

β) Να υπολογίσετε την παράσταση $\frac{673^3 - 209^3}{673^2 - 209^2} - \frac{209^2}{673 + 209}$.

ΛΥΣΗ

α) Για $x \neq \pm y$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} - x &= \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{(x+y)(x-y)} - x = \frac{x^2 + xy + y^2}{x+y} - \frac{x(x+y)}{x+y} = \\ &= \frac{x^2 + xy + y^2}{x+y} - \frac{x^2 + xy}{x+y} = \frac{x^2 + xy + y^2 - x^2 - xy}{x+y} = \frac{y^2}{x+y}. \end{aligned}$$

β) Από το (α) ερώτημα για $x = 673$ και $y = 209$ έχουμε ότι:

$$\frac{673^3 - 209^3}{673^2 - 209^2} - 673 = \frac{209^2}{673 + 209}, \text{ άρα } \frac{673^3 - 209^3}{673^2 - 209^2} - \frac{209^2}{673 + 209} = 673.$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΝΕΟΥ ΤΥΠΟΥ

Να αντιστοιχίσετε τα δεδομένα της 1ης στήλης με τα δεδομένα της 2ης στήλης.

	Στήλη 1η	Στήλη 2η	
		$\frac{x^5 + x^4}{x^6}$	A
1	$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$	$\frac{x^3 + x^2}{x^6}$	B
2	$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}$	$\frac{x^4 + x^2}{x^6}$	Γ
3	$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$	$\frac{x^5 + x^2}{x^6}$	Δ
4	$\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2}$	$\frac{x^4 + x}{x^6}$	E
5	$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}$	$\frac{x^3 + x^5}{x^6}$	ΣΤ
		$\frac{x^4 + x^3}{x^6}$	Z

ΑΛΥΤΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Μελέτησε επαρκώς τις λυμένες;



A' Ομάδα

1. Να γίνουν οι ακόλουθες πράξεις: α) $\frac{x-1}{x} + \frac{2x+5}{x}$, β) $\frac{3}{x} + 4$,

γ) $\frac{ax}{2y} - \frac{2a}{3y^2}$, δ) $\frac{3x}{ay} - \frac{2}{9y}$, ε) $\frac{x-3}{a^2y} - \frac{2}{3y^3}$.

- 2.** Να γίνουν οι ακόλουθες πράξεις: **α)** $\frac{x-3}{x-1} + \frac{2}{x-1}$, **β)** $\frac{2x-3}{x+1} - \frac{2-x}{x-1}$,
γ) $\frac{x+5}{x^2+2x} - \frac{2+x}{x}$, **δ)** $\frac{5x+1}{x^2-9} + \frac{x}{(x-3)^2}$, **ε)** $\frac{a-3}{a+4} - \frac{a-4}{a+3}$.
- 3.** Να γίνουν οι ακόλουθες πράξεις: **α)** $\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^3}$, **β)** $\frac{x}{x-2} - \frac{x-1}{x-3} - \frac{x+1}{x-1}$,
γ) $\frac{3}{x^2-5x+6} + \frac{x-2}{x-3} - \frac{x-3}{x-2}$, **δ)** $\frac{3x-1}{x^2-16} + \frac{5}{4x+16} - \frac{3}{2x-8}$,
ε) $\frac{1}{x^2-16} + \frac{5}{x^2-4}$.
- 4.** Να γίνουν οι ακόλουθες πράξεις:
α) $\frac{2a+3}{2a-2} - \frac{3a-2}{3a+3} - \frac{5}{6a^2-6}$, **β)** $\frac{a^3}{a-1} - \frac{a^2}{a+1} - \frac{a^2+1}{a-1} + \frac{1}{a+1}$,
γ) $\frac{3a}{a^2-a} + \frac{2a}{a^2+a} - \frac{3a-5}{a^2-1}$, **δ)** $\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} - \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$,
ε) $\frac{2x+1}{x^2-4} + \frac{x^2+3}{2-x} - \frac{4x+1}{x+2}$, **στ)** $\frac{1}{a^2-x^2} + \frac{1}{a^2+ax} - \frac{1}{2a^2-2ax}$.
- 5.** Να γίνουν οι ακόλουθες πράξεις:
α) $\frac{4}{x^2-3x+2} + \frac{3}{x^2+x-2} + \frac{10}{x^2-4}$, **β)** $\frac{x+y}{x^2+y^2} + \frac{2xy}{x^4-y^4} - \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}$,
γ) $\frac{2y+1}{y^2-y-2} - \frac{2y-1}{y^2-5y-6} + \frac{2y+4}{y^2-8y+12}$.
- 6.** Να γίνουν οι ακόλουθες πράξεις:
α) $\left(\frac{1}{ax} - \frac{2}{a}\right) \cdot a^2x$, **β)** $(2x^2y + 3x) \cdot \frac{1}{y}$, **γ)** $\left(2 - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^4}\right) \cdot x^3$, **δ)** $\left(5 + \frac{x}{y} + \frac{y^2}{x^2}\right) \cdot x^2y^2$.
- 7.** Να γίνουν οι ακόλουθες πράξεις:
α) $\left(1 - \frac{x}{y}\right)(y^2 - xy)$, **β)** $\left(2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)(x^2 - 1)$,
γ) $\left(9 + \frac{3}{2x^2+2x+2} - \frac{4}{x-1}\right)(2x^3 - 2)$.
- 8.** Να γίνουν οι ακόλουθες πράξεις: **α)** $\left(1 + \frac{1}{x}\right) : x$, **β)** $\left(\frac{y}{x^2} - x\right) : xy$.
- 9.** Να γίνουν οι ακόλουθες πράξεις:
α) $\frac{x^2-y^2}{5} : \frac{2x+2y}{15}$, **β)** $\frac{x^4+xy^3}{y} : \frac{x^2-xy+y^2}{xy^2}$, **γ)** $\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{y}\right) : \left(\frac{2x}{x} - \frac{3y}{x}\right)$,
δ) $\left(\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y} - \frac{4y^2}{y^2-x^2}\right) : \frac{x^2-2xy+y^2}{4xy}$, **ε)** $\frac{x^2+x-12}{x^2-2x-3} : \frac{x^2+4x}{x^2-1}$.

Β' Ομάδα

10. Να γίνουν οι πράξεις:

$$(x^3 + y^3) : \left(y - \frac{x}{1 + \frac{x}{y-x}} \right) - (x^3 - y^3) : \left(y + \frac{x}{1 - \frac{x}{y+x}} \right).$$

11. α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{(a-1)(a+1)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} \right)$ ($a \neq \pm 1$).

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{49 \cdot 51}$.

12. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $x, y, z \neq 0$ ισχύει

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z}, \quad x \neq -y, \quad y \neq -z, \quad \text{να αποδείξετε ότι: } x = z \text{ ή } x + y + z = 0.$$

13. Αν $x + y = 1$, να αποδείξετε ότι: $\frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} = \frac{2(y-x)}{x^2y^2+3}$.

14. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} + 2}{1 + \frac{x+y}{x-y}} = \frac{2x}{x+y}$ ($x \neq \pm y, x \neq 0$).



ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Απαντήσεις αντιστοίχησης: 1. Α, 2. Ζ, 3. ΣΤ, 4. Γ, 5. Δ.

1. α) $\frac{3x+4}{x}$, β) $\frac{4x+3}{x}$, γ) $\frac{(3xy-4)a}{6y^2}$, δ) $\frac{27x-2a}{9ay}$, ε) $\frac{3y^2(x-3)-2a^2}{3a^2y^3}$.
2. α) 1, β) $\frac{3x^2-6x+1}{(x+1)(x-1)}$, γ) $\frac{-x^2-3x+1}{x(x+2)}$, δ) $\frac{6x^2-11x-3}{(x+3)(x-3)^2}$, ε) $\frac{7}{(a+4)(a+3)}$.
3. α) $\frac{y^2-y-1}{y^3}$, β) $\frac{-x^3+4x^2-3x-4}{(x-1)(x-2)(x-3)}$, γ) $\frac{2(x-1)}{(x-2)(x-3)}$, δ) $\frac{11x-48}{4(x-4)(x+4)}$, ε) $\frac{6x^2-84}{(x-4)(x+4)(x+2)(x-2)}$.
4. α) $\frac{25a}{6(a-1)(a+1)}$, β) $\frac{a^3-2a^2+2a-2}{a-1}$, γ) $\frac{2(a+3)}{(a-1)(a+1)}$, δ) $\frac{4xy-x^2-y^2}{(x-y)(x+y)}$, ε) $\frac{-x^3-6x^2+6x-3}{(x-2)(x+2)}$,
στ) $\frac{3}{2a(a+x)}$.
5. α) $\frac{17x-8}{(x-1)(x-2)(x+2)}$, β) $\frac{-x^3-3xy^2+yx^2-y^3+2xy}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}$, γ) $\frac{2y^2-4}{(y-2)(y+1)(y-6)}$.
6. α) $a-2ax$, β) $2x^2 + \frac{3x}{y}$, γ) $2x^3-3x + \frac{4}{x}$, δ) $5x^2y^2 + x^3y + y^4$.
7. α) $(y-x)^2$, β) $2x^2$, γ) $18x^3-8x^2-5x-29$. 8. α) $\frac{x+1}{x^2}$, β) $\frac{y-x^3}{x^3y}$.
9. α) $\frac{3(x-y)}{2}$, β) $x^2y(x+y)$, γ) $\frac{2y+3x}{y(2x-3y)}$, δ) $\frac{-16xy^2}{(x-y)^2(x+y)}$, ε) $\frac{x-1}{x}$. 10. $2y^2$.
11. β) Από το (α) ερώτημα: $S = \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{50} - \frac{1}{51} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{931}{1.275}$.
12. Κάντε απαλοιφή παρονομαστών, οπότε $y(x-z)(x+y+z) = 0$.
13. Αντικαταστήστε $x = 1 - y$ και κάντε τις πράξεις. 14. Πράξεις.