ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α.

Α1. Θεωρία σελ. 73.
Α2. Λ, Σ, Σ, Λ, Σ, Λ, Σ, Λ, Λ, Σ.

ΘΕΜΑ Β.

Β1. Θέτουμε $\eta\mu x = \alpha > 0$ (αφού $0 < x < \frac{\pi}{2}$) οπότε η

$5\eta\mu^2 x + \eta\mu x - 4 = 0$ γράφεται $5\alpha^2 + \alpha - 4 = 0$ που έχει λύσεις $\alpha = -1$ που απορρίπτεται και δεκτή $\alpha = \frac{4}{5}$ δηλ. $\eta\mu x = \frac{4}{5}$.

Είναι $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{9}{25}$, άρα $\sigma\upsilon\nu x = \frac{3}{5}$ αφού $\sigma\upsilon\nu x > 0$ όταν $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Β2. $\sigma\upsilon\nu 2x = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25}$.

Έχουμε $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{4}{3}$ και $\varepsilon\varphi 2x = \frac{2\varepsilon\varphi x}{1 - \varepsilon\varphi^2 x} = \frac{2\frac{4}{3}}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = -\frac{24}{7}$

Β3. Έχουμε $0 < \frac{3x}{2} < \frac{3\pi}{4}$ άρα $\eta\mu \frac{3x}{2} > 0$. Επίσης $\sigma\upsilon\nu \frac{x}{3} - 1 < 0$ αφού $0 < \frac{x}{3} < \frac{\pi}{6}$ επομένως $\eta\mu \frac{3x}{2} > \sigma\upsilon\nu \frac{x}{3} - 1$.

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. Πρέπει να ισχύουν $x \neq \kappa\pi$, $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$,με $\kappa \in \mathbb{Z}$. Είναι

$$f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}} + \frac{\eta\mu x}{1 - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} + \frac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x.$$

Γ2. Έχουμε $\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x$ αν $\sigma\upsilon\nu x = 0$ τότε $\eta\mu x = 0$ άτοπο άρα $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ οπότε $\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -1$ με $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ άρα $x = \frac{3\pi}{4}$.

Γ3. Είναι $f(-x) = \sigma\upsilon\nu(-x) + \eta\mu(-x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x < 0$ διότι $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ άρα

$\sigma\upsilon\nu x < 0$ και $\eta\mu x > 0$. Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = \kappa < 0$ άρα

$(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)^2 = \kappa^2 \Leftrightarrow 1 - 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = \kappa^2 \Leftrightarrow 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = 1 - \kappa^2$ (1).

Όμως, $\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)^2 = \dfrac{2}{9} \Leftrightarrow 1 + 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = \dfrac{2}{9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = -\dfrac{7}{9}$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι $1 - \kappa^2 = -\dfrac{7}{9} \Leftrightarrow \kappa^2 = \dfrac{16}{9} \Leftrightarrow \kappa = -\dfrac{4}{3}$ αφού $\kappa < 0$.

Γ4. Έχουμε $f(x) > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x > -\eta\mu x \Leftrightarrow \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} > -1$ αφού

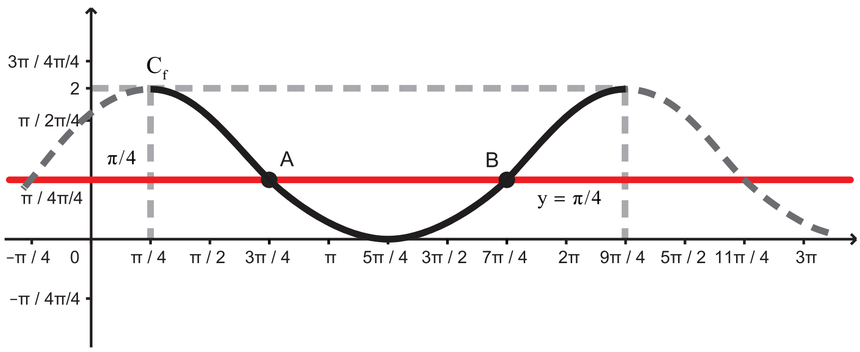
$\eta\mu x > 0$ με $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, έχουμε ότι $\sigma\varphi x > -1 \Leftrightarrow \sigma\varphi x > \sigma\varphi\dfrac{3\pi}{4}$ άρα $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{4}$,

αφού η συνάρτηση $y = \sigma\varphi x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Είναι $T = 2\pi$, $f_{max} = 2$ και $f_{min} = 0$

Δ2.



Από τη γραφική παράσταση της C_f παρατηρούμε ότι η ευθεία $y = \dfrac{\pi}{4}$ τέμνει την καμπύλη σε δύο σημεία, άρα η εξίσωση $f(x) = \dfrac{\pi}{4}$ έχει δύο λύσεις στο $[0, 2\pi]$.

Δ3. Έχουμε $f(-x) - 1 = \sigma\upsilon\nu\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ και $f(x) - 1 = \sigma\upsilon\nu\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$.

Αρκεί $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)\sigma\upsilon\nu\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leq \dfrac{1}{2}$ όμως $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$,

επειδή $\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + \left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = \dfrac{\pi}{2}$, επομένως αρκεί $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)\eta\mu\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leq \dfrac{1}{2}$, που ισχύει

αφού $\sigma\upsilon\nu^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$.

Δ4. Είναι $f_{\min}=0$ για $x=\frac{5\pi}{4}$ άρα $f(x)\geq f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ ενώ $h(x)\leq 0=h\left(\frac{5\pi}{4}\right)=h_{\max}$

Για κάθε $x\neq\frac{5\pi}{4}$ είναι $h(x)\leq 0<f(x)$ στο $[0,2\pi]$. Άρα το μοναδικό κοινό σημείο των C_f, C_h είναι το $A\left(\frac{5\pi}{4},0\right)$

Θανάσης Τσιούμας

Μαθηματικός