{,}5m$

γ) Για $t=0$: $u>0$ και $x>0$, άρα: $\varphi_0=0$

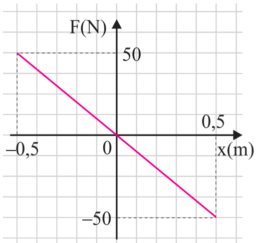
$x=A\eta\mu\omega t=0{,}5\eta\mu10t$ SI

Για $t_1 = \frac{\pi}{60}$ s: $x_1 = 0{,}25$m

$W_{F_{ελ}} = U_{αρχ} - U_{τελ} = 0 - \frac{1}{2}kx_1^2 = -12{,}5$J

δ) $ΣF_2 = -D_2x = -m_2\omega^2 x = -100x$ με

$-0{,}5\text{m} \le x \le 0{,}5\text{m}$




**6.354** α) $h = \frac{1}{2}gt^2$ ή $t = 0{,}6$s

$υ_2 = gt = 6$ m/s η ταχύτητα του $Σ_2$ ακριβώς πριν από την κρούση.

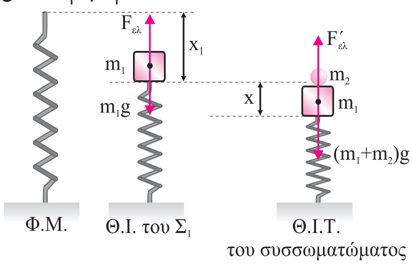
$m_2υ_2 = (m_1 + m_2)υ_κ$ ή $υ_κ = 2$m/s

$Δp_2 = m_2υ_κ - m_2υ_2 = -8\text{kg} \cdot \text{m/s}$

β) $W_{ΣF_1} = K_1' - K_1 = \frac{1}{2}m_1υ_κ^2 - 0 = 8$J

γ) Στη Θ.Ι. του $Σ_1$:

$m_1g = kx_1$ ή $x_1 = 0{,}4$m




Στη Θ.Ι.Τ. του συσσωματώματος:

$(m_1 + m_2)g = k(x_1+x)$ ή $x = 0{,}2$m

Από ΑΔΕΤ:

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)υ_κ^2 = \frac{1}{2}kA^2 \text{ ή } A = \frac{\sqrt{7}}{5}\text{m}$$

δ) $$\frac{K}{U} = \frac{E-U}{U} = \frac{\frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx_2^2}{\frac{1}{2}kx_2^2} = \frac{1}{3}$$

**6.355** α) $m_2υ_2 = m_1υ_1' + m_2υ_2'$ ή $υ_1' = 0{,}5$m/s

β) $$π\% = \frac{\frac{1}{2}m_2υ_2'^2 - \frac{1}{2}m_2υ_2^2}{\frac{1}{2}m_2υ_2^2}100\% = -75\%$$

γ) $W_{F_1} = K_1' - K_1 = \frac{1}{2}m_1υ_1'^2 - 0 = 0{,}5$J

δ) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10$rad/s

$υ_{max} = υ_1' = \omega A$ ή $A = 0{,}05$m

$E_{ταλ} = \frac{1}{2}kA^2 = 0{,}5$J

Όταν $υ = 0{,}25$m/s: $K = \frac{1}{2}m_1υ^2 = 0{,}125$J, άρα

$U = 0{,}375$J

$U = \frac{1}{2}kx^2$ και για $U = 0{,}375$ J: $x = 0{,}043$m

$F_{ελ} = kx = 17{,}2$N

**6.356** α$_1$) $m_1gh_1 = \frac{1}{2}m_1υ_1^2$ ή $υ_1 = 10$ m/s είναι το μέτρο της ταχύτητας του $Σ_1$ ακριβώς πριν από την κρούση.

$m_1gh_2 = \frac{1}{2}m_1υ_1'^2$ ή $υ_1' = 5$ m/s είναι το μέτρο της ταχύτητας του $Σ_1$ αμέσως μετά την κρούση.

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_1υ_1 = -m_1υ_1' + m_2υ_2'$ ή

$υ_2' = 1{,}5$ m/s

$$ΔK = \frac{1}{2}m_1υ_1'^2 + \frac{1}{2}m_2υ_2'^2 - \frac{1}{2}m_1υ_1^2 = -26{,}25\text{J}$$

α$_2$) $Δ\vec{p} = \vec{p}_1' - \vec{p}_1$ ή $Δp = -m_1υ_1' - m_1υ_1 = -15\text{kg}\cdot\text{m/s}$

α$_3$) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = \sqrt{10}$rad/s

$υ_{max} = υ_2' = \omega A$ ή $A = 0{,}15\sqrt{10}$m

α$_4$) $T_1 = m_1g + m_1\frac{υ_1^2}{\ell} = 20$N και

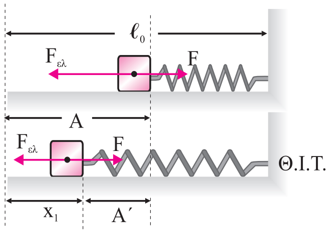
$T_1' = m_1g + m_1\frac{υ_1'^2}{\ell} = 12{,}5$N

$$π\% = \frac{T_1' - T_1}{T_1}100\% = -37{,}5\%$$

Β. Στη θέση ισορροπίας για τη νέα ταλάντωση:

$ΣF = 0$ ή $F = kx_1$ ή $x_1 = 0{,}075\sqrt{10}$m

$A' = A - x_1 = 0{,}075\sqrt{10}\,m$




**6.357** α) ΘΜΚΕ για το $\Sigma_1$ από το σημείο Γ έως το σημείο Β:

$$\frac{1}{2}m_1 u_1^2 - \frac{1}{2}m_1 u_0^2 = -\mu m_1 g s \text{ ή } u_1 = 3m/s$$

β) $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_1 u_1 = (m_1 + m_2)\,u_κ$ ή $u_κ = 1m/s$

$$Q = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u_κ^2 = 15J$$

γ) $$π\% = \frac{\frac{1}{2}m_2 u_κ^2}{\frac{1}{2}m_1 u_0^2}100\% = 8\%$$

δ) $$ω = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = 5rad/s$$

$u_{max} = u_κ = ωA$ ή $A = 0{,}2m$

$$U = \frac{3}{4}E \text{ ή } \frac{1}{2}kx^2 = \frac{3}{4}\frac{1}{2}kA^2 \text{ ή}$$

$$x^2 = \frac{3}{4}A^2 \text{ ή } x = \pm\frac{A\sqrt{3}}{2}$$

Για πρώτη φορά: $x = +\frac{A\sqrt{3}}{2} = 0{,}1\sqrt{3}m$

**6.358** α) $ω = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = 5rad/s$ και

$u_{max} = ωA = 1m/s$

Στον άξονα x΄x: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή

$m_2 u_{max} + m_1 u_1 συν45^o = (m_1 + m_2)\,u_κ$ ή

$u_κ = 5m/s$

β) $Δp_x = 0$

$$|Δp_y| = |0 - m_1 u_1 ημ45°| = 42kg \cdot m/s$$

γ) $$ω' = \sqrt{\frac{k}{m_{ολ}}} = 2\sqrt{5}rad/s$$

Η θέση ισορροπίας δεν αλλάζει, άρα:

$$u_κ = u'_{max} = ω'A' \text{ ή } A' = \frac{\sqrt{5}}{2}m$$

δ) $$\left|\frac{dp_1}{dt}\right| = |ΣF_1| = |-D_1 A'| =$$

$$= |-ω'^2 m_1 A'| = 20\sqrt{5}kg \cdot m/s^2$$

**6.359** α) $\frac{50}{100}m_1 gR = \frac{1}{2}m_1 u^2$ ή $R = 5m$

β) Για το σώμα $\Sigma_2$: $R = \frac{1}{2}gΔt^2$ ή $Δt = 1s$

Για το σώμα $\Sigma_1$: $d = uΔt$ ή $d = 5\sqrt{2}m$

γ) Στον άξονα x΄x: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή

$m_1 u = (m_1 + m_2 + m_3)\,u_κ$ ή $u_κ = \sqrt{2}m/s$

$$ω = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2 + m_3}} = 5rad/s$$

$$u_κ = u_{max} = ωA \text{ ή } A = \frac{\sqrt{2}}{5}m$$

δ) $$π\% = \frac{\frac{1}{2}kA^2}{m_1 gR + m_2 gR}100\% = 3{,}33\%$$

**6.360** α) $K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{w_1}$ ή

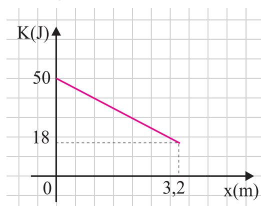
$$\frac{1}{2}m_1 u_1^2 - \frac{1}{2}m_1 u_0^2 = -m_1 gh \quad \text{ή } u_1 = 6m/s$$

$m_1 u_1 = (m_1 + m_2)\,u_κ$ ή $u_κ = 1\ m/s$

$Δp = p_{τελ} - p_{αρχ} = m_1 u_κ - m_1 u_0 = -9kg \cdot m/s$

β) $K - \frac{1}{2}m_1 u_0^2 = -m_1 gx$ ή

$K = 50 - 10x$ SI με $0 \le x \le 3{,}2m$



γ) $\Sigma F = -(k_1+k_2)x$, άρα $D = k_1 + k_2 = 2.400 N/m$

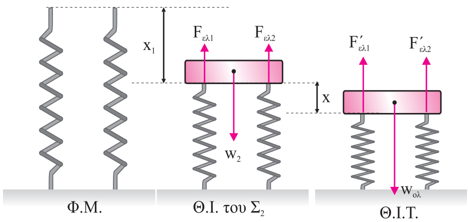
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m_1+m_2}} = \frac{10}{\pi} Hz$$

δ) Θ.Ι. του $\Sigma_2$: $m_2 g = Dx_1$ ή $x_1 = \frac{5}{240} m$

Θ.Ι.Τ.: $(m_1 + m_2)g = D(x_1+x)$ ή $x = \frac{1}{240} m$

$$\frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)u_\kappa^2 = \frac{1}{2}DA^2$$

ή $A = 0{,}0501 m$




**6.361** α) $\frac{1}{2}m_1 u_1^2 = m_1 gh - \mu m_1 g \sigma\upsilon\nu\varphi \frac{h}{\eta\mu\varphi}$ ή

$u_1 = 2\sqrt{2} m/s$

$m_1 u_1 = (m_1 + m_2)\, u_\kappa$ ή $u_\kappa = \frac{2\sqrt{2}}{5} m/s$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} = 10\sqrt{2} rad/s$$

$u_{max} = u_\kappa = \omega A$ ή $A = 0{,}04 m$

$$β)\ \pi\% = \frac{\left|\frac{1}{2}m_1 u_1^2 - m_1 gh\right|}{m_1 gh}100\% = 75\%$$

**6.362** α) Για $t = 0$: $A = A\eta\mu\varphi_0$ ή $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} rad$

β) $x = 0{,}4\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}2 m$

γ) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}} = \frac{\pi}{5} s$

δ) Για το σώμα $m_1$: $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = \frac{20\sqrt{3}}{3} rad/s$

$u_1 = \omega_1 A\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} = -4 m/s$

$m_1 u_1 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2)\, u_\kappa$ ή $u_\kappa = -5 m/s$

$$E_{\tau\alpha\lambda} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)u_\kappa^2 = 58 J$$

**6.363** α) $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = 10 rad/s$ και ομοίως

$\omega_2 = 10 rad/s$

$A_1 = x_1 = 0{,}2 m$, άρα $u_1 = \omega_1 A_1 = 2 m/s$

$A_2 = x_2 = 0{,}4 m$, άρα $u_2 = \omega_2 A_2 = 4 m/s$

Ορίζουμε θετική φορά προς τα αριστερά.

$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή

$-m_1 u_1 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2)u_\kappa$ ή $u_\kappa = 1 m/s$

$$β)\ \pi\% = \frac{\frac{1}{2}m_1 u_\kappa^2 - \frac{1}{2}m_1 u_1^2}{\frac{1}{2}m_1 u_1^2}100\% = -75\%$$

γ) $\omega' = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m_1+m_2}} = 10 rad/s$

$u_\kappa = u_{max} = \omega' A'$ ή $A' = 0{,}1 m$

δ) Για το σώμα $\Sigma_2$:

$K + U = E$ ή $\frac{4U}{3} = E$ ή $U = \frac{3E}{4}$

$W_F = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda} =$

$= 0 - \frac{3E}{4} = \frac{-3}{4}\frac{1}{2}m_2\omega'^2 A'^2 = -0{,}375 J$

**6.364** α) $\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή

$mu_0 = (m + 3m)u_1$ ή $u_1 = 4 m/s$

β) Το συσσωμάτωμα και το σώμα Β έχουν ίσες μάζες, άρα ανταλλάσσουν ταχύτητες.

$u_2' = u_1 = 4 m/s$

γ) Το πλάτος της ταλάντωσης του Β είναι $A = d_1$.

Για το συσσωμάτωμα: $\ell = u_1 t_1$ ή $t_1 = \frac{0{,}157}{4} s$

Για το Β: $t_1 = \frac{T}{4}$, άρα $T = 0{,}157 s$

δ) Η γωνιακή συχνότητα ω δε μεταβάλλεται:

$u_{max} = u_2' = \omega d_2$ ή $u_2' = \frac{2\pi}{T}d_2$ ή $d_2 = 0{,}1 m$

**6.365** α) Για το $Σ_1$: $t = \dfrac{T}{4} = \dfrac{2π\sqrt{\dfrac{M}{k}}}{4} = \dfrac{π}{10}s$

Για το $Σ_2$: $h = \dfrac{1}{2}gt^2 = 0{,}5m$

β) $|υ_1| = υ_{max} = ωd = \dfrac{2π}{T}d = \dfrac{π}{4}m/s$

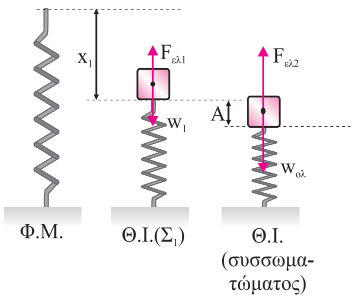
$υ_2 = gt = π\ m/s$

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $mυ_2 - M|υ_1| = (m + M)υ_κ$

ή $υ_κ = 0$

γ) Θ.Ι. του $Σ_1$:

$F_{ελ_1} = w_1$ ή $kx_1 = Mg$ ή $x_1 = 0{,}4m$



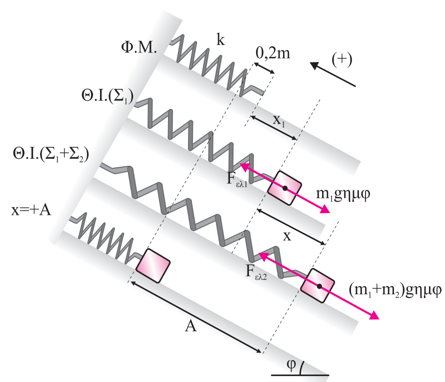

Θ.Ι.Τ. του συσσωματώματος:

$F_{ελ_2} = w_1 + w_2$ ή $100(x_1 + A) = (M + m)g$

ή $A = 0{,}1m$

δ) $F_{ελ_{max}} = k(x_1 + 2A) = 60N$

**6.366** ΘΜΚΕ για το $Σ_2$:




$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{w_x}$ ή

$\dfrac{1}{2}m_2υ_2^2 - \dfrac{1}{2}m_2υ_0^2 = -m_2gsημφ$ ή

$υ_2 = 4m/s$

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_2υ_2 = (m_1 + m_2)υ_κ$ ή

$υ_κ = 2{,}4m/s$

Θ.Ι.Τ. του $Σ_1$: $m_1gημφ = kx_1$ ή $x_1 = \dfrac{10}{k}$

Θ.Ι.Τ. του συσσωματώματος:

$(m_1 + m_2)gημφ = k(x_1 + x)$ ή

$x_1 + x = \dfrac{25}{k}$ ή $x = \dfrac{15}{k}$

Από ΑΔΕΤ:

$\dfrac{1}{2}kx^2 + \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)υ_κ^2 = \dfrac{1}{2}k(x_1 + x + 0{,}2)^2$ ή

$\dfrac{1}{2}k\left(\dfrac{15}{k}\right)^2 + \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)υ_κ^2 = \dfrac{1}{2}k\left(\dfrac{25}{k} + 0{,}2\right)^2$ ή

$k^2 - 470k + 10.000 = 0 \quad (1)$

Από την (1): $k = 447{,}66N/m$ ή $k = 22{,}34N/m$

**6.367** α) ΘΜΚΕ για το $m_1$: $K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w$ ή

$\dfrac{1}{2}m_1υ_1^2 - 0 = m_1gh$ ή $h = 0{,}2m$

β) Επειδή $m_1 = m_2$, τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες: $υ_1' = 0$ και $υ_2' = 2m/s$

γ) $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή

$m_2υ_2' = (m_2 + m_3)υ_κ$ ή $υ_κ = 0{,}25m/s$

$ω = \sqrt{\dfrac{k}{m_2 + m_3}} = 5m/s$

$υ_κ = ωA$ ή $A = 0{,}05m$

δ) $p = m_{ολ}υ = m_{ολ}ωAσυνωt = 0{,}1\ kg \cdot m/s$

**6.368** α) ΘΜΚΕ για το $Σ_1$:

$m_1gh = \dfrac{1}{2}m_1υ_1^2$ ή $υ_1 = \sqrt{2gℓημ60°} = 3m/s$

β) $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή

$m_1υ_1 = (m_1 + m_2)υ_κ$ ή $υ_κ = 1m/s$

γ) ΘΜΚΕ για το συσσωμάτωμα:

$\dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)υ^2 - \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)υ_κ^2 =$

$= (m_1 + m_2)gsημθ$ ή $υ = \sqrt{3}m/s$

Στη Θ.Ι.: $F_{ελ} = w_{ολ}$ ή $kx_1 = (m_1 + m_2)gημθ$

ή $x_1 = 0{,}15m$

Από ΑΔΕΤ:

$$\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)υ^2 = \frac{1}{2}kA^2 \;\text{ή}\; A = 0{,}335m$$

δ) $K + U = E$ ή $2U = E$ ή

$$2\frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 \;\text{ή}\; x = \pm 0{,}1675\sqrt{2}m$$

$$ω = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}rad/s$$

$$|F_{επ}| = D_2|x| = m_2ω^2|x| = 11{,}16\sqrt{2}N$$

**6.369** α) Για $t = 0$: $x = A$, άρα $φ_0 = \frac{π}{2}rad$

$$A = 0{,}2 \text{ m και } ω = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 9rad/s$$

$$x = 0{,}2ημ\left(9t + \frac{π}{2}\right) \quad SI \quad (1)$$

β) Από την (1) για $x = -0{,}1$ m: $t_1 = \frac{2π}{27}s$

γ) $|υ_1| = ω\sqrt{A^2 - x^2} = 0{,}9\sqrt{3}m/s$

$$Δp = p_{τελ} - p_{αρχ} = m_1|υ_1| - (-m_1|υ_1|) =$$

$$= 2m_1|υ_1| = 18\sqrt{3}kg \cdot m/s$$

δ) $T = \frac{2π}{ω} = \frac{2π}{9}s$

Το σώμα Α διέρχεται για δεύτερη φορά από τη θέση ισορροπίας σε χρόνο:

$$Δt = t_1 + \left(t_1 - \frac{T}{4}\right) = \frac{5π}{54}s$$

$$h = \frac{1}{2}gΔt^2 = 0{,}428m$$

ε) $υ_{max} = ωA = 1{,}8m/s$

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_1υ_{max} = (m_1 + m_2)υ'_{max}$ ή

$υ'_{max} = 0{,}45m/s$

$$ω' = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = 4{,}5rad/s \text{ και } υ'_{max} = ω'A' \text{ ή}$$

$A' = 0{,}1m$

**6.370** α) $\frac{dK_1}{dt} = ΣFυ_1 = m_1gυ_1$ ή $υ_1 = 13m/s$

ΘΜΚΕ για το $Σ_1$:

$$\frac{1}{2}m_1υ_1^2 - \frac{1}{2}m_1υ_0^2 = m_1gh \;\text{ή}\; υ_0 = 10m/s$$

β) $m_1υ_1 = (m_1 + m_2)υ_κ$ ή $υ_κ = 1m/s$

$$π\% = \frac{m_1υ_κ - m_1υ_1}{m_1υ_1}100\% = -92{,}3\%$$

γ) Στη Θ.Ι. του $m_2$:

$$m_2g = kx_1 \;\text{ή}\; x_1 = \frac{12}{60}m$$

Στη Θ.Ι. του συσσωματώματος:

$$(m_1 + m_2)g = k(x_1 + x) \;\text{ή}\; x = \frac{1}{60}m$$

Από ΑΔΕΤ:

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)υ_κ^2 = \frac{1}{2}kA^2 \;\text{ή}\; A = 0{,}148m$$

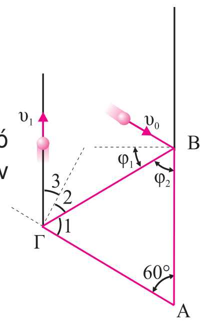
δ) $\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -ΣFυ = -\frac{dp}{dt}υ = 0$

**6.371** Α. $φ_1 = 30^o$, άρα $φ_2 = 60^o$ και $\hat{Γ}_1 = 60°$

$\hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_2 = 90°$ ή $\hat{Γ}_2 = 30°$

και άρα $\hat{Γ}_3 = 30°$

$\hat{Γ}_2 + \hat{Γ}_3 = 60°$




$β_1$) ΘΜΚΕ για τη σφαίρα από την αρχική θέση μέχρι την κρούση με το Σ:

$$\frac{1}{2}m_1υ_1^2 - \frac{1}{2}m_1υ_0^2 = -m_1gh$$

ή $υ_1 = 8m/s$

Μετά την κρούση με το Σ:

$$υ'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1 = -4m/s \text{ και}$$

$$υ'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}υ_1 = 4m/s$$

$β_2$) $ω = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = 10rad/s$

$υ'_2 = υ_{max} = ωA$ ή $A = 0{,}4m$

$F_{max} = kA = 120N$

$β_3$) $x_{max} = A + x_1 = A + \frac{m_2g}{k} = 0{,}5m$

$$U_{max_{ελ}} = \frac{1}{2}kx_{max}^2 = 37{,}5J$$

**6.372** α) Για τη σύγκρουση:

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_2υ_2 = m_2υ_2' + m_1υ_1'$ ή $υ_1' = 4$ m/s

β) $$π\% = \frac{\frac{1}{2}m_2υ_2'^2 + \frac{1}{2}m_1υ_1'^2 - \frac{1}{2}m_2υ_2^2}{\frac{1}{2}m_2υ_2^2}100\% =$$

$= -94{,}4\%$

γ) Για την ταλάντωση του $Σ_1$:

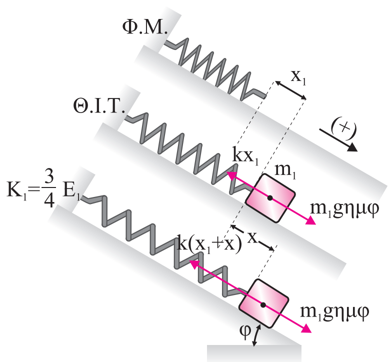
$ω = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10$ rad/s και $T = \frac{2π}{ω} = \frac{π}{5}$ s

Το $Σ_1$ ξεκινά την ταλάντωση από τη θέση ισορροπίας.
$υ_1' = υ_{max} = ωA$ ή $A = 0{,}4$ m

Μέχρι τη χρονική στιγμή $t = \frac{3π}{10}$ s $= \frac{3}{2}T$ το $Σ_1$ διανύει διάστημα:

$s = \frac{3}{2}4A = 2{,}4$ m

δ) Στη Θ.Ι.Τ.: $m_1gημφ = kx_1$ ή $x_1 = 0{,}05$ m




$K_1 = \frac{75}{100}E_1$ ή $U_1 = \frac{25}{100}E_1$ ή

$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{4}\,\frac{1}{2}kA^2$ ή $x = 0{,}2$ m

$F_{ελ} = k(x + x_1) = 50$ N

**6.373** α) Από ΘΜΚΕ για το $Σ_1$:

$\frac{1}{2}m_1υ_1^2 = m_1gR$ ή $υ_1 = 6$ m/s

β) $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_1υ_1 = (m_1 + m_2)υ_κ$ ή

$υ_κ = 2$ m/s

γ) $ω = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = 10$ rad/s και

$υ_{max} = υ_κ = ωA$ ή $A = 0{,}2$ m

Η ταχύτητα του συσσωματώματος μηδενίζεται για πρώτη φορά, όταν έχει διανύσει διάστημα: $s = A = 0{,}2$ m.

δ) Η ταχύτητα μηδενίζεται για δεύτερη φορά σε χρόνο:

$t = \frac{T}{4} + \frac{T}{2} = \frac{3T}{4} = \frac{3}{4}\frac{2π}{ω} = \frac{3π}{20}$ s

**6.374** α) ΑΔΕΤ για το σώμα $Σ_1$:

$\frac{1}{2}k_1d^2 = \frac{1}{2}k_1d_1^2 + \frac{1}{2}m_1υ_1^2$ ή $υ_1 = 2$ m/s

β) Για την ελαστική κρούση ισχύει:

$υ_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}υ_1 = 1$ m/s και

$υ_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1 = -1$ m/s

$$π_K\% = \frac{K_2'}{K_1}100\% = \frac{\frac{1}{2}m_2υ_2'^2}{\frac{1}{2}m_1υ_1^2}100\% = 75\%$$

γ) ΘΜΚΕ για το $Σ_2$ κατά τη διάρκεια της κρούσης:

$K_{2_{τελ}} - K_{2_{αρχ}} = W_{ΣF_2}$ ή $W_{ΣF_2} = \frac{1}{2}m_2υ_2'^2 = 1{,}5$ J

δ) ΑΔΕΤ για το σώμα $Σ_1$:

$\frac{1}{2}k_1d_1^2 + \frac{1}{2}m_1υ_1'^2 = \frac{1}{2}k_1A_1'^2$ ή

$$A_1' = \frac{\sqrt{13}}{10}\,m$$

Για το $\Sigma_2$: $\upsilon_2' = \upsilon_{max} = \omega_2 A_2'$ ή

$$A_2' = \frac{\upsilon_2'}{\sqrt{\frac{k_2}{m_2}}} = 0{,}1\ m$$

$$\frac{E_1'}{E_2'} = \frac{\frac{1}{2}k_1 A_1'^2}{\frac{1}{2}k_2 A_2'^2} = \frac{13}{3}$$

**6.375** α) ΘΜΚΕ για το $\Sigma_1$:

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = m_1 g\ell \text{ ή } \upsilon_1 = 4\ m/s$$

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -2\ m/s \text{ και}$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = 2\ m/s$$

β) Τα σώματα $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ μετά την κρούση εκτελούν οριζόντιες βολές.

Άξονας y: $h = \frac{1}{2}gt^2$ ή $t = 0{,}5$ s

Άξονας x: $s_1 = |\upsilon_1'|t = 1$ m, $s_2 = \upsilon_2't = 1$ m

Άρα: $d = s_1 + s_2 = 2$ m

γ) Θ.Ι.Τ.: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $w_3 = F_{\varepsilon\lambda_2}$ ή $w_3 = kx_1$ ή

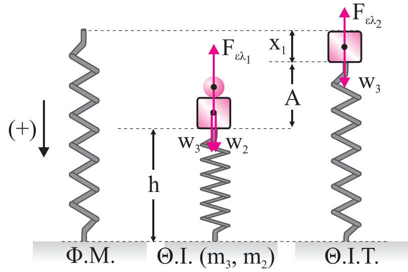
$x_1 = 0{,}4$ m

Θ.Ι. ($m_2$, $m_3$): $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $F_{\varepsilon\lambda_1} = w_2 + w_3$ ή

$w_2 + w_3 = k(x_1 + A)$ ή $A = 0{,}6$ m

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_3}} = 5\ rad/s,\ \varphi_0 = \frac{\pi}{2}\ rad$$

Άρα: $K = E\sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_0) = 18\sigma\upsilon\nu^2\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI




δ) $d_1^2 = s_1^2 + d_2^2$ ή $d_2 = 2$ m

$d_2 = h + A + |x|$ ή $|x| = 0{,}15$ m, δηλαδή το σώμα $\Sigma_3$ βρίσκεται στη θέση $x = -0{,}15$ m.

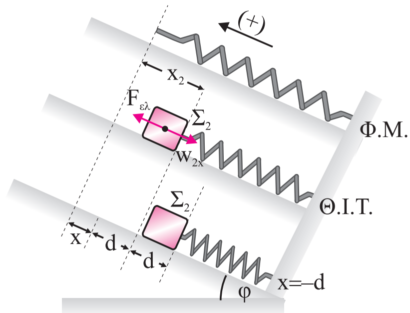
$$\left|\frac{dp}{dt}\right| = |\Sigma F| = k|x| = 15\ N$$

**6.376** Α. Θ.Ι.Τ.: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $w_{2x} = F_{\varepsilon\lambda}$ ή

$$m_2 g\eta\mu\varphi = k_2 x_2 \text{ ή } \eta\mu\varphi = \frac{k_2 x_2}{m_2 g}\ (1)$$

$x_2 = x + d$ ή $x_2 = 0{,}25$ m (2)

Από (1) και (2): $\eta\mu\varphi = \frac{1}{2}$ ή $\varphi = 30^o$




$\beta_1$) Στη Θ.Ι.Τ. του $\Sigma_3$ ισχύει: $\Sigma F = 0$ ή

$m_3 g\eta\mu\varphi = k_2 x_3$ ή $x_3 = 0{,}1$ m

ΑΔΕΤ για το $\Sigma_3$:

$$\frac{1}{2}m_3\upsilon_3^2 + \frac{1}{2}k_2 x_3^2 = \frac{1}{2}k_2 d'^2 \text{ ή } \upsilon_3 = 4\ m/s$$

β$_2$) ΘΜΚΕ για το $Σ_3$:

$\frac{1}{2}m_3υ_3'^2 - \frac{1}{2}m_3υ_3^2 = -m_3gημφ(d_1 - x_3)$ ή

$υ_3' = 2$ m/s

$υ_1'' = υ_3' = 2$ m/s και $υ_3'' = 0$ (τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες).

β$_3$) $υ_1'' = υ_{max}$

$U_1 = E - K_1$ ή $\frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}m_1υ_{max}^2 - K_1$ ή

$x_1 = 0,2$ m

$|α_1| = |-ω^2x_1| = \frac{k_1}{m_1}x_1 = 5\ m/s^2$

**6.377** α$_1$) $\vec{p}_{αρχ_x} = \vec{p}_{τελ_x}$ ή $mυ = m_1υ_1συνφ_1 + m_2υ_{2x}$

ή $mυ = \frac{m}{2}2υ\frac{1}{2} + \frac{m}{2}υ_{2x}$ ή $υ_{2x} = υ$

$\vec{p}_{αρχ_y} = \vec{p}_{τελ_y}$ ή $0 = m_1υ_1ημφ_1 - m_2υ_{2y}$ ή

$υ_{2y} = υ\sqrt{3}$

$υ_2 = \sqrt{υ_{2x}^2 + υ_{2y}^2} = 2υ$ και

$εφφ_2 = \frac{υ_{2y}}{υ_{2x}} = \sqrt{3}$ ή $φ_2 = 60°$

α$_2$) $ΔE = \frac{1}{2}m_1υ_1^2 + \frac{1}{2}m_2υ_2^2 - \frac{1}{2}mυ^2 = \frac{3}{2}mυ^2$

β$_1$) Για την κρούση των $Σ_1$, $Σ_3$:

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_1υ_1 = (m_3 + m_1)υ_κ$ ή $υ_κ = \frac{2υ}{3}$

$Q = \frac{1}{2}m_1υ_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_3)υ_κ^2 = \frac{2mυ^2}{3}$

$$π\% = \frac{Q}{ΔE}100\% = \frac{\frac{2mυ^2}{3}}{\frac{3mυ^2}{2}}100\% = 44,44\%$$

β$_2$) $α_{max} = ω^2A = ω(ωA) = ωυ_{max} = ωυ_κ =$

$$= \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_3}}\frac{2υ}{3} = \frac{2υ}{3}\sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

**6.378** α$_1$) Από ΑΔΕΤ:

$\frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)υ_0^2 = \frac{1}{2}kA^2$ ή $A = 0,3$ m

α$_2$) Όταν τα $Σ_1$, $Σ_2$ χάνουν επαφή, για το $Σ_2$ ισχύει:

$ΣF_2 = 0$ ή $-D_2x = 0$ ή $x = 0$, δηλαδή στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

$ω = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = 10$ rad/s,

άρα όταν τα σώματα χάνουν επαφή:

$υ = ωA = 3$ m/s.

Μετά την κρούση δεν αλλάζει η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.

Για τη νέα ταλάντωση του $Σ_1$:

$υ_{max}' = υ = 3$ m/s, $ω' = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10\sqrt{3}$ rad/s

$A' = \frac{υ_{max}'}{ω'} = 0,1\sqrt{3}$ m

β$_1$) Η ταχύτητα του $Σ_3$ αμέσως μετά την κρούση είναι:

$υ_3' = \frac{2m_2}{m_2 + m_3}υ = 2$ m/s

$T_3' = m_3g + m_3\frac{ω_3'^2}{\ell} = 80$ N

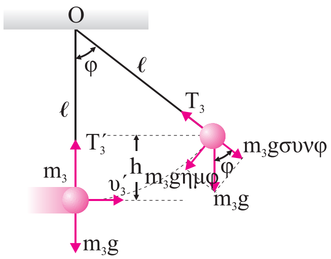
β$_2$) Από ΑΔΜΕ για το $Σ_3$ από τη στιγμή της σύγκρουσης μέχρι να σταματήσει στιγμιαία:

$\frac{1}{2}m_3υ_3'^2 = m_3gh$ ή $h = 0,2$ m

$συνφ = \frac{\ell - h}{\ell} = \frac{1}{2}$ ή $φ = 60°$

$ΣF_y = 0$ και $ΣF_y = m_3α$ ή

$m_3gημφ = m_3α$ ή $α = 5\sqrt{3}\ m/s^2$




**6.379** α) Για την κίνηση του $Σ_2$ στο τμήμα ΚΜ:

$\frac{1}{2}m_2υ_2^2 - \frac{1}{2}m_2υ_0^2 = -μm_2g(d - d_1)$ ή $υ_2 = 4$ m/s

Επειδή το τμήμα ΝΜ είναι λείο, η ταχύτητα του $Σ_2$ ακριβώς πριν από την κρούση είναι $υ_2 = 4$ m/s.

β) Για την κρούση των $Σ_1$, $Σ_2$:
$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_2υ_2 = (m_1 + m_2)υ_κ$ ή $υ_κ = 2$ m/s

$Q = \left|\frac{1}{2}(m_1 + m_2)υ_κ^2 - \frac{1}{2}m_2υ_0^2\right| = 8{,}5$ J

γ) $ω = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = 5$ rad/s και

$υ_{max} = υ_κ = ωA$ ή $A = 0{,}4$ m.

Το συσσωμάτωμα σταματά στιγμιαία για πρώτη φορά στη θέση $x = A = 0{,}4$ m.

δ) Το συσσωμάτωμα σταματά στιγμιαία για δεύτερη φορά σε σημείο δεξιά του Μ, που απέχει απόσταση $x_1$ από το σημείο Ν (θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου).
Από ΘΜΚΕ από την έναρξη της ταλάντωσης μέχρι το συσσωμάτωμα να σταματήσει στιγμιαία για δεύτερη φορά:
$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{F_{ελ}} + W_T$ ή

$0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)υ_κ^2 =$

$= \left(0 - \frac{1}{2}kx_1^2\right) - μ(m_1 + m_2)g(x_1 - d_1)$ ή

$25x_1^2 + 9x_1 - 6{,}7 = 0$ ή $x_1 = 0{,}368$ m

$Q = |W_T| = |T(x_1 - d_1)| = 0{,}612$ J

**6.380** α) Για το $Σ_1$: $ΣF = m_1gημφ - F = 0$, άρα μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 1$ s το $Σ_1$ κινείται ευθύγραμμα ομαλά με $υ = υ_0 = 2$ m/s και διανύει διάστημα $s_1 = υ_0t_1 = 2$ m.
$W_F = -Fs_1 = -10$ J.

β) Τη χρονική στιγμή $t_1$ το $Σ_1$ απέχει από το $Σ_2$ απόσταση $Δs = s - s_1 = 4{,}5$ m και μέχρι να συγκρουστεί με το $Σ_2$ κινείται ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενο.

$ΣF = m_1α$ ή $m_1gημφ = m_1α$ ή $α = 5$ m/s²

$Δs = υ_0Δt + \frac{1}{2}αΔt^2$ ή $Δt = 1$ s.

Τη στιγμή της σύγκρουσης:

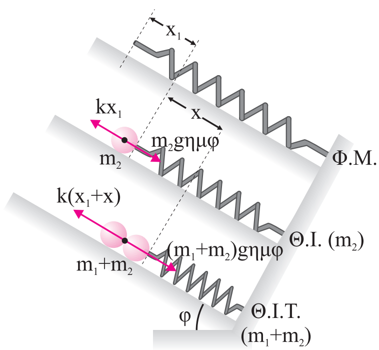
$υ_1 = υ_0 + αΔt = 7$ m/s

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_1υ_1 = (m_1 + m_2)υ_κ$ ή $υ_κ = 3{,}5$ m/s

γ) Στη Θ.Ι. ($m_2$): $m_2gημφ = kx_1$ ή $x_1 = 0{,}1$ m

Στη Θ.Ι.Τ. του $(m_1 + m_2)$:

$(m_1 + m_2)gημφ = k(x_1 + x)$ ή $x = 0{,}1$ m




Από ΑΔΕΤ:

$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)υ_κ^2 = \frac{1}{2}kA^2$ ή $A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ m

δ) Η μέγιστη δύναμη επαφής $F_{επ}$ είναι στη θέση $x = +A$.

$ω = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = 5$ rad/s

Για την ταλάντωση του $Σ_1$:

$|ΣF_1| = D_1A = m_1ω^2A = 12{,}5\sqrt{2}\ N$

$|ΣF_1| = |F_{επ}| - m_1gημφ$ ή $|F_{επ}| \cong 22{,}68\ N$

**6.381** $α_1$) Αν υ η ταχύτητα του $Σ_1$ στη θέση Β:

$\frac{1}{2}m_1υ^2 = m_1gR_1$ ή $υ = 4\ m/s$

$ΣF = F_{κεντρομόλος}$ ή $N - w_1 = m_1\frac{υ^2}{R_1}$ ή $N = 60\ N$

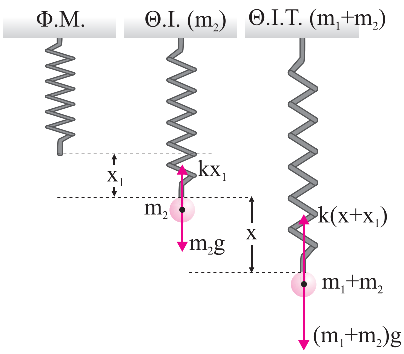
$α_2$) Έστω ότι το ΒΓ δεν είναι λείο.
Από ΘΜΚΕ από το Α έως το Γ:

$\frac{1}{2}m_1υ_1^2 = m_1gR_1 - m_1gR_2 - |W_T|$ ή $|W_T| = 4\ J$,

άρα: $Q = 4\ J$.

$π\% = \frac{Q}{m_1gR_1}100\% = 25\%$

$β_1$) Για την κρούση των $Σ_1$, $Σ_2$:
$m_1υ_1 = (m_1 + m_2)υ_κ$ ή $υ_κ = 1\ m/s$
Στη Θ.Ι. του $m_2$: $m_2g = kx_1$ ή $x_1 = 0{,}1\ m$




Στη Θ.Ι.Τ. του $m_1 + m_2$: $(m_1 + m_2)g = k(x_1 + x)$
ή $x = 0{,}1\ m$

Από ΑΔΕΤ:

$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)υ_κ^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)υ_{max}^2$ ή

$υ_{max} = \frac{\sqrt{6}}{2}\ m/s$

$β_2$) $W_{F_{επ_2}} = K_{τελ_2} - K_{αρχ_2} = 0 - \frac{1}{2}m_2υ_κ^2 = -1\ J$

**6.382** α) ΘΜΚΕ:

$\frac{1}{2}m_1υ_1^2 - \frac{1}{2}m_1υ_0^2 = m_1gh$ ή

$υ_1 = 10\ m/s$

β) $Δ\vec{p} = Δ\vec{p}_x + Δ\vec{p}_y = Δ\vec{p}_y$

$υ_1^2 = υ_{1x}^2 + υ_{1y}^2$ ή $υ_{1y} = \sqrt{υ_1^2 - υ_0^2} = 5\sqrt{3}\ m/s$

$συνφ = \frac{υ_{1x}}{υ_1} = \frac{1}{2}$ ή $φ = \frac{π}{3}\ rad$

$Δp = Δp_y = m_1υ_{1y} = 5\sqrt{3}\ kg \cdot m/s$

γ) $\vec{p}_{αρχ_x} = \vec{p}_{τελ_x}$ ή $m_1υ_0 = (m_1 + m_2)υ_κ$ ή

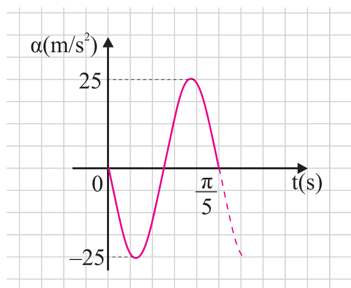
$υ_κ = 2{,}5\ m/s$

$π_κ\% = \frac{K_1' - K_1}{K_1}100\% = -93{,}75\%$

δ) $ω = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = 10\ rad/s$, $T = \frac{2π}{ω} = \frac{π}{5}\ s$

$υ_κ = υ_{max} = ωA$ ή $A = 0{,}25\ m$, $φ_0 = 0$

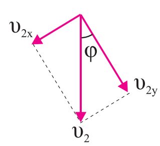
$α = -25ημ10t$ SI




ε) $\frac{Δp}{Δt} = -kx$ ή $x = 0{,}25\ m$

$U_2 = \frac{1}{2}D_2x^2 = \frac{1}{2}m_2ω^2x^2 = 3{,}125\ J$

**6.383** α) ΘΜΚΕ:




$\frac{1}{2}m_2υ_2^2 = m_2gh$ ή

$υ_2 = 4\sqrt{3}\ m/s$

$υ_{2x} = υ_2 ημφ$ ή $υ_{2x} = 2\sqrt{3}$ m/s

$υ_{2y} = υ_2 συνφ$ ή $υ_{2y} = 6$ m/s

$\Delta\vec{p} = \Delta\vec{p}_x + \Delta\vec{p}_y$ ή $\Delta\vec{p} = \Delta\vec{p}_y$ ή

$\Delta p = 0 - m_2 υ_{2y} = -12$ kg · m/s

β) $\vec{p}_{αρχ_x} = \vec{p}_{τελ_x}$ ή $m_2 υ_{2x} = (m_1 + m_2)υ_κ$ ή

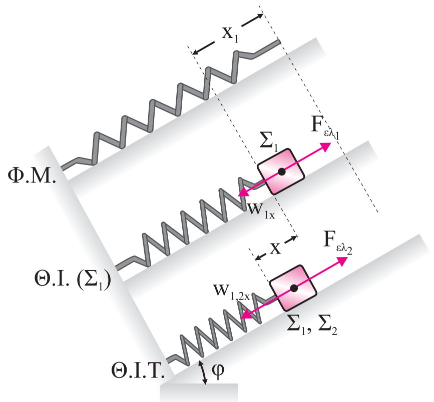
$υ_κ = \sqrt{3}$ m/s

Θ.Ι. ($Σ_1$): $Σ\vec{F}_1 = 0$ ή $m_1 gημφ = kx_1$ ή $x_1 = 0{,}1$ m

Θ.Ι.Τ.: $Σ\vec{F} = 0$ ή $(m_1 + m_2)gημφ = k(x + x_1)$ ή $x = 0{,}1$ m

ΑΔΕΤ:

$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)υ_κ^2$ ή $A = 0{,}36$ m




γ) $F_{ελ} = k(x_1 + x + A) = 56$ N.

δ) Το συσσωμάτωμα χάνει την επαφή του με το ελατήριο στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

ΑΔΕΤ:

$K + \frac{1}{2}k(x + x_1)^2 = \frac{1}{2}kA^2$ ή $K = 4{,}48$ J

ΘΜΚΕ από τη θέση φυσικού μήκους μέχρι να σταματήσει στιγμιαία το συσσωμάτωμα:

$0 - K = -(m_1 + m_2)gημφs$ ή $s = 0{,}224$ m

**6.384** α) Για την πλαστική κρούση έχουμε:

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_1 υ_1 = (m_1 + m_2)υ_κ$ ή $υ_1 = 4$ m/s

ΘΜΚΕ για το $Σ_1$:

$\frac{1}{2}m_1 υ_1^2 - \frac{1}{2}m_1 υ_0^2 = -μm_1 g(d + x)$ ή $υ_0 = 6$ m/s

β) Για το $Σ_1$: $ΣF_1 = m_1 α_1$ ή $-μm_1 g = m_1 α_1$ ή

$α_1 = -4$ m/s²

$υ_1 = υ_0 - |α_1|t$ ή $t = 0{,}5$ s

γ) $$π_K\% = \frac{\frac{1}{2}m_1 υ_κ^2}{\frac{1}{2}m_1 υ_1^2}100\% = 6{,}25\%$$

δ) ΘΜΚΕ για το συσσωμάτωμα:

$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_T + W_{F_{ελ}}$ ή

$0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)υ_κ^2 =$

$= -μ(m_1 + m_2)g(x_{max} - x) + \left(\frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_{max}^2\right)$ ή

$x_{max} = 0{,}2$ m

**6.385** α) $ω = \frac{35π}{18}$ rad/s και $ω = \sqrt{\frac{k}{m_A}}$ ή

$k = 37{,}81$ N/m

β) Για $t_1 = \frac{6}{35}$ s: $x_1 = 0{,}1\sqrt{3}$ m και

$\frac{dp}{dt} = ΣF = -Dx_1 = -m_A ω^2 x_1 =$

$= -3{,}78\sqrt{3}$ kg · m/s²

γ) Για το σώμα Β:

$\frac{1}{2}m_B υ_0^2 = m_B g h_B$ ή $h_B = 1{,}25$ m και

$t_B = \frac{υ_0}{g}$ ή $t_B = 0{,}5$ s

Στον ίδιο χρόνο για το Α:

$x = 0{,}2ημ\frac{35π}{18} \cdot 0{,}5 > 0$,

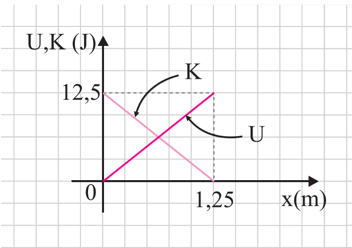
δηλαδή το Α βρίσκεται πάνω από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης και επομένως δε συγκρούεται με το Β μέχρι τη χρονική στιγμή $t_B = 0{,}5$ s που το σώμα Β κινείται ανοδικά.

Από ΑΔΜΕ για το σώμα Β:

$$K_{αρχ} = K + U \text{ ή } \frac{1}{2}m_B υ_0^2 = K + m_B g x \text{ ή}$$

$K = 12{,}5 - 10x$ SI με $x \le 1{,}25$ m

$U = m_B g x = 10x$ SI με $x \le 1{,}25$ m




δ) Για $t_2 = 0{,}6$ s:

Για το Α:

$$x_A = 0{,}2ημ\frac{35π}{18}\cdot 0{,}6 = 0{,}2ημ\frac{7π}{6} = -0{,}1 \text{ m}$$

δηλαδή το Α βρίσκεται σε ύψος

$h_A = h - |x_A| = 1{,}2$ m από το έδαφος.

Για το Β:

$$h_B = υ_0 t_2 - \frac{1}{2}g t_2^2 = 1{,}2 \text{ m}$$

Άρα τα δύο σώματα συγκρούνται.

ε) Τη στιγμή της σύγκρουσης:

$$υ_A = ωΑσυν\frac{7π}{6} = -1{,}057 \text{ m/s και}$$

$υ_B = υ_0 - g t_2 = -1$ m/s

Από ΑΔΟ:

$m_A υ_A + m_B υ_B = (m_A + m_B)υ_κ$ ή

$υ_κ = -1{,}0285$ m/s

$$π\% = \frac{m_B|υ_κ| - m_B|υ_B|}{m_B|υ_B|}100\% = 2{,}85\%$$

**6.386** α) $ω = \sqrt{\dfrac{k}{m_1}}$ ή $ω = 10$ rad/s

$υ_1 = ω\sqrt{A^2 - x_1^2}$ ή $υ_1 = 2$ m/s

Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$m_1υ_1 - m_2υ_2συνφ = (m_1 + m_2)υ_κ$ ή

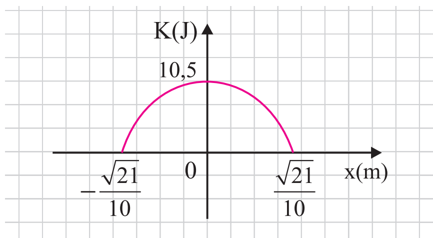
$$υ_κ = \frac{m_1υ_1 - m_2υ_2συνφ}{m_1 + m_2} \text{ ή } υ_κ = -1{,}5 \text{ m/s.}$$

β) $\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)υ_κ^2 = \frac{1}{2}kA'^2$ ή

$$A'^2 = x_1^2 + \frac{m_1 + m_2}{k}υ_κ^2 \text{ ή } A' = \frac{\sqrt{21}}{10} \text{ m}$$

γ) $K = E - \frac{1}{2}kx^2$ ή $E = \frac{1}{2}kA'^2 - \frac{1}{2}kx^2$ ή

$E = 10{,}5 - 50x^2$ (SI)




δ) $π\% = \dfrac{K_{αρχ} - K_{τελ}}{K_{αρχ}}100\% =$

$$= \left[1 - \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)υ_κ^2}{\frac{1}{2}m_1υ_1^2 + \frac{1}{2}m_2υ_2^2}\right]100\% = 95{,}41\%$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο

# ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

## Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

7.3α, 7.4α, 7.5δ, 7.6γ, 7.7β, 7.8γ, 7.9β, 7.10α, 7.11δ, 7.12β, 7.13γ, 7.14δ, 7.15γ, 7.16β, 7.17γ, 7.18γ

## Ερωτήσεις σωστού – λάθους

7.19Λ, 7.20Σ, 7.21Λ, 7.22Λ, 7.23Σ, 7.24Λ, 7.25Λ, 7.26Λ, 7.27Λ, 7.28Λ, 7.29Λ, 7.30Λ

## Ερωτήσεις κατανόησης

**7.31** α: $\dfrac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t_1}$ ή $t_1 = \dfrac{\ln 2}{\Lambda}$

$\dfrac{E_0}{2} = E_0 e^{-2\Lambda t_2}$ ή $t_2 = \dfrac{\ln 2}{2\Lambda}$

Άρα: $t_1 = 2t_2$

**7.32** α: $A_2 = A_0 e^{-2\Lambda T}$

$$\pi_A\% = \frac{A_2 - A_0}{A_0}100\% = (e^{-2\Lambda T} - 1)100\%$$

**7.33** γ: $A = \dfrac{A_0}{2}$

$$|\pi_E\%| = \left|\frac{E - E_0}{E_0}100\%\right| = \left|\left(\frac{E}{E_0} - 1\right)100\%\right| =$$

$$\left|\left(\frac{\frac{1}{2}DA^2}{\frac{1}{2}DA_0^2} - 1\right)100\%\right| = 75\%$$

**7.34** γ: $E = \dfrac{56{,}25}{100}E_0$ ή

$\dfrac{1}{2}DA^2 = 0{,}5625\dfrac{1}{2}DA_0^2$ ή

$A^2 = 0{,}5625A_0^2$ ή $A = \dfrac{3}{4}A_0$

$$|\pi_A\%| = \left|\frac{A - A_0}{A_0}100\%\right| = 25\%$$

**7.35** α: $W_F = E - E_0 = \dfrac{1}{2}DA^2 - \dfrac{1}{2}DA_0^2 =$

$$= \frac{1}{2}D\frac{A_0^2}{64} - \frac{1}{2}DA_0^2 = -\frac{63}{128}DA_0^2$$

**7.36** γ: $W_F = E_{\tau\alpha\lambda.\tau\varepsilon\lambda.} - E_{\tau\alpha\lambda.\alpha\rho\chi.}$

**7.37** β: $A_{2K} = A_0 e^{-2\Lambda\kappa T} = \dfrac{A_0^2}{A_0}e^{-2\Lambda\kappa T} = \dfrac{A_\kappa^2}{A_0}$

**7.38** α: $A = A_0 e^{-\Lambda\frac{2\ln 2}{\Lambda}} = A_0 e^{-2\ln 2} = A_0 e^{\ln 2^{-2}} =$

$$= \frac{A_0}{2^2} = \frac{A_0}{4}$$

$$\pi_A\% = \frac{A - A_0}{A_0}100\% = -75\%$$

**7.39** β: $\dfrac{E_0}{4} = E_0 e^{-2\Lambda t}$ ή $4 = e^{2\Lambda t}$ ή

$2\ln 2 = 2\Lambda t$ ή $t = \dfrac{\ln 2}{\Lambda}$

**7.40** γ: $\dfrac{E_2}{E_0} = \dfrac{E_0 e^{-4\Lambda t}}{E_0} = e^{-4\Lambda T}$

**7.41** γ: $\dfrac{A_0}{16} = A_0 e^{-3\Lambda T}$ ή $16 = e^{3\Lambda T}$ ή

$3\Lambda T = \ln 16$ ή $3\Lambda T = 4\ln 2$ ή $\Lambda = \dfrac{4\ln 2}{3T}$

**7.42** β: $\dfrac{E_0}{16} = E_0 e^{-8\Lambda T}$ ή $16 = e^{8\Lambda T}$ ή $8\Lambda T = \ln 16$

ή $8\Lambda T = 4\ln 2$ ή $T = \dfrac{4\ln 2}{8\Lambda}$ ή $T = 1$ s

**7.43** α: $E_{3\beta} = E_0 e^{-6\Lambda\beta T} = \frac{E_0^3}{E_0^2} e^{-6\Lambda\beta T} = \frac{E_\beta^3}{E_0^2}$

**7.44** α: Στη Θ.Ι. ισχύει:

$mg = kx_1$ ή $x_1 = \frac{mg}{k} = A_0$

$d = A_0 - A_1 = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k} e^{-\Lambda T} = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\Lambda T})$

**7.45** β: $E_N = 12\text{ J} - 9\text{ J} = 3\text{ J}$ ή $E_N = \frac{E_0}{4}$ ή

$\frac{1}{2}DA_N^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}DA_0^2$ ή $A_N = \frac{1}{2}A_0$ ή $A_0 = 2A_N$

**7.46** α: $A_4 = A_0 e^{-4\Lambda T}$ ή $e^{-4\Lambda T} = \frac{1}{4}$

$$A_{20} = A_0 e^{-20\Lambda T} = A_0\left(e^{-4\Lambda T}\right)^5 = \frac{A_0}{4^5}$$

$$Q = E_4 - E_{20} = \frac{1}{2}DA_4^2 - \frac{1}{2}DA_{20}^2 = \frac{2m\pi^2}{T^2 \cdot 4^{10}} A_0^2\left(4^8 - 1\right)$$

**7.47** β: Από ΘΜΚΕ: $K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_T + W_{F_{\varepsilon\lambda}}$

ή $0 = -Ts + \frac{1}{2}kd^2$ ή $\mu mgs = \frac{1}{2}kd^2$ ή

$$s = \frac{kd^2}{2\mu mg}$$

**7.48** γ: ΘΜΚΕ από την αρχική θέση μέχρι τη θέση Β:

$K_B - K_{\alpha\rho\chi} = W_T + W_{F_{\varepsilon\lambda}}$ ή

$0 - K_{\alpha\rho\chi} = -\mu mgx_1 - \frac{1}{2}kx_1^2$ ή

$K_{\alpha\rho\chi} = \mu mgx_1 + \frac{1}{2}kx_1^2$ (1)

ΘΜΚΕ από την αρχική θέση μέχρι τη θέση Γ:

$K_\Gamma - K_{\alpha\rho\chi} = W_T + W_{F_{\varepsilon\lambda}}$ ή

$K_{\alpha\rho\chi} = \mu mg\left(2x_1 + x_2\right) + \frac{1}{2}kx_2^2$ (2)

Από (1), (2) έχουμε:

$\frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = \mu mg\left(x_1 + x_2\right)$ ή

$\frac{1}{2}k\left(x_1 + x_2\right)\left(x_1 - x_2\right) = \mu mg\left(x_1 + x_2\right)$ ή

$$x_1 - x_2 = \frac{2\mu mg}{k}$$

## Ασκήσεις

**7.49** α) $\frac{A_0}{4} = A_0 e^{-6\Lambda}$ ή $\Lambda = \frac{\ell n2}{3}s^{-1}$

β) $$\pi_E\% = \frac{\frac{1}{2}D\left(\frac{A_0}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}DA_0^2}{\frac{1}{2}DA_0^2}100\% = -93,75\%$$

**7.50** α) $\frac{1}{2}DA_1^2 = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}DA_0^2\right)$ ή $A_1 = \frac{A_0}{4}$

$\frac{A_0}{4} = A_0 e^{-1\Lambda}$ ή $\Lambda = 2 \cdot \ell n2\ s^{-1}$

β) $\frac{T}{4} = 0,25s$ ή $T = 1s$

$$\pi_A\% = \frac{A_1 - A_0}{A_0} \cdot 100\% = -75\%$$

**7.51** α) $A_2 = 1,56 \cdot 10^{-3}$ m, β) $A_3 = 0,05$m

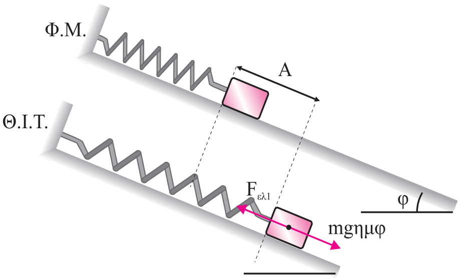
**7.52** α) $\frac{E_0}{E_1} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{E_2}{E_3}$, άρα:

$E_1^2 = E_0 \cdot E_2$ ή $E_1 = 40J$ και ομοίως $E_3 = 10J$

β) $\pi_{E_1}\% = \dfrac{E_1 - E_0}{E_0}\cdot 100\% = -50\%$

και $\pi_{E_2}\% = -50\%$

**7.53** α) Θ.Ι.Τ.: $mg\eta\mu\varphi = kA_0$ ή $A_0 = \dfrac{1}{80}m$




β) Η ενέργεια ταλάντωσης μετατρέπεται σε θερμότητα που είναι ίση κατά απόλυτη τιμή με το έργο της F.

$$W_F = -\frac{1}{2}kA_0^2 = -\frac{1}{16}J$$

**7.54** α) $A_K = A_0 e^{-\Lambda\kappa T}$ ή $e^{-\Lambda\kappa T} = \dfrac{4}{5}$

Οι 3κ επιπλέον ταλαντώσεις αντιστοιχούν σε χρόνο t = 4κT.

$$A' = A_0\left(e^{-\Lambda\kappa T}\right)^4 = A_0\left(\frac{4}{5}\right)^4 \simeq 0{,}41A_0$$

β) $\dfrac{E'}{E_0} = \dfrac{\frac{1}{2}DA'^2}{\frac{1}{2}DA_0^2} = 0{,}168$

**7.55** α) $A_1 = A_0 e^{-\Lambda t}$ ή $\omega A_1 = \omega A_0 e^{-\Lambda t}$

ή $\upsilon_{max_1} = \upsilon_{max_0} e^{-10\Lambda}$ ή $\Lambda = \dfrac{\ell n2}{10}s^{-1}$

β) $\upsilon_{max_3} = \upsilon_{max_0} e^{-30\Lambda} = 2{,}5m/s$

γ) $2 = 20e^{-\Lambda t}$ ή $t = \dfrac{10\ell n10}{\ell n2}s$

δ) Για $t_2 = 20s$, $A_2 = \dfrac{A_0}{4}$

$$\pi_A\% = \frac{A_2 - A_0}{A_0}\cdot 100\% = -75\%$$

**7.56** α) $\pi_\upsilon\% = \dfrac{\omega A_1 - \omega A_0}{\omega A_0}\cdot 100\% = \pi_A\% = -87{,}5\%$

β) $\pi_\alpha\% = \dfrac{\omega^2 A_1 - \omega^2 A_0}{\omega^2 A_0}\cdot 100\% = -87{,}5\%$

γ) $A_1 = 0{,}125A_0$ και $\pi_{E_1}\% = -98{,}43\%$

**7.57** α) $\dfrac{E_0}{E_1} = \dfrac{E_1}{E_2}$ ή $E_1 = 40J$

$$|\Delta E| = |E_1 - E_0| = 120J$$

β) $\dfrac{T}{2} = 2s$ ή $T = 4s$

$$E_1 = E_0 e^{-2\Lambda t} \text{ ή } 40 = 160e^{-8\Lambda} \text{ ή } \Lambda = \frac{\ell n2}{4}s^{-1}$$

γ) $\dfrac{\alpha_{max_2}}{\alpha_{max_0}} = \dfrac{\omega^2 A_2}{\omega^2 A_0} = \dfrac{A_0 e^{-2\Lambda T}}{A_0} = \dfrac{1}{4}$

δ) $\dfrac{A_0}{8} = A_0 e^{-\Lambda t}$ ή $e^{-\Lambda t} = \dfrac{1}{8}$ ή $t = 12s$

## Προβλήματα

**7.58** α) $\dfrac{A_0}{4} = A_0 e^{-10\Lambda T}$ ή $e^{-10\Lambda T} = \dfrac{1}{4}$,

$$A_{40} = A_0 e^{-40\Lambda T} = A_0\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{A_0}{256}$$

β) $Q = |\Delta E| = |E_{20} - E_0| =$

$$= \left|\frac{1}{2}DA_{20}^2 - \frac{1}{2}DA_0^2\right| = \frac{255}{512}DA_0^2$$

γ) $\dfrac{E_0}{8} = E_0 e^{-2\Lambda t}$ ή $e^{-2\Lambda t} = \dfrac{1}{8}$ ή $t = \dfrac{3\ell n2}{2\Lambda}s$

**7.59** α) $f = \frac{N}{t} = 20Hz$

β) $\frac{E_0}{4} = E_0 e^{-2\Lambda \cdot 2}$ ή $\Lambda = \frac{\ell n2}{2} s^{-1}$

γ) $A_2 = A_0 e^{-4\Lambda} = 0{,}025m$

δ) Για $t_1 = 2s : E_1 = 2J$

Για $t_2 = 4s : E_2 = 0{,}5J$

Άρα: $W_F = E_2 - E_1 = -1{,}5J$

**7.60** α) $\frac{12{,}5}{100} E_0 = E_0 e^{-2\Lambda t_1}$

ή $e^{-2\Lambda t_1} = \frac{1}{8}$ ή $t_1 = \frac{3\ell n2}{2\Lambda} s$

β) $A_1 = 0{,}8A_0$ και $\pi_E\% = -36\%$

γ) $W_F = E_T - E_\alpha = -\frac{1}{2} DA_0^2$

**7.61** α) $10 = 20e^{-4\Lambda}$ ή $\Lambda = \frac{\ell n2}{4} s^{-1}$

β) $\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2}$ ή $A_1 = 0{,}1\sqrt{2}m$

γ) $\pi_E\% = \frac{E_2 - E_1}{E_1} \cdot 100\% = -50\%$

δ) $T = 2s, \omega = \pi rad/s$

$W_F = E_2 - E_0 = -0{,}3J$

**7.62** α) $\pi_A\% = \frac{A_1 - A_0}{A_0} 100\% = \left(\frac{A_1}{A_0} - 1\right) 100\% =$

$= \left(\frac{A_0 e^{-\Lambda T}}{A_0} - 1\right) 100\% = \left(e^{-\Lambda T} - 1\right) 100\%$

$\pi_E\% = \frac{E_1 - E_0}{E_0} 100\% = \left(\frac{E_0 e^{-2\Lambda T}}{E_0} - 1\right) 100\% =$

$= (e^{-2\Lambda T} - 1) 100\%$

β) $\frac{E_0}{E_1} = \frac{E_1}{E_2}$ ή $\frac{E_0}{E_0 - E'_1} = \frac{E_0 - E'_1}{E_1 - E'_2}$ ή

$E_0(E_1 - E'_2) = (E_0 - E'_1)^2$

γ) $A_6 = \frac{A_0}{2}$ (1) και $A_6 = A_0 e^{-6\Lambda T}$ (2)

Από (1) και (2): $e^{-6\Lambda T} = \frac{1}{2}$

Μετά από 18 ταλαντώσεις:

$A_{18} = A_0 e^{-18\Lambda T} = A_0 (e^{-6\Lambda T})^3 = \frac{A_0}{8}$

δ) $W_F = E_6 - E_0 = \frac{1}{2} DA_6^2 - \frac{1}{2} DA_0^2 =$

$= \frac{1}{2} D\left(\frac{A_0^2}{4} - A_0^2\right) = -\frac{3DA_0^2}{8}$

ε) $\pi_E\% = \frac{E_{18} - E_6}{E_6} 100\% = \left(\frac{A_{18}^2 - A_6^2}{A_6^2}\right) 100\% =$

$= \left[\left(\frac{A_{18}}{A_6}\right)^2 - 1\right] 100\% = \left[\left(\frac{\frac{A_0}{8}}{\frac{A_0}{2}}\right)^2 - 1\right] 100\% =$

$= \left(\frac{1}{16} - 1\right) 100\% = -93{,}75\%$

**7.63** Α. $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10$ rad/s

$F_{\varepsilon\pi} = -m\omega^2 x$ και για $F_{\varepsilon\pi} = -12N$: $x = 0{,}06$ m

Από ΑΔΕΤ:

$\frac{1}{2} Dx^2 + \frac{1}{2} mu^2 = \frac{1}{2} DA_0^2$ ή $A_0 = 0{,}1$ m

β$_1$) $A_3 = 0{,}6\,A_0$ ή $A_3 = 0{,}06$ m

$E_3 = \frac{1}{2} DA_3^2 = 0{,}36$ J

β$_2$) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{5}$ s

Για t = 3T: $A_3 = A_0 e^{-\Lambda 3T}$ ή $0{,}6 = e^{-\Lambda 3T}$ ή

$\Lambda = \frac{5}{3\pi} \ln \frac{5}{3}\, s^{-1} \approx 0{,}27 s^{-1}$

**7.64** α) Από το διάγραμμα x = f(t): $A_0 = 0{,}2$ m

Για t = 3T: $A_3 = 0{,}05$ m

$A_3 = A_0 e^{-3\Lambda T}$ ή $\frac{1}{4} = e^{-3\Lambda T}$ ή $3\Lambda T = 2\ell n2$ ή

$T = \frac{2\ell n2}{3\Lambda} = 2$ s

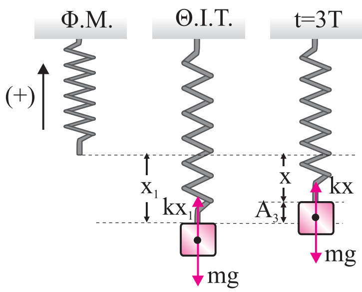
$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ή k = 40 N/m

β) $A_6 = 0{,}2e^{-6\Lambda T} = 0{,}2\, e^{-6\frac{\ell n2}{3}2} = 0{,}2\, e^{-4\ell n2} =$

$= 0{,}2^{\ell n2^{-4}} = \frac{0{,}2}{2^4} = 0{,}0125$ m

γ) $W_F = E_{\tau\varepsilon\lambda} - E_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}kA_6^2 - \frac{1}{2}kA_3^2 = -0{,}047$ J

δ) Θ.Ι.Τ.: $mg = kx_1$ ή $x_1 = 1$ m




Για t = 3T: $F_{\varepsilon\lambda} = kx = k(x_1 - A_3) = 38$N

**7.65** α$_1$) Για t = 0: υ = 0, άρα $x = A_0$

Στη Θ.Ι.Τ.: $mg = kA_0$ ή $A_0 = \frac{mg}{k} = 0{,}4$m

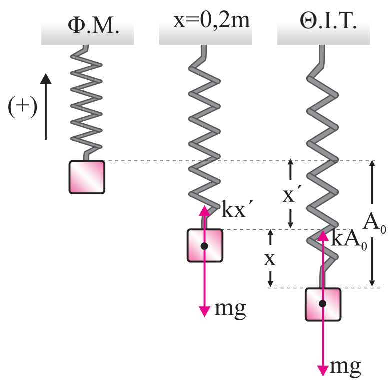
$U_{max} \frac{1}{2} = kA_0^2 = 8$J

α$_2$) $\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -kx$ ή x = 0,2m

Η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι:

$x' = A_0 - x = 0{,}2$m

Άρα: $F_{\varepsilon\lambda} = kx' = 20$ N




β$_1$) $E' = 0{,}25E$ ή $E_0 e^{-2\Lambda(t-T)} = \frac{E_0}{4}$ ή

$e^{-2\Lambda(t-T)} = \frac{1}{4}$ ή $2\Lambda(t-T) = \ell n4$ ή

$2\Lambda(t-T) = 2\ell n2$ ή $t - T = 1$s (1)

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{5}$ s (2)

Από (1) και (2): t = 2,256s

β$_2$) $W_F = -E_0$ ή $W_F = -\frac{1}{2}kA_0^2 = -8$J

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8ο

# ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

## Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

8.3α, 8.4γ, 8.5β, 8.6δ, 8.7δ, 8.8γ, 8.9γ, 8.10δ, 8.11δ, 8.12δ, 8.13γ

## Ερωτήσεις σωστού – λάθους

8.14Σ, 8.15Λ, 8.16Σ, 8.17Λ, 8.18Λ, 8.19Σ, 8.20Σ, 8.21Σ, 8.22Λ, 8.23Σ, 8.24Σ, 8.25Λ, 8.26Λ, 8.27Σ, 8.28Λ, 8.29Σ, 8.30Σ

## Ερωτήσεις Κατανόησης

**8.31** β: $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{4m}} = \dfrac{1}{4\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} = \dfrac{f_0}{2}$

$f' = 2f = f_0$

Το σύστημα βρίσκεται σε συντονισμό, οπότε το πλάτος γίνεται μέγιστο.

**8.32** α: Για το σύστημα m, k ισχύει: $f = f_0$

Το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού.

Για $f_1 = f_0\sqrt{2}$, το πλάτος $A_1$ μειώνεται.

Για το σύστημα m, 2k ισχύει: $f < f_0'$ και $f_1 = f_0'$

Άρα, το σύστημα μεταβαίνει σε κατάσταση συντονισμού, οπότε το πλάτος $A_2$ αυξάνεται.

**8.33** β: Επειδή $f' = 2f$ ή $T' = \dfrac{T}{2}$ και το σύστημα σταμάτησε να βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού, το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται.

**8.34** Α. α: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $f_0' = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{4m}} = \dfrac{1}{2}f_0$

Β. β: Αρχικά το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού.

$f' = f_0 > f_0'$

Το σύστημα δε βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού, άρα το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται.

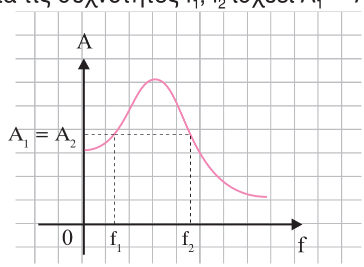
**8.35** γ: Αρχικά ισχύει:

$f_1 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{6k}{m}} = f_0\sqrt{6}$

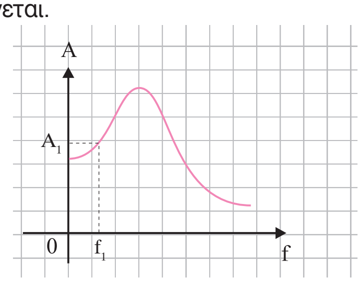
Τελικά ισχύει: $f_2 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} = f_0$

Το σύστημα μεταβαίνει σε κατάσταση συντονισμού, άρα: $A_2 > A_1$

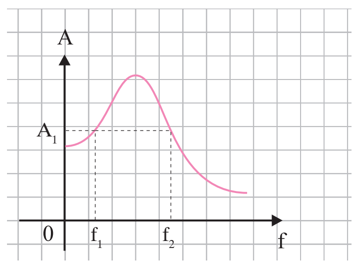
**8.36** β: Από το διάγραμμα A = f(f) προκύπτει ότι για τις συχνότητες $f_1$, $f_2$ ισχύει $A_1 = A_2$.




**8.37** δ: Όπως προκύπτει από το διάγραμμα A = f(f) το πλάτος αρχικά αυξάνεται και μετά μειώνεται.

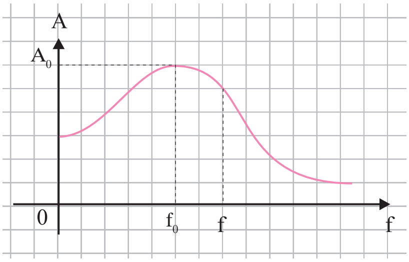



**8.38** γ: Από το διάγραμμα A = f(f) προκύπτει ότι για $f_1 < f < f_2$ έχουμε: $A > A_1$



**8.39** α: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} = \dfrac{5}{\pi}$ Hz, επομένως $f > f_0$.

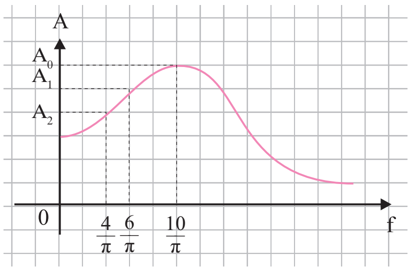
Όπως προκύπτει από το διάγραμμα A = f(f), αν αυξηθεί η συχνότητα του διεγέρτη, το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται.




**8.40** β: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} = \dfrac{10}{\pi}$Hz

$$\Delta t_1 = \frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{12}\text{s} \quad ή \quad T_1 = \frac{\pi}{6}\text{s} \quad ή \quad f_1 = \frac{6}{\pi}\text{Hz}$$

$$\Delta t_2 = \frac{T_2}{2} = \frac{\pi}{16}\text{s} \quad ή \quad T_2 = \frac{\pi}{4}\text{s} \quad ή \quad f_2 = \frac{4}{\pi}\text{Hz}$$

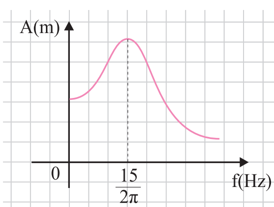



Άρα, το πλάτος μειώθηκε $(A_2 < A_1)$.

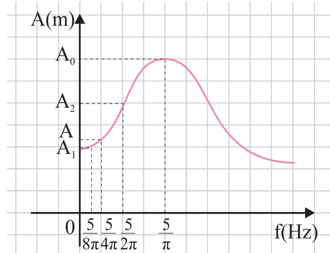
## Ασκήσεις

**8.41** α-β) $f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} = \dfrac{15}{2\pi}$ Hz

Άρα $f = f_0$, δηλαδή έχουμε συντονισμό και επομένως κάθε αλλαγή της συχνότητας οδηγεί σε μείωση του πλάτους.




**8.42** $f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} = \dfrac{5}{\pi}$Hz




Η συχνότητα ταλάντωσης είναι:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{5}{4\pi}\text{Hz} < f_0$$

α) Όταν $T_1 = 2T$, τότε: $f_1 = \dfrac{f}{2} = \dfrac{5}{8\pi}$Hz

Από την καμπύλη A = f(f) προκύπτει ότι το πλάτος μειώνεται ($A_1 < A$).

β) Όταν $T_2 = \dfrac{T}{2}$, τότε $f_2 = 2f = \dfrac{5}{2\pi}$Hz, δηλαδή το πλάτος αυξάνεται ($A_2 > A$).

**8.43** α) $f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} = \dfrac{5}{2\pi}$Hz και $T_0 = \dfrac{2\pi}{5}$s

β) i) $f_1 = f_0$, άρα έχουμε συντονισμό και το πλάτος είναι $A_1$.

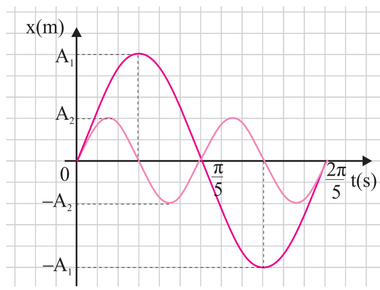
$\omega_1 = 2\pi f_1 = 5$ rad/s και $T_1 = \dfrac{2\pi}{5}$s

$x_1 = A_1 ημ5t$ SI

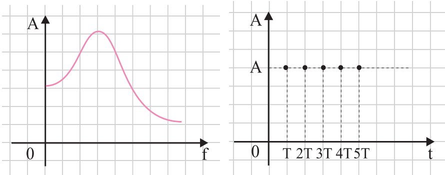
ii) $f_2 = \dfrac{5}{\pi} > f_0$ και το πλάτος είναι $A_2 < A_1$.

$\omega_2 = 2\pi f_2 = 10$ rad/s και $T_2 = \dfrac{\pi}{5}\text{s} = \dfrac{T_1}{2}$

$x_2 = A_2 ημ10t$ SI



**8.44**




**8.45** $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1}} = \frac{5}{\pi}Hz$, δηλαδή: $f_1 < f_0$

Όταν δημιουργείται συσσωμάτωμα, η ιδιοσυχνότητα γίνεται $f_0' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \frac{5}{2\pi}Hz$, άρα βρισκόμαστε σε κατάσταση συντονισμού και το πλάτος αυξάνεται.

**8.46** $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{5}{3\pi}Hz$, δηλαδή: $f > f_0$

Μετά τη διάσπαση η ιδιοσυχνότητα είναι

$f_0' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1}} = \frac{5}{\pi}Hz = f$, άρα βρισκόμαστε σε κατάσταση συντονισμού και το πλάτος αυξάνεται.

**8.47** $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20 rad/s$

$\alpha_1$) $x = 0{,}3\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI

$\alpha_2$) $\upsilon = 6\sigma\upsilon\nu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI

$\alpha_3$) $\alpha = -120\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI

$\beta_1$) $W_{F_{o\lambda}} = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = 0$

$\beta_2$) Για $t_1$: $\upsilon_1 = 3m/s$ και $K_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = 18J$

Για $t_2$ : $\upsilon_2 = -3\sqrt{3}\, m/s$ και

$K_2 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 = 54J$

Άρα: $W_{F_{o\lambda}} = K_2 - K_1 = 36J$

**8.48** $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{15}{\pi}Hz$

Άρα: $f = 2f_0 = \frac{30}{\pi}Hz$ και $\omega = 60 rad/s$

α) $x = 0{,}1\eta\mu\left(60t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI

β) $\alpha = -\omega^2 x = -360\eta\mu\left(60t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI

γ) $F_{\alpha\nu\tau} = -b\upsilon = -b\omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) =$
$= -0{,}6\sigma\upsilon\nu\left(60t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI

**8.49** α) $\omega_0 = 50\ rad/s = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ή

$k = 2.500 N/m$

β) Από τη σχέση F = f(t) προκύπτει:

$b\omega_0 A = 50N$ ή $A = 1m$

$x = 1\eta\mu\left(50t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI

$p = m\omega_0 A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) = 50\sigma\upsilon\nu\left(50t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI

γ) $p_F = F \cdot \upsilon = -b\upsilon\upsilon = -b\upsilon^2$

Για $t_1 = \frac{\pi}{150}s$: $\upsilon_1 = -25\sqrt{3}\, m/s$

Άρα: $p_F = -1.875$ W

## Προβλήματα

**8.50** α) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 rad/s$, $\omega = 2\omega_0 = 20$ rad/s

Από τη σχέση $\upsilon^2 = \omega^2(A^2 - x^2)$ έχουμε: A = 0,5m

$x = 0{,}5\eta\mu 20t$ SI

β) $F_{\alpha\nu\tau} = -b\upsilon = -15\sigma\upsilon\nu 20t$ SI

γ) $\omega_1' = \omega - 0{,}5\omega = 10 rad/s = \omega_0$, δηλαδή έχουμε συντονισμό και επομένως αύξηση του πλάτους της ταλάντωσης.

**8.51** α) Από τη σχέση $υ^2 = ω^2(A^2 - x^2)$ έχουμε $ω = 10\,rad/s$ και $υ = 10συν10t$ SI

β) $F = -bυ = -20συν10t$ SI

γ) $f_0 = \frac{1}{2π}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{5}{2π}Hz$, $f = \frac{ω}{2π} = \frac{5}{π}Hz$

Άρα, $f_1 = \frac{f}{2} = \frac{5}{2π}Hz = f_0$, δηλαδή έχουμε συντονισμό και επομένως το πλάτος αυξάνεται.

**8.52** α$_1$) Από ΑΔΕΤ: $\frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}mυ^2 = \frac{1}{2}DA^2$

με $D = k_1 + k_2$, οπότε A = 0,2m.

α$_2$) Για t = 0: $0{,}2 = 0{,}2ημφ_0$ άρα:

$$φ_0 = \frac{π}{2}\,rad$$

$$ω = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = 10\,rad/s$$

$$x = 0{,}2ημ\left(10t + \frac{π}{2}\right) \quad SI$$

Β. Η ενέργεια της ταλάντωσης, μέσω του έργου της τριβής, μετατρέπεται σε θερμότητα. Άρα:

$$\frac{1}{2}DA^2 = |W_T|$$

$$|W_T| = Ts_1 + Ts_2 + ... = Ts_{ολ} = μmgs_{ολ}$$

Επομένως: $\frac{1}{2}DA^2 = μmgs_{ολ}$ ή $s_{ολ} = 0{,}5m$

Γ. $f_0 = \frac{1}{2π}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \frac{5}{π}Hz$

$f_2 = 2f_1 = f_0$, επομένως είμαστε σε κατάσταση συντονισμού, άρα το πλάτος αυξάνεται.

**8.53** α) $f_0 = \frac{1}{2π}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{20}{π}Hz = f$, δηλαδή έχουμε συντονισμό.

β) $α = -ω^2Aημωt = -320ημ40t$ SI

γ) $ΔU = \frac{1}{2}Dx_2^2 - \frac{1}{2}Dx_1^2 = 8J$

δ) Επειδή είμαστε σε συντονισμό, ισχύει $|P_F| = |P_{F_{αντ}}| = bυ^2$ ή $|P_F| = 16W$.

**8.54** Η ισχύς της διεγείρουσας δύναμης είναι $P_F = Fυ$. Αλλά $F = |F_{αντ}| = bυ$, άρα:

$$P_F = bυ^2 = bω^2A^2\left(\frac{1 + συν2ωt}{2}\right)$$

$dW = P_F dt$, άρα: $\sum dW = \sum_0^T bω^2A^2\left(\frac{1 + συν2ωt}{2}\right)dt$

και, επειδή $\sum_0^T συν2ωtdt = 0$, έχουμε $W = πbA_0^2ω$.

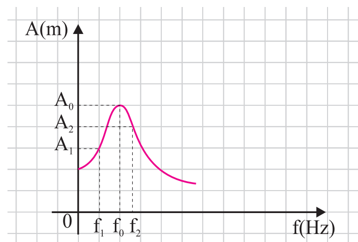
**8.55** α) $ω = \frac{2π}{T_1} = 6\,rad/s$, $x = 0{,}5ημ6t$ και $υ = 3συν6t$ SI

β) $υ = \pm ω\sqrt{A_1^2 - x^2} = \pm 2{,}4\,m/s$

γ) Για $t = \frac{π}{12}s$: $υ = 0$, άρα $p = 0$

δ) $f_0 = \frac{1}{2π}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{5}{π}Hz$

ε)




$f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{3}{π}Hz$ και $f_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{6}{π}Hz$

Επειδή $f_1 < f_0$ και $f_2 > f_0$, το πλάτος αρχικά αυξάνεται και μετά μειώνεται.

## 1ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ
## ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

### Θέμα 1ο

1γ, 2δ, 3β, 4γ, 5: α-Σ, β-Λ, γ-Σ, δ-Σ, ε-Σ

### Θέμα 2ο

1β: $D_1 = D_2$ και $m_1 = m_2$, άρα $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$\upsilon_{max_1} = \omega A_1$ και $\upsilon_{max_2} = \omega A_2$

Άρα: $\upsilon_{max_1} = \omega A_2\sqrt{2}$ ή $\upsilon_{max_1} = \sqrt{2}\upsilon_{max_2}$

2γ: $|F_{ελ}| = |F_{επ}|$ ή $kx = k(A-x)$ ή $x = \dfrac{A}{2}$

$$\frac{K}{U} = \frac{E-U}{U} = \frac{A^2}{x^2} - 1 = 3$$

3α: Θ.Ι.Τ.: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $(m_1+m_2)g\eta\mu\varphi = kA$

ή $A = \dfrac{(m_1+m_2)g}{2k}$

$K = 3U$ ή $E = 4U$ ή $\dfrac{1}{2}DA^2 = 4\dfrac{1}{2}Dx^2$ ή

$x = +\dfrac{A}{2}$ (για πρώτη φορά)

Για το $\Sigma_2$: $\Sigma F = -D_2 x$ ή

$T - m_2 g\eta\mu\varphi = -m_2\omega^2\dfrac{A}{2}$ ή

$$T = \frac{m_2 g}{2} - \frac{m_2 k}{m_1+m_2}\cdot\frac{(m_1+m_2)g}{4k} = \frac{m_2 g}{4}$$

### Θέμα 3ο

α) $\Sigma F = -kx$, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1}{k}} = \dfrac{\pi}{10}s$

β) Το $m_1$ αρχίζει την ταλάντωση από την ακραία θέση $x = -A = -0{,}4m$ και φτάνει στη Θ.Ι. σε χρόνο $\dfrac{T}{4} = \dfrac{\pi}{40}s$.

Για το σώμα $m_2$: $F = m_2\alpha$ ή $\alpha = 32m/s^2$

$$d = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{T}{4}\right)^2 = 0{,}1m$$

γ) Στη Θ. Ι., που γίνεται η σύγκρουση, έχουμε:

$p_1 = m_1\omega A$ και $p_2 = m_2\upsilon = m_2\alpha\dfrac{T}{4}$

Από Α.Δ.Ο.: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$

ή $m_1\omega A - m_2\alpha\dfrac{T}{4} = (m_1+m_2)\upsilon_\kappa$

Με $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 20rad/s$ και $A = 0{,}4m$ προκύπτει $\upsilon_\kappa = 0{,}116m/s$.

δ) Η Θ.Ι. δεν αλλάζει. Η νέα γωνιακή συχνότητα είναι: $\omega' = \sqrt{\dfrac{k}{m_{ολ.}}} = 10rad/s$

$\upsilon_{max} = 0{,}116m/s$

$p_2 = m_2\upsilon_\kappa\sigma\upsilon\nu\omega' t = 0{,}348\sigma\upsilon\nu 10t$ SI

### Θέμα 4ο

α) ΘΜΚΕ: $\dfrac{1}{2}m\upsilon^2 - \dfrac{1}{2}m\upsilon_0^2 = mgh$ ή

$\upsilon = \sqrt{3}m/s$

β) Θ.Ι.Τ.: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $F_{ελ} = w_1$ ή $kx_1 = m_1 g$

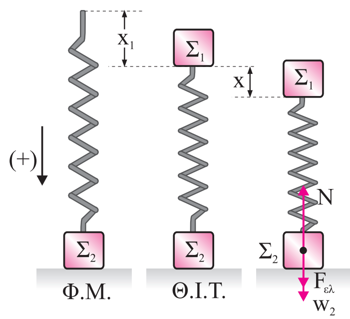
ή $x_1 = 0{,}1m$

ΑΔΕΤ: $\dfrac{1}{2}kx_1^2 + \dfrac{1}{2}m\upsilon^2 = \dfrac{1}{2}kA^2$ ή $A = 0{,}2m$

γ) $F_{ελ_{max}} = k(x_1 + A) = 30N$

δ) $\Sigma F_2 = 0$ ή $N = w_2 + F_{ελ}$ ή

$N = m_2 g + k(x + x_1) = 30N$




ε) Το σώμα $\Sigma_2$ χάνει επαφή με το έδαφος, όταν $N = 0$.

$N = w_2 + F_{ελ}$ ή $F_{ελ} = -w_2$ ή $kx_2 = -m_2 g$

ή $x_2 = -0{,}1m$

Το ελατήριο στη θέση $x_2$ είναι επιμηκυμένο κατά 0,1m, άρα το σώμα $\Sigma_1$ βρίσκεται στη θέση $x' = -0{,}2m = -A$.

## 2ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ
## ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

### Θέμα 1ο

1α, 2δ, 3γ, 4β, 5: α-Λ, β-Σ, γ-Σ, δ-Λ, ε-Λ

### Θέμα 2ο

$1γ: p' = m'\omega' A = 4m\dfrac{\omega}{2}A = 2m\omega A = 2p$

$2α: \Sigma F_2 = -D_2 x$ ή $T - m_2 g = -D_2 x$

ή $T = m_2 g - m_2\omega^2 x$ ή

$T = m_2 g - m_2\omega^2 Α ημ\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$3β: K_1 = 3U_1$ ή $Εσυν^2\omega t = 3Εημ^2\omega t$ ή $t_1 = \dfrac{T}{12}$.

Ομοίως $t_2 = \dfrac{T}{8}$, άρα: $\Delta t = \dfrac{T}{24}$

### Θέμα 3ο

α) Από τη γραφική παράσταση προκύπτει:

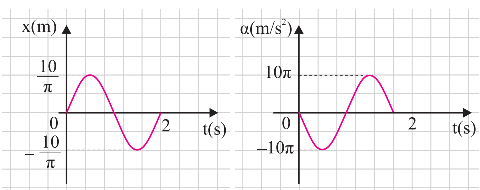
$T = 2s,\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi\,rad/s, A = \dfrac{υ_{max}}{\omega} = \dfrac{10}{\pi}m$

και $E = \dfrac{1}{2}mυ_{max}^2 = 50J$

$K = Εσυν^2\omega t = 50συν^2\pi t$ SI

β) $W_{Fεπ} = K_2 - K_1 = 50J$

γ) $x = \dfrac{10}{\pi}ημ\pi t$ SI και $α = -10\pi ημ\pi t$ SI




δ) $\dfrac{\Delta U}{\Delta t} = -\dfrac{\Delta K}{\Delta t} = -\Sigma F \cdot υ = 0$

### Θέμα 4ο

α) $\dfrac{1}{2}m_1υ^2 = \dfrac{80}{100}m_1gh$ ή $υ = 4m/s$

β) $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_1υ = m_{ολ}υ_κ$ ή $υ_κ = 2m/s$

$$\pi\% = \frac{\frac{1}{2}(m_1+m_2)υ_κ^2 - \frac{1}{2}m_1υ^2}{m_1gh}\cdot 100 = -40\%$$

γ) $υ_{max} = υ_κ = \omega A,\ \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_{ολ.}}} = 10rad/s$

Άρα: $A = 0{,}2m$

δ) Για $t_1 = 0: U_1 = 0$

Για $t_2 = \dfrac{T}{4}: U_2 = \dfrac{1}{2}m_1\omega^2A^2 = 4J$

Άρα: $\Delta U = 4J$

ε) $F_{ελ} = F_{επ} = -kx = -80ημ10t$ SI

## 3ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ
## ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

### Θέμα 1ο

1δ, 2β, 3δ, 4α, 5: α-Λ, β-Σ, γ-Λ, δ-Σ, ε-Λ

### Θέμα 2ο

1α: Έστω F η δύναμη επαφής που δέχεται το σώμα $\Sigma_2$ από το σώμα $\Sigma_1$.
Για το σώμα $\Sigma_2$ ισχύει:

$\Sigma F_x = -D_2x$ ή $F - m_2gημθ = -m_2\omega^2A$ ή

$F - m_2gημθ = -m_2\dfrac{k}{m_1+m_2}A$ ή

$F = m_2gημθ - m_2\dfrac{k}{m_1+m_2}A$

Για να μην αποχωριστούν τα δύο σώματα, πρέπει να ισχύει:

$F > 0$ ή $m_2gημθ > m_2\dfrac{k}{m_1+m_2}A$ ή

$kA < (m_1+m_2)gημθ$

$2β: f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, άρα: $f_1 < f_0$

Επειδή $f_2 = \frac{f_1}{2}$, το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται όπως προκύπτει από το διάγραμμα A = f(f).

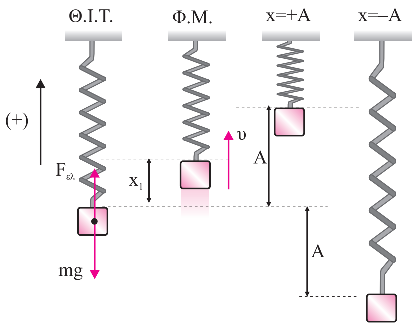
3β: $|F_{ελ}| = k \cdot \frac{3d}{2}$, $|F_{επ}| = k \cdot \frac{d}{2}$

Άρα: $\left|\frac{F_{ελ}}{F_{επ}}\right| = 3$

## Θέμα 3ο

α) $ΣF = -Dx$, $D = k$, $ω = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 rad/s$

Στη Θ.Ι.Τ.: $mg = kx_1$ ή $x_1 = 0,1\ m$




Από ΑΔΕΤ: $\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mυ^2 = \frac{1}{2}kA^2$ ή $A = 0,2m$

β) $\frac{U_{ελ.}}{U_{Ταλ.}} = \frac{\frac{1}{2}k(A-x_1)^2}{\frac{1}{2}kA^2} = \frac{1}{4}$

γ) $E_{μηχ} = K + U + U_{ελ} = U_{ελ} = \frac{1}{2}k(A+x_1)^2 = 4,5J$

$E = \frac{1}{2}kA^2 = 2J$, άρα: $E_{μηχ} \neq E$

δ) Από τη σχέση $A = A_0 e^{-Λt}$ έχουμε:

$0,05 = 0,2e^{-Λt}$ ή $e^{Λt} = 4$ ή

$t = \frac{2\ln 2}{Λ}$ ή $t = π\ s$

## Θέμα 4ο

α) Θ.Ι.Τ.: $ΣF = 0$ ή $F_{ελ_1} = w_1$ ή $kx_1 = m_1 g$

ή $x_1 = \frac{m_1 g}{k} = 0,1m$

$A = d - x_1 = 0,3m$, $φ_0 = \frac{π}{2} rad$,

$ω = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10 rad/s$

$x = 0,3ημ\left(10t + \frac{π}{2}\right)$ SI

β) $\frac{dp}{dt} = ΣF = kx_2$ ή $x_2 = 0,1m$

$|F_{ελ}| = k(x_2 + x_1) = 40N$

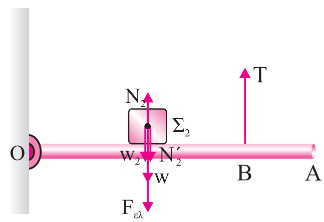
Για το σώμα $Σ_2$: $ΣF = 0$ ή $N_2 = F_{ελ} + w_2$ ή

$N_2 = 80N$

$N_2' = N_2 = 80N$

Για τη ράβδο: $Στ_{(O)} = 0$ ή $T\frac{3\ell}{4} = w\frac{\ell}{2} + N_2'\frac{\ell}{2}$

ή $T = 120N$




γ) Η ταχύτητα του $Σ_1$ μηδενίζεται για πρώτη φορά στη θέση $x = -A$.
Το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά:

$x_3 = A - x_1 = 0,2m$

$F_{ελ}' = kx_3 = 40N$

$N_2'' + F_{ελ}' = w_2$ ή $N_2'' = 0$

Άρα, το σώμα $Σ_2$ χάνει την επαφή του με τη ράβδο.

$Στ_{(B)} = 0$ ή $F_α\frac{3\ell}{4} = w\frac{\ell}{4}$ ή $F_α = \frac{100}{3}N$

δ) $Στ_{(B)} = 0$ ή $F_α'\frac{3\ell}{4} = (w + N_2'')\frac{\ell}{4}$ ή

$N_2'' = 40N$

$N_2'' = w_2 + F_{ελ}''$ ή $F_{ελ}'' = 0$, δηλαδή το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος.

$x_4 = -0,1m$

$$\frac{K}{U} = \frac{E-U}{U} = \frac{E}{U} - 1 = 8$$

## 4ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

### Θέμα 1ο

1β, 2δ, 3γ, 4γ, 5: α-Σ, β-Σ, γ-Λ, δ-Σ, ε-Λ

### Θέμα 2ο

1γ: Για το $Σ_1$: $F_{ελ_1} = F_1$ ή $A_1 = \frac{F}{k}$ και $E_1 = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$

Για το $Σ_2$: $F_{ελ_2} = F_2$ ή $A_2 = \frac{F}{2k}$ και $E_2 = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$

Άρα: $E_1 = E_2$

2β: $A_1 = 0,8A_0$ και $E_1 = \frac{1}{2}DA_1^2 = 0,64E_0$

$$π\% = \frac{E_1 - E_0}{E_0} \cdot 100\% = -36\%$$

3β: $T_1 = T_0$, δηλαδή έχουμε συντονισμό και επομένως έχουμε μέγιστο πλάτος.
Εάν μεταβάλλουμε την περίοδο, άρα και τη συχνότητα, το πλάτος μειώνεται.

### Θέμα 3ο

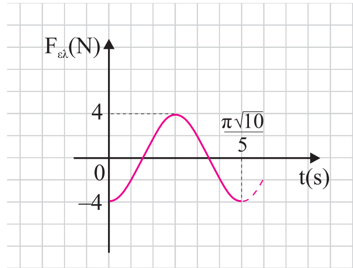
α) $A = d = 0,1m$

Για $t = 0$: $A = Aημφ_0$ ή $φ_0 = \frac{π}{2}rad$

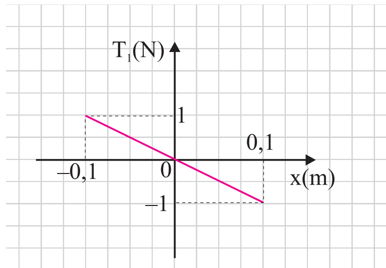
$$ω = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \sqrt{10}rad/s, \quad T = \frac{2π}{ω} = \frac{π\sqrt{10}}{5}s$$

$$x = 0,1ημ\left(\sqrt{10}t + \frac{π}{2}\right) \text{ SI και}$$

$$F_{ελ} = -kx = -4ημ\left(\sqrt{10}t + \frac{π}{2}\right) \text{ SI}$$




β) $T_1 = -D_1x = -m_1ω^2x = -10x$ SI με $-0,1m \le x \le 0,1m$




$T_{1_{max}} = 1N < μ_s m_1 g = 2N$, επομένως το σώμα $Σ_1$ δεν ολισθαίνει ως προς το σώμα $Σ_2$.

γ) Για να μην ολισθαίνει το σώμα $Σ_1$ ως προς το $Σ_2$, πρέπει:

$T_{1_{max}} \le μ_s m_1 g$ ή $D_1A \le μ_s m_1 g$

Το μέγιστο πλάτος $A'$ είναι:

$$A' = \frac{μ_s m_1 g}{m_1 ω^2} = 0,2m$$

δ) Για $t = t_1$: $υ_1 = ωAσυν\left(\frac{2π}{T}t_1 + \frac{π}{2}\right)$

Για $t_2 = t_1 + \frac{T}{2}$:

$$υ_2 = ωAσυν\left[\frac{2π}{T}\left(t_1 + \frac{T}{2}\right) + \frac{π}{2}\right] =$$

$$= ωAσυν\left(\frac{2π}{T}t_1 + π + \frac{π}{2}\right) = -υ_1$$

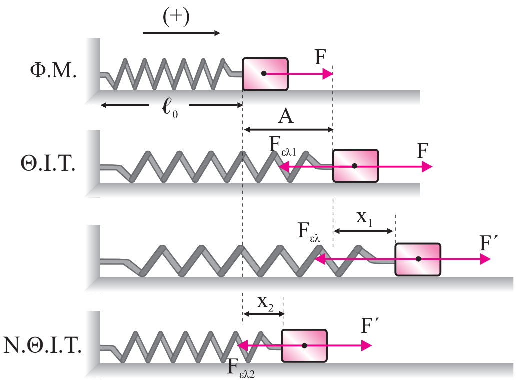
$$W_F = K_{τελ} - K_{αρχ} = \frac{1}{2}m_1υ_2^2 - \frac{1}{2}m_1υ_1^2 = 0$$

**Θέμα 4ο**

α) $\Sigma F = -Dx,\ D = k,\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}02\pi\,s$

β) Στη Θ.Ι.Τ. έχουμε: ΣF = 0

ή $F_{\varepsilon\lambda} = F$ ή $kA = F$ ή $A = 0{,}1m$




γ) Όταν έχει απομάκρυνση $x_1$, από ΑΔΕΤ

ισχύει: $K + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kA^2$ ή $K = 0{,}32J$

Όταν μειώνεται η δύναμη, γίνεται F′ = 6N και αλλάζει η θέση ισορροπίας.

Στη νέα θέση ισορροπίας έχουμε:

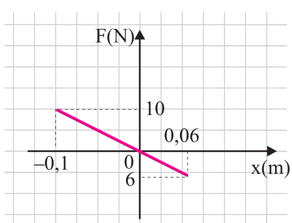
$\Sigma F = 0$ ή $F' = kx_2$ ή $x_2 = 0{,}06m$, επομένως τη στιγμή που μειώνεται η δύναμη, το σώμα απέχει 0,1m από τη νέα θέση ισορροπίας.

Για τη νέα ταλάντωση έχουμε:

$K + \frac{1}{2}k(0{,}1)^2 = \frac{1}{2}k(A')^2$ ή $A' = 0{,}13m$

δ) $W = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = -0{,}32J$

ε) $F_{\varepsilon\pi} = -100x$ με $-0{,}1\ m \le x \le 0{,}06m$




## 5ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ
## ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

**Θέμα 1ο**

1α, 2γ, 3γ, 4α, 5: α-Λ, β-Σ, γ-Σ, δ-Λ, ε-Σ

**Θέμα 2ο**

1α: *Πείραμα 1*

Στη θέση ισορροπίας του συστήματος ισχύει:

$\Sigma\vec{F} = 0$ ή $F_{\varepsilon\lambda} = mg$ ή $k\Delta\ell_0 = mg$ ή

$\Delta\ell_0 = \frac{mg}{k}$

Επειδή το σώμα αφήνεται από τη θέση φυσικού μήκους, αυτή η θέση είναι η ακραία θέση της ταλάντωσης. Επομένως: $A_1 = \Delta\ell_0$ (1)

*Πείραμα 2*

Η αρχική θέση ισορροπίας στη νέα ταλάντωση είναι η ακραία θέση επειδή ισχύει υ = 0.

Η νέα θέση ισορροπίας είναι η θέση του φυσικού μήκους:

$\Sigma\vec{F} = 0$ ή $\vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{F} + \vec{w} = 0$ ή $F_{\varepsilon\lambda} + F - w = 0$

ή $F_{\varepsilon\lambda} = w - F$ ή $F_{\varepsilon\lambda} = 0$

Επομένως: $A_2 = \Delta\ell_0$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$A_1 = A_2$

2α: $E_2 = \frac{1}{2}D\left(\frac{A_1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}E_1,\ |\Delta E| = \frac{15}{16}E_1$

3γ: Βλέπε από τη θεωρία τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με την επιτάχυνση.

$\left(\alpha = \pm\omega\sqrt{\upsilon_{max}^2 - \upsilon^2}\right)$

**Θέμα 3ο**

α) Από την αρχή διατήρησης της ορμής στη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου:

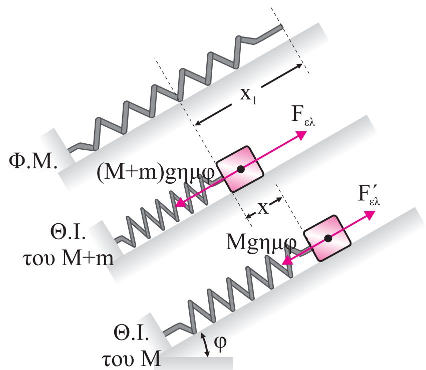
$0 = m\upsilon_0\sigma\upsilon\nu 60^\circ - M|\upsilon_\pi|$ ή $|\upsilon_\pi| = 1m/s$

β) $\vec{p}_x = \vec{p}\,'_x$, άρα έχουμε μεταβολή της ορμής μόνο στον άξονα y′y.

$|\Delta p| = p_y = m\upsilon_0\eta\mu 60^\circ = 40\sqrt{3}kg\cdot m/s$

γ) $E = K_\beta + K_\pi = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_\pi^2 = 1.620J$

δ) Στη Θ.Ι. του (M+m): $(M+m)g\eta\mu\varphi = kx_1$ ή $x_1 = 0{,}21\text{m}$




Στη Θ.Ι. του M:

$Mg\eta\mu\varphi = k(x_1 - x)$ ή $x = 0{,}01\text{m}$

Από ΑΔΕΤ:

$K + U = E$ ή $\frac{1}{2}Mu_\pi^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$ ή

$A \simeq 0{,}2\text{m}$

**Θέμα 4ο**

α$_1$) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10\text{rad/s}$ ή $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{5}\text{s}$,

$A_0 = d = 0{,}2\text{m}$

Για $t = 0$: $A_0 = A\eta\mu\varphi_0$ ή $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\text{rad}$

$x = 0{,}2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI

Για $t = \frac{7\pi}{30}\text{s}$: $x = 0{,}2\eta\mu\left(2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = 0{,}1\text{m}$

$\frac{7\pi}{30}\text{s} = T + \frac{T}{6}$, επομένως:

$s = 4A_0 + 0{,}1 = 0{,}9\text{m}$

α$_2$) $u = 2\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI

Για $t_1 = \frac{\pi}{60}\text{s}$: $u_1 = -1\text{m/s}$ και για

$t_2 = \frac{7\pi}{60}\text{s}$: $u_2 = 1\text{m/s}$

$W = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = 0$

α$_3$) $\frac{|\alpha|}{u^2} = \frac{\omega^2 x}{\omega^2\left(A_0^2 - x^2\right)} = 10\sqrt{3}\text{m}^{-1}$, άρα:

$x = 10\sqrt{3}\left(A_0^2 - x^2\right)$ ή

$10\sqrt{3}x^2 + x - 0{,}4\sqrt{3} = 0$ ή

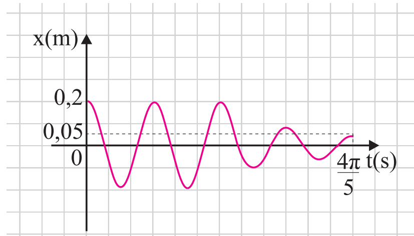
$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{20\sqrt{3}}\text{m}$ και δεκτή η τιμή:

$x = 0{,}1\sqrt{3}\text{m}$

$F_{\varepsilon\lambda} = kx = 10\sqrt{3}\text{N}$

Β. $A = A_0 e^{-\Lambda(t-2T)}$

Για $t = t_3$: $A' = A_0 e^{-\Lambda(t_3 - 2T)}$ ή $\Lambda = \frac{5\ell n2}{\pi}\text{s}^{-1}$




Γ. Από ΘΜΚΕ:

$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{F_{\varepsilon\lambda}} + W_T$ ή $0 = \frac{1}{2}kd^2 - Ts$ ή

$\mu mgs = \frac{1}{2}kd^2$ ή $\mu = 0{,}1$

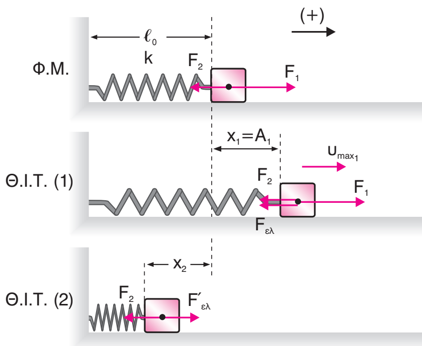
## 6ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

**Θέμα 1ο**

1γ, 2γ, 3α, 4α, 5: α-Σ, β-Σ, γ-Λ, δ-Λ, ε-Λ

**Θέμα 2ο**

1)



A) $\alpha_1$: Για $t < t_1$ έχουμε:

Θ.Ι.Τ. (1): $\Sigma F = 0$ ή $F_1 = F_2 + F_{ελ}$ ή

$F_2 = kx_1$ ή $x_1 = A_1 = \frac{F_2}{k}$

Για $t > t_1$ έχουμε:

Θ.Ι.Τ. (2): $\Sigma F = 0$ ή $F_2 = F'_{ελ}$ ή

$F_2 = kx_2$ ή $x_2 = \frac{F_2}{k} = A_1$

Εφαρμόζοντας ΑΔΕΤ για τη δεύτερη ταλάντωση όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της πρώτης ταλάντωσης με ταχύτητα $υ_{max_1} = ωA_1$, έχουμε:

$K + U = E_2$ ή

$\frac{1}{2}mυ^2_{max_1} + \frac{1}{2}k(x_1 + x_2)^2 = \frac{1}{2}kA_2^2$ ή

$\frac{1}{2}kA_1^2 + \frac{1}{2}k4A_1^2 = \frac{1}{2}kA_2^2$ ή $5A_1^2 = A_2^2$ ή

$\frac{A_2}{A_1} = \sqrt{5}$

B) $\beta_3$: $T_1 = T_2 = T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Το σώμα βρίσκεται για πρώτη φορά στη Θ.Ι.Τ. (1) τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{T_1}{4} = \frac{T}{4}$.

Το χρονικό διάστημα ώστε το σώμα από τη Θ.Ι.Τ. (1) να βρεθεί στη θέση (1) όπου σταματά στιγμιαία για πρώτη φορά είναι $\Delta t_1$. Το χρονικό διάστημα ώστε το σώμα από τη θέση (1) να φτάσει για πρώτη φορά στη Θ.Ι.Τ. (2) είναι $\Delta t_2 = \frac{T_2}{4} = \frac{T}{4}$.

Επομένως:

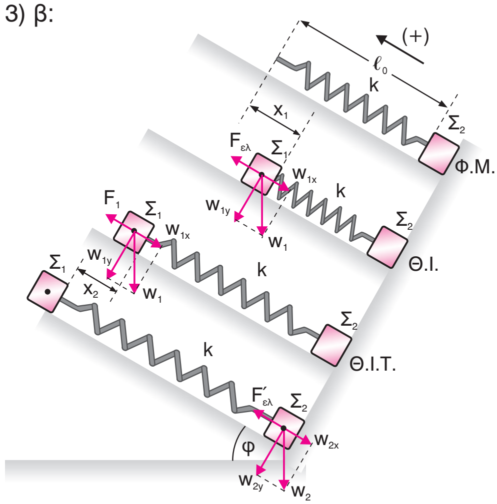
$t_2 = t_1 + \Delta t_1 + \Delta t_2$ ή $t_2 = \frac{T}{4} + \Delta t_1 + \frac{T}{4}$ ή

$t_2 > \frac{T}{2}$

2) α: Για $t = 2T$ έχουμε: $A_1 = A_2 = de^{-2\Lambda T}$

$d' = 2d - (A_1 + A_2) = 2d(1 - e^{-2\Lambda T})$

3) β:




Στη Θ.Ι. ισχύει:

$\Sigma F_x = 0$ ή $F_{ελ} = w_{1x}$ ή $kx_1 = m_1 gημφ$ ή

$x_1 = \frac{m_1 gημφ}{k}$

Στη Θ.Ι.Τ. ισχύει:

$\Sigma F_x = 0$ ή $F_1 + F_{ελ} - w_{1x} = 0$ ή

$F_{ελ} = m_1 gημφ - F_1$ ή $F_{ελ} = 0$

Επομένως η Θ.Ι.Τ. είναι στο φυσικό μήκος του ελατηρίου.

Επειδή το $Σ_1$ αρχίζει να ταλαντώνεται χωρίς αρχική ταχύτητα, ξεκινά από τη θέση $x = -A$, άρα $x_1 = A$.

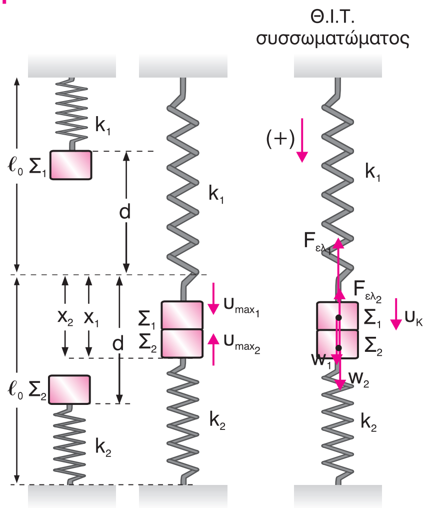
Το σώμα $Σ_1$ σταματά για πρώτη φορά στη θέση $x_2 = +A$, οπότε το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $x_2 = \frac{m_1 gημφ}{k}$.

Για το σώμα $Σ_2$ ισχύει:

$\Sigma F = 0$ ή $F'_{ελ} = w_{2x}$ ή $kx_2 = m_2 gημφ$ ή

$m_1 gημφ = m_2 gημφ$ ή $m_1 = m_2$

## Θέμα 3ο




α) Για το σώμα $\Sigma_1$:

Θ.Ι.Τ.: $\Sigma F = 0$ ή $w_1 = F_{\varepsilon\lambda_1}$ ή $m_1 g = k_1 x_1$ ή

$x_1 = 0{,}1\text{m}$

Ομοίως για το σώμα $\Sigma_2$:

$m_2 g = k_2 x_2$ ή $x_2 = 0{,}1\text{m}$

Άρα, οι θέσεις ισορροπίας ταλάντωσης για τα δύο σώματα ταυτίζονται.

Το χρονικό διάστημα που απαιτείται ώστε κάθε σώμα να φτάσει για πρώτη φορά στη θέση ισορροπίας είναι $\Delta t = \frac{T}{4}$.

$$\Delta t_1 = \frac{T_1}{4} = \frac{1}{4} 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = \frac{\pi}{20}\text{s}$$ και ομοίως

$$\Delta t_2 = \frac{\pi}{20}\text{s}.$$

Επομένως τα δύο σώματα συγκρούονται στην κοινή θέση ισορροπίας ταλάντωσης.

β) Για την ταλάντωση του $\Sigma_1$ ισχύει:

$A_1 = d + x_1 = 0{,}3\text{m}$

$$\upsilon_{max_1} = \omega_1 A_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} A_1 = 3\text{m/s}$$

Ομοίως για το σώμα $\Sigma_2$:

$A_2 = d - x_2 = 0{,}1\text{m}$

$$\upsilon_{max} = \omega_2 A_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} A_2 = 1\text{m/s}$$

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής για την πλαστική κρούση, έχουμε:

$m_1 \upsilon_{max_1} - m_2 \upsilon_{max_2} = (m_1 + m_2)\upsilon_K$ ή

$\upsilon_K = 1\text{m/s}$

γ) $$\pi\% = \frac{\left|\frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon_K^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_{max_1}^2 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_{max_2}^2\right|}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_{max_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_{max_2}^2} \cdot 100\%$$

ή $\pi\% = 80\%$

δ) Θ.Ι.Τ. συσσωματώματος:

$\Sigma F = 0$ ή $w_1 + w_2 = F_{\varepsilon\lambda_1} + F_{\varepsilon\lambda_2}$ ή

$m_1 g + m_2 g = k_1 x' + k_2 x'$ ή

$$x' = \frac{m_1 g + m_2 g}{k_1 + k_2}$$ ή $x' = 0{,}1\text{m}$

Δηλαδή, η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος ταυτίζονται με τις θέσεις ισορροπίας της ταλάντωσης των δύο σωμάτων.

Επομένως: $\upsilon_K = \upsilon_{max} = \omega A$ ή $A = \frac{\upsilon_K}{\omega}$ ή

$$A = \frac{\upsilon_K}{\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1 + m_2}}}$$ ή $A = 0{,}1\text{m}$

Το συσσωμάτωμα ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα, άρα $\varphi_0 = 0$.

$x = 0{,}1\eta\mu 10t$ (SI)

ε) $\Sigma F = -Dx$ ή $w_1 + w_2 + F_{ελ} = -(k_1 + k_2)\frac{A}{2}$

ή $F_{ελ} = -30N$

**Θέμα 4ο**

α$_1$) Στη Θ.Ι.:

$kx_1 = mg\eta\mu\varphi$ (1) ή $x_1 = 0{,}05m$

Στη θέση Θ.Ι.Τ.:

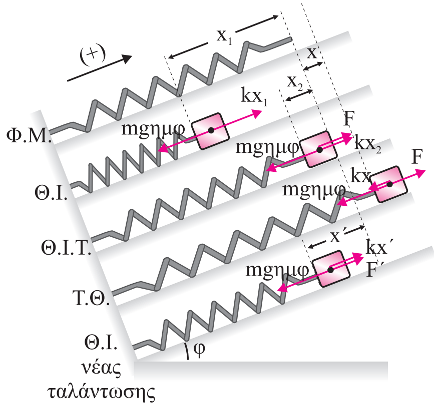
$F + kx_2 = mg\eta\mu\varphi$ (2) ή $x_2 = 0$ (φυσικό μήκος ελατηρίου)

Στην τυχαία θέση:

$\Sigma F = -mg\eta\mu\varphi - kx + F$ και λόγω της (2):

$\Sigma F = -kx$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{5}s$ και $\omega = \frac{2\pi}{T} = 10rad/s$




α$_2$) Επειδή $x_2 = 0$, η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του σώματος είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Το σώμα ξεκινά την ταλάντωση από τη θέση $x = -A$, άρα: $A = x_1 = 0{,}05m$

Μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1$:

$W_F = F \cdot 2A - F \cdot 2A + FA = 0{,}5J$

β$_1$) $u_{max} = \omega A = 0{,}5m/s$

Άρα, τη χρονική στιγμή $t_1$:

$p_1 = m|u_1| = mu_{max} = 1kg \cdot m/s$

β$_2$) Στη Θ.Ι. της νέας ταλάντωσης:

$F' + kx' = mg\eta\mu\varphi$ ή $x' = 0{,}025m$

Από ΑΔΕΤ:

$\frac{1}{2}kx'^2 + \frac{1}{2}mu_1^2 = \frac{1}{2}kA'^2$ ή $A' \simeq 0{,}056m$

β$_3$) $U_{ελ} = \frac{1}{2}k(A' - x')^2 = 0{,}0961J$

$|F_{ελ}| = k(A' - x') = 6{,}2N$

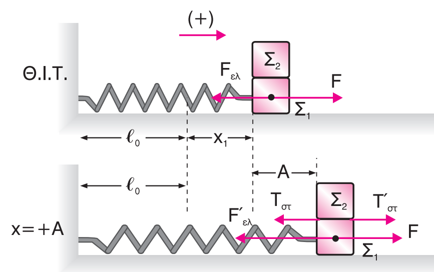
## 7ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

**Θέμα 1ο**

1δ, 2β, 3δ, 4α, 5: α-Λ, β-Σ, γ-Λ, δ-Σ, ε-Λ

**Θέμα 2ο**

1α:




Για τη Θ.Ι.Τ.:

Για το σύστημα των δύο σωμάτων ισχύει:

$\Sigma F = 0$ ή $F_{ελ} = F$ ή $kx_1 = F$

Επειδή το σώμα ξεκινά την ταλάντωσή του από την ακραία αρνητική θέση, για το μέτρο της απομάκρυνσης $x_1$ ισχύει $x_1 = A$. Επομένως: $F = kA$ (1)

Για τη θέση $x = +A$:

Για το σώμα Σ$_2$: $\Sigma F_2 = -D_2 x$ ή

$-T_{στ} = -m_2\omega^2 A$ ή $T_{στ} = m_2\omega^2 A$ (2)

Για το σύστημα των δύο σωμάτων:

$\Sigma F = -Dx$ ή $F - F'_{ελ} = -(m_1 + m_2)\omega^2 A$ ή

$F - k \cdot 2A = -4m_2\omega^2 A$ ή

$F - 2F = -4m_2\omega^2 A$ ή

$F = 4m_2\omega^2 A$ (3)

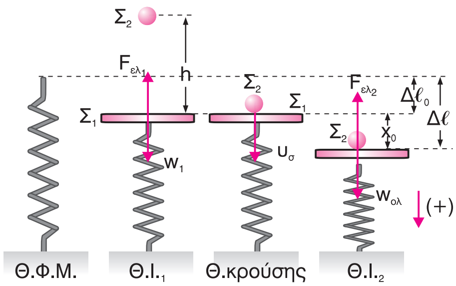
Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει:

$T = \frac{F}{4}$

2α: ΘΜΚΕ για το $\Sigma_2$:

$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{w_2}$ ή $\frac{1}{2}m_2 \upsilon^2 - 0 = m_2 g h$ ή

$\upsilon = \sqrt{2gh}$ με θετική φορά προς τα κάτω




$\Theta I_1$: $\Sigma F_1 = 0$ ή $w_1 = F_{\varepsilon\lambda_1}$ ή

$m_1 g = k\Delta\ell_0$ ή $\Delta\ell_0 = \frac{m_1 g}{k}$

$\Theta I_2$: $\Sigma F_2 = 0$ ή $w_{o\lambda} = F_{\varepsilon\lambda_2}$ ή

$m_1 g + m_2 g = k\Delta\ell$ ή $\Delta\ell = \frac{2m_1 g}{k}$

$x_0 = \Delta\ell - \Delta\ell_0$ ή $x = \frac{m_1 g}{k} = \Delta\ell_0$

Από αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή $m_2 \upsilon = (m_1 + m_2)\upsilon_\sigma$ ή

$\upsilon_\sigma = \frac{\upsilon}{2} = \frac{\sqrt{2gh}}{2}$

Από αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης έχουμε:

$E = K + U$ ή $\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}2m\upsilon_\sigma^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$ ή

$A^2 = \frac{2m}{k}\frac{2gh}{4} + \Delta\ell_0^2$ ή

$A^2 = \frac{mg}{k} \cdot 3\Delta\ell_0 + \Delta\ell_0^2$ ή

$A_0^2 = \frac{4m^2g^2}{k^2}$ ή $A = \frac{2mg}{k}$

3β: Μέγιστη μεταβολή του μέτρου της επιτάχυνσης έχουμε όταν το σώμα μεταβαίνει από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης στην ακραία θέση.

Επομένως: $t_1 = \frac{T_1}{4}$ ή $T_1 = \frac{\pi}{2}$s και

$f_1 = \frac{2}{\pi}$Hz

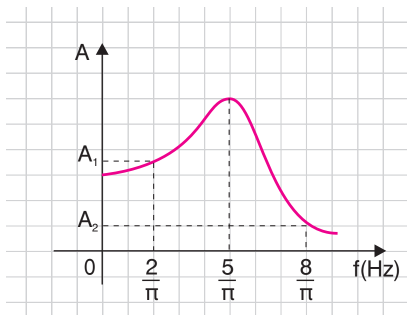
Η ταχύτητα μηδενίζεται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης.

Επομένως: $t_2 = \frac{T_2}{2}$ ή $T_2 = \frac{\pi}{8}$s και

$f_2 = \frac{8}{\pi}$Hz

Η συχνότητα συντονισμού είναι:

$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ ή $f_0 = \frac{5}{\pi}$Hz




Από τη γραφική παράσταση A = f(f) προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης αρχικά αυξήθηκε και στη συνέχεια μειώθηκε.

### Θέμα 3ο

α) $W_F = E$ ή $Fs = \frac{1}{2}kA^2$ ή

$A = \sqrt{\frac{2Fs}{k}}$ ή $A = 0{,}2m$

β) Για το σώμα $Σ_1$: $ΣF_y = 0$ ή $N = m_1 g = 10N$ και $N' = N$

Για τη ράβδο: $ΣF = 0$ ή $F_A + F_σ = w + N'$ ή

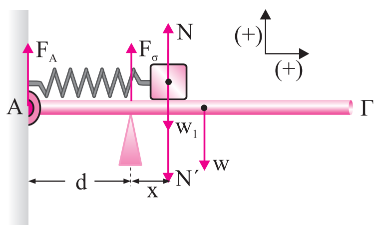
$F_A + F_σ = Mg + m_1 g$ (1)

$Στ_{(A)} = 0$ ή $F_σ d = N'(d + x) + w\frac{L}{2}$ ή

$F_σ = 16 + 10x$ SI (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

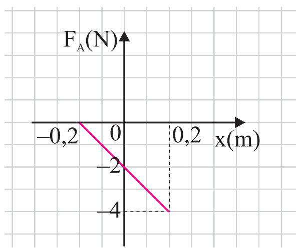
$F_A = -2 - 10x$ SI




Άρα: Για $x = -0{,}2m$, $F_A = 0N$

Για $x = +0{,}2m$, $F_A = -4N$

Η δύναμη $F_A$ έχει φορά προς τα κάτω.




γ) Σε οποιαδήποτε θέση κι αν γίνει η σύγκρουση, τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες $(|υ'_1| = |υ_2|)$. Μετά την κρούση ισχύει:

$K + U = E$ ή $\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mυ_1'^2 = \frac{1}{2}kA'^2$ ή

$A' = \sqrt{\frac{kx_1^2 + mυ_1'^2}{k}}$

Επειδή $A' = A'_{max}$, προκύπτει: $x_1 = A = 0{,}2m$ και $A' = 0{,}4m$.

### Θέμα 4ο

α) Όταν το σώμα $Σ_1$ κάνει οριακά ανακύκλωση, στο ανώτερο σημείο B του οδηγού η δύναμη επαφής N μηδενίζεται και το βάρος παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Στο σημείο B:

$ΣF = F_κ$ ή $mg = \frac{m_1 υ_B^2}{R}$ ή $υ_B = \sqrt{gR}$ ή

$υ_B = \sqrt{5}\, m/s$

Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ μεταξύ των σημείων A και B:

$K_B - K_A = W_w$ ή

$\frac{1}{2}m_1υ_B^2 - \frac{1}{2}m_1υ_1^2 = -m_1 g \cdot 2R$ ή

$υ_1 = \sqrt{υ_B^2 + 4gR}$ ή $υ_1 = 5\,m/s$

β) Έστω $υ'_1$ και $υ'_2$ οι ταχύτητες των σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$ αμέσως μετά την κρούση.

$υ'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1$ ή $υ'_1 = -1\,m/s$

$υ'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}υ_1$ ή $υ'_2 = 4\,m/s$

$π_K\% = \frac{K'_2}{K_1}100\% = \frac{\frac{1}{2}m_2υ_2'^2}{\frac{1}{2}m_1υ_1^2}100\%$ ή

$π_K\% = 96\%$

$W_{F_1} = K'_1 - K_1 = \frac{1}{2}m_1υ_1'^2 - \frac{1}{2}m_1υ_1^2$ ή

$W_{F_1} = -16J$

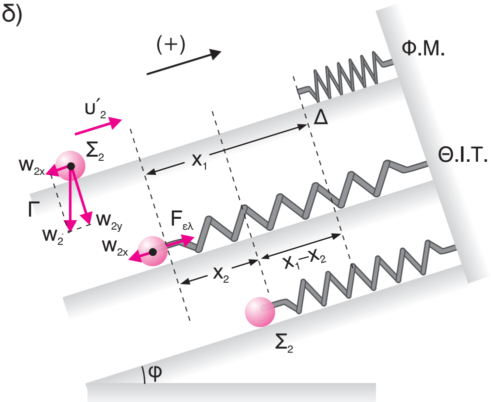
γ) Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ μεταξύ των σημείων Γ και Δ:

$K_Δ - K_Γ = W_{w_{2x}}$ ή

$$\frac{1}{2}m_2 υ_Δ^2 - \frac{1}{2}m_2 υ_2'^2 = -m_2 g ημφ s$$

$$υ_Δ = \sqrt{υ_2'^2 - 2gημφs} \quad ή \quad υ_Δ = \sqrt{1{,}5}\,m/s$$

δ)




Θ.Ι.Τ.: $ΣF_x = 0$ ή $w_{2x} = F_{ελ}$ ή

$m_2 gημφ = kx_1$ ή $x_1 = 0{,}1m$

Εφαρμόζουμε ΑΔΕΤ:

$$K + U = E \quad ή \quad \frac{1}{2}m_2 υ_Δ^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad ή$$

$A = 0{,}2m$

$$ω = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad ή \quad ω = 5\sqrt{2}\,rad/s$$

ε) $|F_{ελ}| = |F_{επ}|$ ή $k(x_1 - x_2) = kx_2$ ή

$$x_2 = \frac{x_1}{2} = 0{,}05m = \frac{A}{4}$$

$$\frac{K_2}{U} = \frac{E-U}{U} = \frac{E}{U} - 1 = \frac{\frac{1}{2}kA^2}{\frac{1}{2}k\left(\frac{A}{4}\right)^2} - 1 = 15$$