ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

α Στους μιγαδικούς δεν υφίστανται ανισοτικές σχέσεις

Το σύνολο $\mathbf{C}$ διατηρεί **ισοτικά** όλες τις ιδιότητες του $\mathbf{R}$
Δεν υφίστανται ανισοτικές σχέσεις, υφίστανται μόνο στο $\mathbf{R}$
Οι εικόνες των μιγαδικών είναι σημεία και αυτά ή ταυτίζονται ή είναι διαφορετικά.
Έτσι και οι μιγαδικοί ή θα είναι ίσοι ή θα είναι διαφορετικοί, **όχι άνισοι**.
Δεν έχει νόημα να «μιλάμε»
και για κάθε διαδικασία που περιέχει, κάθε έννοια θετικού ή αρνητικού αριθμού.

Παράδειγμα 1

Δεν γράφουμε $\cancel{\mathbf{1+i<2+3i}}$, παρά μόνο $\mathbf{1+i \neq 2+3i}$

Παράδειγμα 2

Δεν μπορούμε να γράφουμε $\cancel{\sqrt{\mathbf{1+i}}}$

Από τη σχέση $\mathbf{z^2+w^2=0}$, **δεν** μπορούμε να πούμε ότι $\cancel{\mathbf{z=w=0}}$
αφού κάτι τέτοιο στο $\mathbf{R}$ το λέγαμε για τον λόγο ότι το άθροισμα μη αρνητικών ποσοτήτων μηδενίζεται μόνο όταν αυτές ταυτόχρονα γίνονται Μηδέν.
Εδώ, επειδή η έννοια των μη αρνητικών ποσοτήτων απουσιάζει, δεν μπορούμε να γράψουμε κάτι τέτοιο, παρά μόνο μπορούμε να γράψουμε ότι $\mathbf{z^2+w^2=0}$
ή $z^2-i^2w^2=0$ ή $z^2-(iw)^2=0$ ή $(z-iw)(z+iw)=0$ ή $\mathbf{z=iw}$, $\mathbf{z=-iw}$

Απαγορεύεται να έχουμε δυνάμεις με εκθέτες πέρα από ακέραιους αριθμούς.

Στο $\mathbf{R}$, η δύναμη $\mathbf{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}$ με $\mathbf{\mu,\nu}$ μη μηδενικούς φυσικούς είχε οριστεί μόνο αν $\mathbf{\alpha>0}$

Παράδειγμα 3

Δεν μπορούμε να γράψουμε $\mathbf{-1=i^2} \cancel{\mathbf{=i^{\frac{4}{2}}=\left(i^4\right)^{\frac{1}{2}}}} \mathbf{=1^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1}=1}$

Η **μόνη περίπτωση** που μπορούμε να κινηθούμε στην έννοια των ανισοτήτων είναι η περίπτωση που ο μιγαδικός είναι **πραγματικός**.

Παράδειγμα 4

Από $\mathbf{1+\kappa i>0}$, υπονοούμε σίγουρα ότι $\mathbf{\kappa=0}$

Ασκήσεις

α.1 ☐ Ο αριθμός $\mathbf{2i}$ είναι ένας **θετικός φανταστικός** αριθμός.

α.2 ☐ Αν ο $\mathbf{z}$ έχει εικόνα στο $\mathbf{I}$ τεταρτημόριο, θα είναι $\mathbf{z+\bar{z}>0}$ και άρα $\mathbf{\bar{z}>-z}$

α.3● Να βρείτε τους **πραγματικούς** αριθμούς $\mathbf{x}$, ώστε $\mathbf{\dfrac{1+xi}{x+i}>0}$

Θέμα 2

Έστω ο μιγαδικός $\mathbf{z = x + yi}$, με $\mathbf{|z| = 1}$ και ο μιγαδικός $\mathbf{z_o = 3 + 4i}$

Θα **προσδιορίσουμε** τον $\mathbf{z}$, ώστε το μέτρο $\mathbf{|z - z_o|}$ να γίνει **μέγιστο**.

Απάντηση

Θα δούμε πρώτα το θέμα αλγεβρικά.

Είναι $\mathbf{|z - z_o|} = |z + (-z_o)| \le |z| + |-z_o| = |z| + |z_o| = 1 + \sqrt{3^2 + 4^2} = 1 + 5 = 6$

Δηλαδή $\mathbf{|z - z_o| \le 6}$

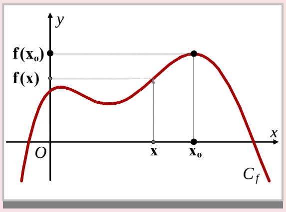
Πρώτα να θυμηθούμε τα πιο κάτω.

Μία σχέση της μορφής $\mathbf{f(x) \le y_o}$

για κάθε τιμή της μεταβλητής $\mathbf{x}$

από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, **δεν δηλώνει**

ότι η $\mathbf{f}$ παρουσιάζει απαραίτητα και **μέγιστο** το $\mathbf{y_o}$



Για να συμπεράνουμε ότι έχει μέγιστο

πρέπει να διαπιστώσουμε ότι υπάρχει $\mathbf{x_o}$, ώστε $\mathbf{f(x_o) = y_o}$

δηλαδή, να είναι τελικά $\mathbf{f(x) \le f(x_o)}$ για κάθε $\mathbf{x}$ από το πεδίο ορισμού της $\mathbf{f}$

Ανάλογα σκεφτόμαστε για το ελάχιστο.

Θα ελέγξουμε αν είναι δυνατόν να συμβεί η ισότητα $\mathbf{|z - z_o| = 6}$

Από $\mathbf{|z - z_o| = 6}$

είναι $\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = 6$ ή $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 6^2$ ή $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 36$

Επειδή $\mathbf{|z| = 1}$, θα είναι $\mathbf{x^2 + y^2 = 1}$

Οπότε, ισοδύναμα, η προηγούμενη σχέση γίνεται $-6x - 8y = 10$ ή $\mathbf{y = -\dfrac{3x+5}{4}}$

Τότε από $\mathbf{x^2 + y^2 = 1}$ είναι

$$x^2 + \left(\frac{3x+5}{4}\right)^2 = 1$$

$$\text{ή } x^2 + \frac{9x^2 + 30x + 25}{16} = 1$$

$$\text{ή } 16x^2 + 9x^2 + 30x + 25 = 16$$

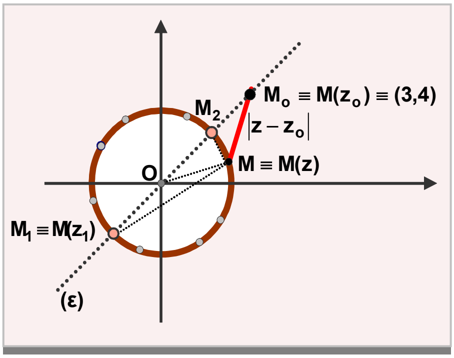
$$\text{ή } 25x^2 + 30x + 9 = 0$$

$$\text{ή } (5x+3)^2 = 0$$

$$\text{ή } \mathbf{x = -\frac{3}{5}} \text{ και έτσι είναι } \mathbf{y = -\frac{4}{5}}$$

Δηλαδή, υπάρχει μιγαδικός $\mathbf{z}$, ο $\mathbf{z = -\dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}i}$, ώστε το $\mathbf{\max(|z - z_o|) = 6}$

Θα μπορούσαμε να δούμε το θέμα και γεωμετρικά.



Ας βρούμε την ευθεία **(ε)**

που διέρχεται από τα σημεία **O(0,0)**

και $\mathbf{M(z_o) \equiv M_o \equiv (3,4)}$

Είναι $\lambda_\varepsilon = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$ και έτσι $\mathbf{(\varepsilon): y = \frac{4}{3}x}$

Ας δούμε, σε ποια σημεία αυτή τέμνει τον κύκλο $\mathbf{(\kappa): x^2 + y^2 = 1}$

Επειδή $\mathbf{y = \frac{4}{3}x}$, είναι $x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 1$ ή $25x^2 = y$ ή $x = \frac{3}{5}$ και $y = \frac{4}{5}$

$x = -\frac{3}{5}$ και $y = -\frac{4}{5}$

Άρα $\mathbf{(\varepsilon) \cap (\kappa) = \left\{ M_1\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right), M_2\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \right\}}$

Το $\mathbf{M_1 \equiv M(z_1)}$, είναι η εικόνα εκείνου του μιγαδικού, με το **μέγιστο** μέτρο $\mathbf{|z_1 - z_o|}$

Πραγματικά

$\mathbf{M_oM \le M_oO + OM}$ ή $\mathbf{M_oM \le M_oO + OM_1}$ ή $\mathbf{M_oM \le M_oM_1}$

Δηλαδή το μήκος $\mathbf{M_oM_1}$ είναι **μεγαλύτερο** από το τυχόν άλλο $\mathbf{M_oM} = \mathbf{|z_1 - z_o|}$

Να τονίσουμε επίσης ότι το **ελάχιστο** ανάλογα θα παρατηρείται στη θέση $\mathbf{M_2}$

Αυτό το **μέγιστο** μήκος είναι

$$\mathbf{|z_1 - z_o|} = \left|\left(\frac{-3}{5} - 3\right) + \left(\frac{-4}{5} - 4\right)i\right| = \sqrt{\left(-\frac{18}{5}\right)^2 + \left(-\frac{24}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{324}{25} + \frac{576}{25}} = \sqrt{\frac{900}{25}} = \mathbf{6}$$

Το μέγιστο μέτρο τεκμηριώνεται και με τον εξής τρόπο:

$\mathbf{OM_o + OM_1 = 5 + 1 = 6}$

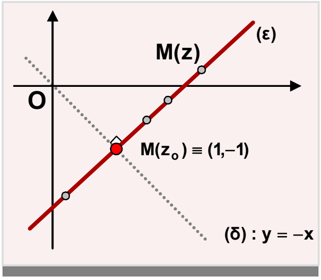
Το $\mathbf{M_2 \equiv M(z_2)}$ είναι η εικόνα εκείνου του μιγαδικού που δίνει το **ελάχιστο μέτρο**.

Θέμα 3

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $\mathbf{z = (2\lambda+1)+(2\lambda-1)i}$, $\boldsymbol{\lambda \in R}$

Αφού αποδείξουμε ότι οι εικόνες των $\mathbf{z}$ για τις διάφορες τιμές του $\boldsymbol{\lambda \in R}$ βρίσκονται σε **ευθεία**, στη συνέχεια από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς θα αποδείξουμε ότι ο μιγαδικός $\mathbf{z_o = 1-i}$ έχει το **μικρότερο δυνατό μέτρο**.

Απάντηση



$\mathbf{z = (2\lambda+1)+(2\lambda-1)i}$

Θέτουμε $\mathbf{2\lambda+1=x}$ και $\mathbf{2\lambda-1=y}$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\lambda = \frac{x-1}{2}}$, $\boldsymbol{\lambda = \frac{y+1}{2}}$

Οπότε $\frac{y+1}{2} = \frac{x-1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{y = x-2 : (\varepsilon)}$

Δηλαδή οι εικόνες των αριθμών $\mathbf{z}$ βρίσκονται στην ευθεία $\mathbf{(\varepsilon)}$

Θα βρούμε τώρα την ευθεία $\mathbf{(\delta)}$ που διέρχεται από το $\mathbf{O}$ και είναι κάθετη στην $\mathbf{(\varepsilon)}$

Επειδή $\mathbf{(\delta)\perp(\varepsilon)}$ είναι προφανώς $\boldsymbol{\lambda_\delta = -1}$ και τελικά $\mathbf{(\delta) : y = -x}$

Λύνοντας το σύστημα των $(\varepsilon),(\delta)$, είναι $x-2=-x$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x = 1}$ και συνεπώς $\mathbf{y = -1}$

Οπότε, οι ευθείες $(\varepsilon),(\delta)$ τέμνονται στο σημείο $\mathbf{M_o \equiv M(z_o) \equiv (1,-1)}$

Συνεπώς, πρόκειται για το μιγαδικό αριθμό $\mathbf{z_o = 1-i}$

Να τονίσουμε ότι το σημείο αυτό είναι δεκτό, αφού η ευθεία (ε) που βρήκαμε αποτελεί και τον τόπο των εικόνων των z
αφού το πεδίο τιμών της συνάρτησης $x = f(\lambda) = 2\lambda+1$, $\lambda \in R$, είναι το R

Ένας άλλος τρόπος για να διαπιστώσουμε ότι το $\mathbf{M_o}$ είναι και σημείο του τόπου θα ήταν να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\boldsymbol{\lambda}$, ώστε $x = 2\lambda+1 = 1$ και $y = 2\lambda-1 = -1$ το οποίο όμως είναι προφανές, αφού υπάρχει $\boldsymbol{\lambda}$ και προφανώς είναι ο $\boldsymbol{\lambda = 0}$

Μάλλον όμως, ο «καλύτερος τρόπος» για το ελάχιστο είναι ο παρακάτω:

$$|\mathbf{z}| = |(2\lambda+1)+(2\lambda-1)i| = \sqrt{(2\lambda+1)^2+(2\lambda-1)^2} = \sqrt{4\lambda^2+4\lambda+1+4\lambda^2-4\lambda+1}$$

$$= \sqrt{\mathbf{8\lambda^2+2}}$$ το οποίο **ελαχιστοποιείται** για $\boldsymbol{\lambda = 0}$

Οπότε, πρόκειται για τον μιγαδικό αριθμό $\mathbf{z_o = 1-i}$

Τα πιο πάνω είναι σημαντικά στην εξέλιξη του θέματος.

Για να δούμε τη σημαντικότητά τους, ας προσέξουμε και το πιο κάτω θέμα.

Θέμα **4**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $\mathbf{z} = (2\boldsymbol{\lambda}^2 + 1) + 2\boldsymbol{\lambda}^2\mathbf{i}$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}$

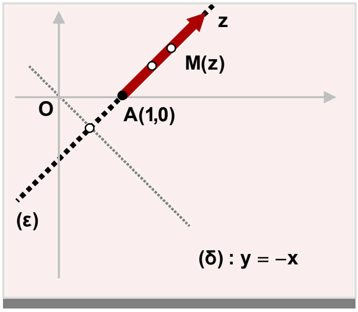
Θα βρούμε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $\mathbf{z}$, για τις διάφορες τιμές του $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}$

Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς

θα αποδείξουμε ότι ο μιγαδικός αριθμός $\mathbf{z_o} = \mathbf{1}$, έχει το **μικρότερο δυνατό μέτρο**.

Απάντηση

Έστω ο μιγαδικός $\mathbf{z} = (2\boldsymbol{\lambda}^2 + 1) + 2\boldsymbol{\lambda}^2\mathbf{i}$



Θέτουμε $2\lambda^2 + 1 = x$ και $2\lambda^2 = y$ $\Leftrightarrow$ $\lambda^2 = \dfrac{x-1}{2}$, $\lambda^2 = \dfrac{y}{2}$

Οπότε $\dfrac{y}{2} = \dfrac{x-1}{2}$ και ισοδύναμα $\mathbf{y = x - 1 : (\varepsilon)}$

Δηλαδή, οι εικόνες $M(z) \equiv (2\lambda^2 + 1, 2\lambda^2)$ είναι σημεία της ευθείας $\mathbf{(\varepsilon) : y = x - 1}$

Όμως, πολύ απλά εδώ διαπιστώνεται ότι ο τόπος **δεν** είναι ολόκληρη η ευθεία (ε)

αφού $\lambda^2 = \dfrac{x-1}{2} \geq 0$ και ισοδύναμα $x \geq 1$

Δηλαδή, ο **γεωμετρικός τόπος**, είναι η **ημιευθεία** $\mathbf{(Az) : y = x - 1}$, $\mathbf{x \geq 1}$ με $\mathbf{A(1,0)}$

Όμως δεν έχει νόημα να προσδιορίσουμε την ευθεία $(\delta) : y = -x$

για να εντοπίσουμε το σημείο τομής των (ε), (δ) το $M_o \equiv M(z_o) \equiv \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

αφού αυτό δεν είναι σημείο του τόπου.

Να τονίσουμε ότι εδώ ο ζητούμενος μιγαδικός αριθμός με το ελάχιστο μέτρο

είναι προφανώς ο αριθμός $\mathbf{z_o} = \mathbf{1}$

αφού προφανώς η εικόνα του Α είναι το σημείο της ημιευθείας Αz που απέχει από την αρχή Ο τη μικρότερη δυνατή απόσταση.

Επαναληπτικές ασκήσεις

40● Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει $|z_1 - z_2| = |1 - \bar{z}_1 z_2|$
να αποδείξετε ότι ένας **τουλάχιστον** από τους z_1, z_2 έχει **μέτρο** ίσο με 1

41● Έστω ότι $z_1 + z_2 = 1$ και $z_1^3 + z_2^3 = -2$, με $\mathrm{Im}(z_1) > 0$

Α) Να **βρείτε** τους z_1 και z_2

Β) Να βρείτε το **εμβαδόν** του τριγώνου που έχει **κορυφές** τις εικόνες των $0, z_1, z_2$

Γ) Να αποδείξετε ότι $z_1^{100} z_2^{100} = 1$

42● Έστω ο **μη πραγματικός** μιγαδικός z, ώστε $z = (1+i)|z-1| - 1 - i$

Α$_1$) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z)$

Α$_2$) Να αποδείξετε ότι $z = 4 + 4i$

Α$_3$) Να αποδείξετε ότι $|z-1|^2 + |z-1| - 30 = 0$

Έστω και οι μιγαδικοί w, ώστε $2|w-i|^2 + 1 \le (w-i)\left(\bar{w} + i\right) + 2\sqrt{(w-i)(\bar{w}+i)}$

Β$_1$) Να αποδείξετε ότι $|w - i| = 1$

Β$_2$) Να αποδείξετε ότι $4 \le |z - w| \le 6$

Β$_3$) Να αποδείξετε ότι $(z - w)(\bar{z} - \bar{w}) + (z - \bar{w})(\bar{z} - w) \le 72$

43● Έστω $z \in \mathbb{C}^*$ και $A(z) = z^{2\nu}, \nu \in \mathbb{N}$

Α) Για $\nu = 4$, να **υπολογίσετε** την παράσταση $A(1+i) + A(1-i)$

Β) Να **βρείτε** τους **φυσικούς αριθμούς** ν, ώστε $A(1+i) > 0$

Γ) Να **βρείτε** τους **φυσικούς αριθμούς** ν, ώστε $A(2+3i) + A(3-2i) = 0$

44● Έστω οι μιγαδικοί z_1 και z_2 με $|z_1| = 1$, ώστε να ισχύει $(z_1 - 1)z_2 = 2$
Να αποδείξετε ότι οι **εικόνες** των μιγαδικών z_2 **διαγράφουν** μία **ευθεία**.

45● Αν $\mathrm{Re}\left(z_1 \bar{z}_2\right) = 0$
να αποδείξετε πρώτα ότι $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0$ και μετά ότι $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$

46● Αν $z \in \mathbb{C}$, με $|z+1| = 1$ και $|z^2 + 1| \le 1$, να αποδείξετε ότι $|z| \le 1$

47● Οι αριθμοί z_κ, z_λ επαληθεύουν τη σχέση $z^{2007} = 1$ και $2\mathrm{Re}(z_\kappa \bar{z}_\lambda) = 1$
Να αποδείξετε ότι Α) $|z_\kappa \bar{z}_\lambda| = 1$ Β) $z_\kappa \bar{z}_\lambda + z_\lambda \bar{z}_\kappa = 1$ Γ) $\left|\mathrm{Im}\left(z_\kappa \bar{z}_\lambda\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

48● Έστω οι μιγαδικοί z, για τους οποίους ισχύει $|z|^2 + z(1+i) + \bar{z}(1-i) = 0$

Α) Να βρείτε τον **γεωμετρικό τόπο** των εικόνων των z

Β) Να αποδείξετε ότι $|z| \le 2$

Γ) Αν z_1 και z_2 είναι μιγαδικοί που ικανοποιούν την αρχική ισότητα, να **βρείτε** το **μέγιστο** του μέτρου $|z_1 - z_2|$

49● Έστω ο μιγαδικός z με $|z| = 1$

Να αποδείξετε ότι

Α) $|1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| \le 6$

Β₁) $|z-1| = |z^2 - z|$

Β₂) $|z-1| \le |z^2+1| + |z-1|$

Γ₁) $|z-1| \le |z^2 - z + 1| + 1$

Γ₂) $|z^2 - 1| \le |z+1| + |z^3+1|$

50● Έστω ο μιγαδικός z και ο μιγαδικός $m(z) = az + a\bar{z}$, $a < 0$

Γνωρίζουμε ότι $m(m(z)) = m(z)$

Α) Να αποδείξετε ότι $z \in I$

Β) Να αποδείξετε ότι $m(z) = 0$

51● Αν $x + yi = (1+3i)^{\nu}$, με $\nu \in N^*$ και $x, y \in R$, να αποδείξετε ότι $x^2 + y^2 = 10^{\nu}$

52● Έστω ο μιγαδικός z

και οι **θετικοί** α και β με $\alpha \ne \beta$ και ο **ακέραιος** $\nu > 1$, ώστε $(1+iz)^{\nu} = \dfrac{\alpha+\beta i}{\beta+\alpha i}$

Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z ανήκουν στον **κύκλο** $(\kappa): x^2 + (y-1)^2 = 1$ χωρίς το $O(0,0)$

53● Έστω ο μιγαδικός z, ώστε $\dfrac{Im(z)}{|z-1|} + \left|\left(ai + \sqrt{1-a^2}\right)^{2013}\right| = 0$, $-1 \le \alpha \le 1$

Να βρείτε τον **γεωμετρικό τόπο** των εικόνων του z

54● Αν $z \in C$ με $z^8 - z + 3 = 0$, να αποδείξετε ότι **Α)** $|z|^8 - |z| - 3 \le 0$

Β) $|z|^8 - |z| + 3 \ge 0$

55● Αν $|z| = 1$, αποδείξτε ότι για τον $w = \dfrac{z-2i}{i-2z}$ είναι $|w| = 1$ και $|z - w| \le 2$

Απαντήσεις των ασκήσεων

40● Από $|z_1 - z_2| = |1 - \bar{z}_1 z_2|$

έχουμε $|z_1 - z_2|^2 = |1 - \bar{z}_1 z_2|^2$

$$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)\left(\overline{z_1 - z_2}\right) = \left(1 - \bar{z}_1 z_2\right)\left(\overline{1 - \bar{z}_1 z_2}\right) \Leftrightarrow \left(z_1 \overline{z_1} - 1\right)\left(z_2 \overline{z_2} - 1\right) = 0$$

$\Leftrightarrow \left(|z_1|^2 - 1\right)\left(|z_2|^2 - 1\right) = 0$ και τελικά καταλήγουμε ότι $|z_1| = |z_2| = 1$

41● A) Από $z_1 + z_2 = 1$

είναι $(z_1 + z_2)^3 = 1 \Leftrightarrow z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow z_1(1 - z_1) = 1 \Leftrightarrow z_1^2 - z_1 + 1 = 0$

Οπότε $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

B) $E = \frac{1}{2}\beta\upsilon = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ τ.μ

Γ) $z_1^{100} z_2^{100} = (z_1 z_2)^{100} = 1$

42● A_1) Από $z = (1+i)|z-1| - 1 - i$ είναι και $z = (1+i)(|z-1| - 1)$

Οπότε $Im(z) = Re(z) = |z-1| - 1$

A_2) Θέτοντας $z = k + ki$, όπου $k = |z-1| - 1$

η σχέση $z = (1+i)|z-1| - 1 - i$ δίνει τελικά $k = 4$, οπότε $z = 4 + 4i$

A_3) $|z-1|^2 + |z-1| - 30 = 0 \Leftrightarrow |4+4i-1|^2 + |4+4i-1| - 30 = 0$

Προφανής

B_1) Η σχέση $2|w-i|^2 + 1 \le (w-i)\left(\bar{w}+i\right) + 2\sqrt{(w-i)(\bar{w}+i)}$

δίνει τελικά $|w-i|^2 - 2|w-i| + 1 \le 0 \Leftrightarrow (|w-i| - 1)^2 \le 0 \Leftrightarrow |w-i| = 1$

B_2) Από $1 = |z-w| = |4+4i-w| = |4+3i+i-w|$

εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα, παίρνουμε $4 \le |z-w| \le 6$

B_3) $(z-w)(\bar{z}-\bar{w}) + (z-\bar{w})(\bar{z}-w)$

$$= |z-w|^2 + |w-\bar{z}|^2 \le |z-w|^2 \left(|\bar{z}-i| + |i-w|\right)^2 \le 72$$

43● Α) $A(1+i)+A(1-i)=(1+i)^8+(1-i)^8 = 2^5$

Β) $A(1+i)>0 \Leftrightarrow (1+i)^{2v}>0 \Leftrightarrow (2i)^v>0 \Leftrightarrow i^v>0 \Leftrightarrow v=4\rho$

Γ) $A(2+3i)+A(3-2i)=0 \Leftrightarrow (2+3i)^{2v}+(3-2i)^{2v}=0$

Θέτοντας $z=2+3i$ καταλήγουμε ότι $z^{2v}\left(1+i^{2v}\right)=0 \Leftrightarrow (-1)^v=-1$

Οπότε $v=2\rho+1,\ \rho\in N$

44● Από $(z_1-1)z_2=2$ είναι $z_1=\dfrac{z_2+2}{z_2}$

Οπότε $1=|z_1|=\left|\dfrac{z_2+2}{z_2}\right|$ και άρα $|z_2|=|z_2+2|$

Υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε $|z_2|^2=|z_2+2|^2 \Leftrightarrow Re(z_2)=-1$

Οπότε $z_2=1+ki$, δηλαδή $M(z_2)\in(\varepsilon): x=1$

45● Από $Re\left(z_1\bar{z}_2\right)=0$ καταλήγουμε $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=-\dfrac{z_1}{z_2} \Leftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2}\in I$

Οπότε $\dfrac{z_1}{z_2}=bi,\ b\in R$ δηλαδή $z_1=bz_2i$

Η σχέση $|z_1|^2+|z_2|^2=|z_1-z_2|^2$ ισοδύναμα καταλήγει σε προφανές αν θέσουμε $z_1=bz_2i$

46● Από $|z+1|=1$ είναι $|z+1|^2=1$ και τελικά $z+\bar{z}=-z\bar{z}$

Από $|z^2+1|\le 1$ είναι $|z^2+1|^2\le 1$ και τελικά $z^2+\bar{z}^2=-z^2\bar{z}^2$

Οπότε, η σχέση $z+\bar{z}=-z\bar{z}$

υψούμενη στο τετράγωνο δίνει $\left(z+\bar{z}\right)^2=\left(-z\bar{z}\right)^2$ και τελικά $|z|\le 1$

47● Α) Είναι $z_\kappa^{2007}=1$, $z_\lambda^{2007}=1$ και μετρώντας έχουμε $|z_\kappa|=1$, $|z_\lambda|=1$

Οπότε και $|z_\kappa \bar{z}_\lambda|=1$

Β) Η σχέση $|z_\kappa \bar{z}_\lambda|=1$ υψούμενη στο τετράγωνο δίνει $z_\kappa \bar{z}_\lambda + z_\lambda \bar{z}_\kappa = 1$

Γ) Αφού $2\mathrm{Re}(z_\kappa \bar{z}_\lambda)=1$ είναι $z_\kappa \bar{z}_\lambda = \frac{1}{2}+\beta i$

Αντικαθιστώντας στη σχέση $|z_\kappa \bar{z}_\lambda|=1$ παίρνουμε $\left|\mathrm{Im}\left(z_\kappa \bar{z}_\lambda\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

48● Α) Θέτοντας $z=x+yi$

η σχέση $|z|^2 + z(1+i)+\bar{z}(1-i)=0$ γίνεται $(x-1)^2+y^2=1$

Β) Από τη γεωμετρική ερμηνεία.

Γ) Από τη γεωμετρική ερμηνεία είναι $|z_1-z_2|_{max}=2$

49● Α) $|1+z|+|1+z^2|+|1+z^3| \le 1+|z|+|1+|z|^2+1+|z|^3=6$

B_1) $|z^2-z|=|z||z-1|=|z-1|$

B_2) $|z-1|=|z^2-z|=|z^2+1+z-1|\le|z^2+1|+|z-1|$

Γ_1) $|z-1|=|z^2-z|=|z^2-z+1-1|\le|z^2-z+1|+1$

Γ_2) Αν πολλαπλασιάσουμε με $|z-1|$

τη σχέση $|z-1|=|z^2-z|=|z^2-z+1-1+1\le|z^2-z+1|+1$

παίρνουμε την $|z^2-1|\le|z+1|+|z^3+1|$

50● Α) $m\left(m(z)\right)=m(z) \iff \alpha m(z)+\alpha\overline{m(z)}=\alpha z+a\bar{z}$

Τελικά καταλήγουμε $\bar{z}=-z \iff z\in I$

Β) Είναι $z=\beta i$, $\beta\in R$ και συνεπώς $m(z)=\alpha\beta i-\alpha\beta i=0$

51● Από $x + yi = (1+3i)^{\nu}$ είναι $|x+yi| = |(1+3i)^{\nu}| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10^{\nu}$

52● Από $(1+iz)^{\nu} = \dfrac{\alpha+\beta i}{\beta+\alpha i}$ θέτοντας $z = x + yi$

είναι και $|(1+iz)^{\nu}| = \left|\dfrac{\alpha+\beta i}{\beta+\alpha i}\right| \Leftrightarrow |1+iz|^2 = 1$

$\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-1)^2 = 1$

Να τονίσουμε ότι $z \neq 0$, γιατί αν $z = 0$ προκύπτει άτοπο.

53● Από $\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z-1|} + \left|\left(ai + \sqrt{1-a^2}\right)^{2013}\right| = 0$ παίρνουμε $|z-1| = -\mathrm{Im}(z)$

και θέτοντας $z = x + yi$ τελικά παίρνουμε $x = 1$

Οπότε, ο τόπος είναι η ημιευθεία $(\varepsilon): x = 1$, με τεταγμένες αρνητικές.

54● A) Από $z^8 - z + 3 = 0$ είναι $z^8 = z - 3$

και παίρνοντας μέτρα καταλήγουμε $|z|^8 - |z| - 3 \leq 0$

B) Από $z^8 - z + 3 = 0$ είναι $z^8 + 3 = z$

και παίρνοντας μέτρα καταλήγουμε $|z|^8 - |z| + 3 \geq 0$

55● Από $w = \dfrac{z-2i}{i-2z}$ είναι $z - 2i = w(i-2z) \Leftrightarrow z(2w+1) = (w+2)i$

Παίρνοντας μέτρα, έχουμε $|z(2w+1)| = |(w+2)i|$

ή $|z||2w+1| = |i||w+2|$

ή $|2w+1| = |w+2|$

και καταλήγουμε ότι $|w| = 1$

$|z - w| \leq |z| + |w| = 2$

ΚΛΑΣΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ζ Επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων με τη μονοτονία

Να τονίσουμε ότι, στην περίπτωση που μία συνάρτηση είναι **γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα, δεν μπορεί να δεχτεί δύο διαφορετικές ρίζες.**
Δηλαδή, ή δε θα δέχεται καμία ρίζα
ή θα δέχεται ως ρίζα μοναδικό αριθμό.
Να τονίσουμε, ότι είναι λάθος να λέμε ότι θα δέχεται ή μία ρίζα ή καμία ρίζα.
Γιατί υπάρχει περίπτωση μία ρίζα να μην είναι πολλαπλότητας ένα.
Για παράδειγμα, η $f(x)=x^3$, ενώ είναι γνήσια αύξουσα, έχει 3 ρίζες ίσες με 0

Στην πράξη όμως, συνηθίζεται να χρησιμοποιούμε την πιο πάνω λαθεμένη έκφραση.

Είναι λοιπόν βέβαιο ότι, αν εντοπίσουμε μία ρίζα της, δεν μπορεί να δεχτεί ως ρίζα κάποιον άλλο αριθμό.

Πραγματικά

Έστω η γνήσια αύξουσα συνάρτηση $\mathbf{f}$
Αν ο αριθμός $\boldsymbol{\rho}$ είναι μία **ρίζα** της $\mathbf{f}$, θα είναι $\mathbf{f(\rho)=0}$
Αν τώρα θεωρήσουμε τον αριθμό $\boldsymbol{\rho_o > \rho}$
επειδή η $\mathbf{f}$ είναι **γνήσια αύξουσα**, θα είναι και $\mathbf{f(\rho_o) > f(\rho)}$ ή $\mathbf{f(\rho_o) > 0}$
Όμοια, αν θεωρήσουμε και τον αριθμό $\boldsymbol{\rho_o < \rho}$, θα είναι $\mathbf{f(\rho_o) < 0}$
Δηλαδή, διαπιστώσαμε ότι $\mathbf{f(\rho_o) \neq 0}$ και συνεπώς το $\boldsymbol{\rho_o}$ **δεν** είναι **ρίζα** της $\mathbf{f}$
Όμοια, αν η f είναι γνήσια φθίνουσα συνάρτηση.

Παράδειγμα **1**

Έστω η **γνήσια αύξουσα** στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, με $\mathbf{f(0)=1}$

Θα **λύσουμε** την εξίσωση $\mathbf{f(x^3-1)=1}$

Πραγματικά

$$\mathbf{f(x^3-1)=1} \Leftrightarrow f(x^3-1)=f(0) \Leftrightarrow x^3-1=0 \Leftrightarrow x^3=1 \Leftrightarrow \mathbf{x=1}$$

Δηλαδή, η εξίσωση $\mathbf{f(x^3-1)=1}$ έχει **μοναδική ρίζα** τον αριθμό $\mathbf{x=1}$

Για το πλήθος λύσεων των εξισώσεων που δεν επιλύονται αλγεβρικά με τις γνωστές μεθόδους παραγοντοποίησης, τα φέρνουμε όλα σε ένα μέλος θεωρούμε συνάρτηση και κινούμαστε με τη βοήθεια της μονοτονίας.

Παράδειγμα **2**

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $\mathbf{x^5+x=2}$ έχει **μοναδική λύση** την $\mathbf{x=1}$

Πραγματικά

Να τονίσουμε ότι αυτή έχει μόνο μία **ακέραια ρίζα**, τον αριθμό **1**

Θεωρούμε την $\mathbf{f(x)=x^5+x-2}$ και θα αποδείξουμε ότι αυτή έχει μοναδική ρίζα.

Έστω $\mathbf{x_1, x_2 \in R}$ με $\mathbf{x_1 < x_2}$, τότε είναι και $\mathbf{x_1^5 < x_2^5}$

Οπότε $\mathbf{x_1^5 + x_1 < x_2^5 + x_2}$ ή $x_1^5+x_1-2 < x_2^5+x_2-2$, δηλαδή $\mathbf{f(x_1) < f(x_2)}$
Δηλαδή, η $\mathbf{f}$ είναι γνήσια αύξουσα και συνεπώς το **1** είναι **μοναδική ρίζα** της $\mathbf{f}$

Να παρατηρήσουμε επίσης κάτι πολύ σημαντικό:

Όταν λύνουμε την εξίσωση $f(x) = y$, ως προς x
πρέπει να «κινηθούμε» ισοδύναμα, γιατί αλλιώς δεν βρίσκουμε πεδίο τιμών
αφού δεν ξέρουμε αν όλα τα y της σχέσης $f(x) = y$ είναι δεκτά.

Παράδειγμα **4**

Έστω η συνάρτηση f, ώστε $f^3(x) + f(x) = x$, $x \in R$

Από $f(x) = y$ είναι και $f^3(x) = y^3$

Προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε $f^3(x) + f(x) = y^3 + y$ ή $x = y^3 + y$

Επειδή δεν κινηθήκαμε ισοδύναμα
αφού προσθέσαμε κατά μέλη τις ισότητες, δεν μπορούμε να εντοπίσουμε το πεδίο τιμών.

Ας προσέξουμε όμως την πιο κάτω τεχνική.

Έστω τώρα το τυχόν $y \in R$, ώστε $x = y^3 + y$

Η αρχική σχέση γίνεται $f^3(x) + f(x) = y^3 + y$

Επειδή η συνάρτηση $r(x) = x^3 + x$ είναι **γνήσια αύξουσα**.

η σχέση $f^3(x) + f(x) = y^3 + y$ δίνει $r(f(x)) = r(y)$ ή $f(x) = y$

Οπότε, για τον τυχόντα $y \in R$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x \in R$, ώστε $f(x) = y$

Άρα $f(R) = R$

Ας προσέξουμε και το πιο κάτω:

Η πιο πάνω σχέση $x = y^3 + y$

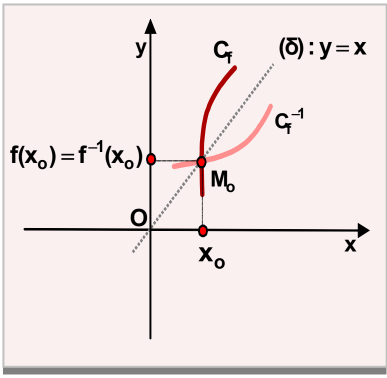
μας δηλώνει προφανώς ότι το τυχόν $y \in f(R) = R$

αντιστοιχίζεται με ένα μόνο x, το $x = y^3 + y$ και συνεπώς η $f : 1-1$

Οπότε
δε χρειάζεται να αποδείξουμε ότι αυτή είναι $1-1$ με τη διαδικασία του ορισμού.

Τώρα, αν η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο R (…όχι γνήσια φθίνουσα) και η γραφική παράσταση C_f τέμνεται με την γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ τότε θα τέμνεται πάνω στη διχοτόμο $(\delta): y = x$ του I και III τεταρτημορίου.

Πραγματικά



Έστω ότι τα διαγράμματα C_f, $C_{f^{-1}}$ **τέμνονται** στο σημείο $M_o(x_o, y_o)$

Θα αποδείξουμε ότι $y_o = x_o$

Πραγματικά

Είναι $y_o = f^{-1}(x_o) = f(x_o)$

Έστω ότι $y_o < x_o$ ή $f^{-1}(x_o) < x_o$

Επειδή η f είναι **γνήσια αύξουσα** στο R

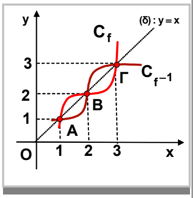
θα είναι $f(f^{-1}(x_o)) < f(x_o) \Leftrightarrow x_o < f(x_o) \Leftrightarrow x_o < f^{-1}(x_o)$ **Άτοπο**

Όμοια, αν υποθέσουμε ότι $y_o > x_o$, καταλήγουμε σε άτοπο.

Οπότε, είναι $y_o = f^{-1}(x_o) = f(x_o) = x_o$

Με βάση τα προηγούμενα, διαπιστώνουμε ότι αν η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα, οι εξισώσεις $f^{-1}(x) = f(x)$, $f^{-1}(x) = x$ και **$f(x) = x$ είναι ισοδύναμες έχουν δηλαδή**, **τις ίδιες λύσεις**.
Αυτές θα δίνουν ως **λύση**, τις **τετμημένες** των **σημείων τομής** –αν υπάρχουν.

Παράδειγμα **3**



Έστω η **γνήσια αύξουσα** στο R συνάρτηση f

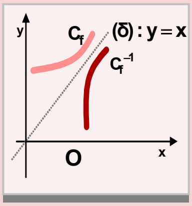
Ξέρουμε ότι $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x \in \{1,2,3\}$

Είναι προφανές ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g

τέμνονται στην $(\delta): y = x$, με $f(1) = f^{-1}(1) = 1$, $f(2) = f^{-1}(2) = 2$, $f(3) = f^{-1}(3) = 3$

Δηλαδή, οι C_f, C_g τέμνονται στα σημεία A, B, Γ και μόνο σ'αυτά.

Είναι προφανές ότι

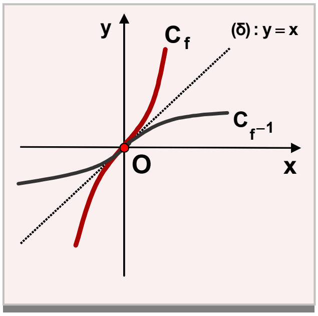


αν η γραφική παράσταση μίας **γνήσιας αύξουσας** συνάρτησης f

δεν τέμνει το διάγραμμα της f^{-1}

τότε το διάγραμμα της f **δεν τέμνει** και τη διχοτόμο $(\delta): y = x$

Παράδειγμα 4



Έστω η ορισμένη στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, με $\mathbf{f(R) = R}$ ώστε $\mathbf{f^3(x) + f(x) = x}$, $\mathbf{x \in R}$

- Θα αποδείξουμε ότι η $\mathbf{f}$ είναι **γνησίως αύξουσα**.
- Μετά θα αποδείξουμε ότι $\mathbf{f^{-1}(x) = x^3 + x}$
- Τέλος, θα **λύσουμε** την εξίσωση $\mathbf{f(x) = f^{-1}(x)}$

Πραγματικά

Θεωρούμε τα τυχόντα $x_1, x_2 \in R$ με $\mathbf{x_1 < x_2}$

Τότε είναι $\mathbf{f^3(x_1) + f(x_1) < f^3(x_2) + f(x_2)}$

$$\Leftrightarrow f^3(x_1) + f(x_1) - f^3(x_2) - f(x_2) < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x_1) - f(x_2)\right)\left(f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) + 1\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0, \text{ αφού } f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f(x_2) + 1 > 0$$

$$\Delta_{f(x_1)} = -3f^2(x_2) - 4 < 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{f(x_1) < f(x_2)}$$

Καταλήξαμε ότι η $\mathbf{f}$ είναι **γνήσια αύξουσα** και συνεπώς η $\mathbf{f}$ είναι **αντιστρέψιμη**.

Από $\mathbf{f(x) = y}$ και $\mathbf{f^3(x) = y^3}$

Προσθέτοντας κατά μέλη, είναι $\mathbf{f^3(x) + f(x) = y + y^3}$ και φυσικά $\mathbf{x = y + y^3}$

Οπότε $\mathbf{f^{-1}(x) = x^3 + x}$, $\mathbf{x \in f(R) = R}$

Όπως ξέρουμε, ο τρόπος αυτός μας δίνει πληροφορίες και για το $\mathbf{1-1}$

Τέλος, η εξίσωση $\mathbf{f(x) = f^{-1}(x)}$ είναι ισοδύναμη με την $\mathbf{f^{-1}(x) = x}$ ή $\mathbf{x^3 + x = x}$

ή $\mathbf{x^3 = 0}$

ή $\mathbf{x = 0}$

Επαναληπτικές ασκήσεις

62● Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f : R \to R}$, ώστε $\mathbf{f(x) + f(x-1) = x^2 - 3x + 3}$

Α) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(0) + f(1) = 1}$ και ότι $\mathbf{f(1) + f(2) = 1}$

Β) Να αποδείξετε ότι η $\mathbf{f}$ **δεν** είναι $\mathbf{1-1}$

63● **Λύστε** την εξίσωση $\mathbf{2^x + 3^x + ... + 20^x = 209}$

64● Έστω η ορισμένη στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, ώστε $\mathbf{f(x-2) - 2f(4-x) = 3x - 10}$ για κάθε $\mathbf{x \in R}$

Α) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(4-x) = 2f(x-2) + 8 - 3x}$

Β) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x) = x}$

65● Έστω η ορισμένη στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, ώστε $\mathbf{f(f(x)) = x + 2}$, για κάθε $\mathbf{x \in R}$

Α) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x) = f(x-2) + 2}$ και μετά ότι $\mathbf{f(x) = f(x+2) - 2}$, $\mathbf{x \in R}$

Β) Αν το $\mathbf{1000}$ είναι **ρίζα** της $\mathbf{f}$, να αποδείξετε ότι το $\mathbf{998}$ **δεν** είναι **ρίζα** της $\mathbf{f}$

66● Αν $\mathbf{f(x^4) + f(x) = x^4 - x}$, για κάθε $\mathbf{x \in R}$, αποδείξτε ότι η $\mathbf{f}$ **δεν** είναι $\mathbf{1-1}$

67● Αν $\mathbf{2f(x^3) - f^2(x) = 1}$, για κάθε $\mathbf{x \in R}$, αποδείξτε ότι η $\mathbf{f}$ **δεν** είναι $\mathbf{1-1}$

68● Αν $\mathbf{f(x^4 - 1) + f(x-1) = x^4 - 1}$, για κάθε $\mathbf{x \in R}$, αποδείξτε ότι η $\mathbf{f}$ **δεν** είναι $\mathbf{1-1}$

69● Να αποδείξετε ότι
η εξίσωση $\mathbf{(x^3 + x - 1)^5 + x^3 + x - 3 = 0}$ έχει **μοναδική ρίζα** τον αριθμό $\mathbf{1}$

70● Έστω ότι $\mathbf{f^7(x) + f^5(x) = f^7(-x) + f^5(-x)}$, για κάθε $\mathbf{x \in R}$
Να αποδείξετε ότι η $\mathbf{f}$ είναι **άρτια**.

71● Έστω ότι $\mathbf{f(x+y) \ge f(x)f(y) \ge e^{x+y}}$, για κάθε $\mathbf{x, y \in R}$

Α) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(0) = 1}$

Β) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(-x)f(x) = 1}$

Γ) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x) = e^x}$

Απαντήσεις των ασκήσεων

62● Α) Η σχέση $f(x)+f(x-1)=x^2-3x+3$

για $x=1$ δίνει $f(1)+f(0)=1$ και για $x=2$ δίνει $f(2)+f(1)=1$

Οπότε $f(2)=f(0)$ και συνεπώς η f **δεν** είναι $1-1$

Β)

63● Για $x=1$ η εξίσωση επαληθεύεται

αφού $2^1+3^1+...+20^1=2+3+...+20=\dfrac{2+20}{2}19=209$

Επίσης η συνάρτηση $f(x)=2^x+3^x+...+20^x$ είναι γνήσια αύξουσα

ως άθροισμα των γνήσιων αυξουσών $f_1(x)=2^x$, …, $f_{19}(x)=20^x$

64● Α) Η σχέση $f(x-2)-2f(4-x)=3x-10$

για x το $6-x$ δίνει $f(4-x)-2f(x)=8-3x$

Β) Η αρχική γίνεται $f(x-2)-2\big(2f(x-2)+8-3x\big)=3x-10$ ή $f(x)=x$

65● Α) Η σχέση $f\big(f(x)\big)=x+2$

για x το $f(x)$ δίνει $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)=f(x)+2 \iff f\big(x+2\big)=f(x)+2$

Αυτή για x το $x-2$ δίνει $f(x)=f(x-2)+2$

Β) Αυτή για x το 1000 δίνει $f(1000)=f(998)+2 \iff f(998)=-2$

66● Η σχέση $f(x^4)+f(x)=x^4-x$

για $x=1$ δίνει $f(1)=0$ και για $x=0$ δίνει $f(0)=0$

67● Η σχέση $2f(x^3) - f^2(x) = 1$

για $x = 1$ δίνει $f(1) = 1$ και για $x = 0$ δίνει $f(0) = 1$

68● Η σχέση $f(x^4 - 1) + f(x - 1) = x^4 - 1$

για $x = 1$ δίνει $f(0) = 0$ και για $x = -1$ δίνει $f(-2) = 0$

69● Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$

Τότε η εξίσωση $(x^3 + x - 1)^5 + x^3 + x - 3 = 0$

γίνεται $f(x^3 + x - 1) = 0 = f(1) \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

70● Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^7 + x^5$

Τότε η εξίσωση $f^7(x) + f^5(x) = f^7(-x) + f^5(-x)$

γίνεται $g(f(x)) = g(f(-x)) \Leftrightarrow f(x) = f(-x)$

71● Α) Η σχέση $f(x + y) \geq f(x)f(y) \geq e^{x+y}$

για $x = y = 0$ δίνει $f(0) \geq f^2(0) \geq 1 > 0$, δηλαδή $f(0) \geq 1$ και $f(0) \leq 1$

Οπότε $f(0) = 1$

Β) Η $f(x + y) \geq f(x)f(y) \geq e^{x+y}$ για y το $-x$ δίνει $1 \geq f(x)f(-x) \geq 1$

Οπότε $f(-x)f(x) = 1$

Γ) Από $f(x + y) \geq e^{x+y}$ για $y = 0$ και x το $-x$ είναι $f(-x) \geq e^{-x}$ ή $\dfrac{1}{f(x)} \geq \dfrac{1}{e^x}$

ή $f(x) \leq e^x$ και τελικά είναι $f(x) = e^x$

ΟΡΙΑ

θ Κριτήριο παρεμβολής

Είδαμε το κριτήριο παρεμβολής, το οποίο αποτελεί ένα **κριτήριο ύπαρξης ορίων**.

Πιο συγκεκριμένα, το θεώρημα έχει αποδειχτεί για **πεπερασμένα αποτελέσματα**.

Αν $\mathbf{h(x) \le f(x) \le g(x)}$ «κοντά» στο $\mathbf{x_o}$ και $\lim\limits_{x \to x_o} \mathbf{h(x)} = \lim\limits_{x \to x_o} \mathbf{g(x)} = \ell \in \mathbf{R}$

τότε θα **υπάρχει** το όριο $\lim\limits_{x \to x_o} \mathbf{f(x)}$ και θα ισούται με ℓ

Απόδειξη*

Είναι $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \to x_o} h(x) = \ell$, οπότε και $\lim\limits_{x \to x_o} (g(x) - h(x)) = 0$

$$|f(x) - h(x)| = f(x) - h(x) \le g(x) - h(x)$$

Έτσι $-(g(x) - h(x)) \le f(x) - h(x) \le g(x) - h(x)$, και προφανώς $\lim\limits_{x \to x_o} (f(x) - h(x)) = 0$

Οπότε $\lim\limits_{x \to xo} f(x) = \lim\limits_{x \to xo} (f(x) + h(x) - h(x)) = \lim\limits_{x \to x_o} (f(x) - h(x)) + \lim\limits_{x \to x_o} h(x) = 0 + \ell = \ell$

Δώσαμε την απόδειξη χάριν εξάσκησης.

Το κριτήριο παρεμβολής ισχύει και όταν τα όρια απειρίζονται.

Πιο συγκεκριμένα:

Αν $\mathbf{h(x) \le f(x) \le g(x)}$ «κοντά» στο $\mathbf{x_o}$ και $\lim\limits_{x \to x_o} \mathbf{h(x)} = \lim\limits_{x \to x_o} \mathbf{g(x)} = +\infty$

τότε θα **υπάρχει** το όριο $\lim\limits_{x \to x_o} \mathbf{f(x)}$ και θα ισούται με $+\infty$

Απόδειξη*

Επειδή $\lim\limits_{x \to x_o} h(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = +\infty$ «κοντά» στο $\mathbf{x_o}$ είναι $h(x) > 0$ και $g(x) > 0$

και συνεπώς $0 < h(x) \le f(x) \le g(x)$

Οπότε $\dfrac{1}{g(x)} \le \dfrac{1}{f(x)} \le \dfrac{1}{h(x)}$ και προφανώς είναι $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{1}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{1}{h(x)} = 0$

Άρα, από το κριτήριο παρεμβολής, είναι $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ και επειδή $f(x) > 0$

θα είναι $\lim\limits_{x \to x_o} \mathbf{f(x)} = +\infty$

Δώσαμε την απόδειξη χάριν εξάσκησης.

Όμοια για το $-\infty$

Το προηγούμενο θεώρημα, ειδικότερα, γίνεται και όπως πιο κάτω:

Αν $\mathbf{f(x) \le g(x)}$ για κάθε τιμή του $\mathbf{x}$ «κοντά» στο $\mathbf{x_o}$ και $\lim\limits_{\mathbf{x \to x_o}} \mathbf{f(x)} = +\infty$

τότε **θα υπάρχει** το όριο $\lim\limits_{\mathbf{x \to x_o}} \mathbf{g(x)}$ και μάλιστα $\lim\limits_{\mathbf{x \to x_o}} \mathbf{g(x)} = +\infty$

Απόδειξη*

Αφού $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = +\infty > 0$

κοντά στο σημείο $\mathbf{x_o}$ θα είναι $f(x) > 0$ και συνεπώς θα είναι $0 < f(x) \le g(x)$

και συνεπώς, αντιστρέφοντας είναι $0 < \dfrac{1}{g(x)} \le \dfrac{1}{f(x)}$

Από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x \to x_o} 0 = 0$ και $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

Άρα $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{1}{g(x)} = 0$ και επειδή $g(x) > 0$ θα είναι $\lim\limits_{\mathbf{x \to x_o}} \mathbf{g(x)} = +\infty$

Δώσαμε την απόδειξη χάριν εξάσκησης.

Επίσης

Αν $\mathbf{f(x) \le g(x)}$ για κάθε τιμή του $\mathbf{x}$ «κοντά» στο $\mathbf{x_o}$ και $\lim\limits_{\mathbf{x \to x_o}} \mathbf{g(x)} = -\infty$

τότε θα υπάρχει το όριο $\lim\limits_{\mathbf{x \to x_o}} \mathbf{f(x)}$ και μάλιστα $\lim\limits_{\mathbf{x \to x_o}} \mathbf{f(x)} = -\infty$

Η απόδειξη γίνεται εντελώς αντίστοιχα με προηγούμενα.

Παράδειγμα **1**

Αν υποθέσουμε ότι, για τη συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι $\mathbf{f^3(x) \ge x^3 + ημ^2 x}$

τότε θα είναι και $\mathbf{f^3(x) \ge x^3}$, αφού $\mathbf{ημ^2 x \ge 0}$

Επειδή $\lim\limits_{\mathbf{x \to +\infty}} \mathbf{x^3} = +\infty$ θα είναι και $\lim\limits_{x \to +\infty} f^3(x) = +\infty$ ή $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{f^3(x)} = \sqrt[3]{+\infty}$

ή $\lim\limits_{\mathbf{x \to +\infty}} \mathbf{f(x)} = +\infty$

Οπότε, το όριο της $\mathbf{f}$ στο $+\infty$ ισούται με $+\infty$

Ασκήσεις

η.15● Έστω ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-g(x)\right)=-1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+g(x)\right)=3$

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(g(x)\right)=2$ και ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(2f(x)+3g(x)\right)=8$

η.16● Αν $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)g(x)\right)=8$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\,f(x):g(x)\,\right)=2$, $f(x)>0$

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=4$

β) Να διαπιστώσετε ότι «κοντά» στο 0 είναι $g(x)>0$

γ) Να **βρείτε** το $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

η.17● Αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{1-f^2(x)}+f(x)-1}{f(x)}\right)$

η.18● Αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\frac{1}{1-f(x)}}\right)=1$

η.19● Αν $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+1}+3f(x)\right)=6$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=2$

η.20● Αν $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f(x)-1}{x-1}\right)=\dfrac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{x}f(x)-1}{x-1}\right)=1$

η.21● Έστω ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{1-f(x)}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2f(x)}{1-2f(x)}\right)=L\in R$ και $0<f(x)<1$

α) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{L}{L+1}=\dfrac{L}{2L+2}$

β) Να αποδείξετε ότι $L=0$

η.22● Αν $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(1+2x)-f(1-x)}{x}\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(1+x)-f(1)}{x}\right)=L$, δείξτε ότι $L=0$

η.23● Αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}(f\circ f)(x)=1$

η.24● Αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$, δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2f(x)+3g(x)}{f(x)+g(x)+f(x)g(x)}\right)=0$

η.25● Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\left(\,|\,x-1\,|\,f(x)\,\right)=1$

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f^2(x)-8f(x)+2010}{f^2(x)+f(x)+1}\right)=1$

Απαντήσεις των ασκήσεων

η.15● Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-g(x))=-1$ και $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x))=3$

προσθέτοντας παίρνουμε $\lim\limits_{x\to 0}(2f(x))=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

και αφαιρώντας παίρνουμε $\lim\limits_{x\to 0}(2g(x))=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$

η.16● α) Από $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)g(x))=8$ και $\lim\limits_{x\to 0}(\, f(x):g(x)\,)=2$

πολλαπλασιάζοντας παίρνουμε $\lim\limits_{x\to 0}\left(f^2(x)\right)=16$ και επειδή $f(x)>0$

είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=4$

β) Αφού $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)g(x))=8>0$

«κοντά» στο 0 είναι $f(x)g(x)>0$ και επειδή $f(x)>0$, είναι και $g(x)>0$

γ) Διαιρώντας τις $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)g(x))=8$ και $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=4$ είναι $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=2$

η.17●

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1-f^2(x)}+f(x)-1}{f(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt{1-f^2(x)}+f(x)-1\right)\left(\sqrt{1-f^2(x)}-f(x)+1\right)}{f(x)\left(\sqrt{1-f^2(x)}-f(x)+1\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2\cancel{f(x)}(f(x)-1)}{\cancel{f(x)}\left(\sqrt{1-f^2(x)}-f(x)+1\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2(f(x)-1)}{\sqrt{1-f^2(x)}-f(x)+1}\right)=1$$

η.18● Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1-f(x)}\right)=0$, είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\frac{1}{1-f(x)}}\right)=\lim\limits_{y\to 0} e^{y}=1$

η.19● Θέτουμε $2x-\sqrt{4x^2+1}+3f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{g(x)+\sqrt{4x^2+1}-2x}{3}$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{g(x)+\sqrt{4x^2+1}-2x}{3}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{g(x)}{3}\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}{3\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}\right)$$

$$=2+\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\right)=2$$

η.20● Θέτουμε $\dfrac{f(x)-1}{x-1}=g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)(x-1)+1$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left(g(x)(x-1)+1\right)=1$

Οπότε $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{\sqrt{x}f(x)-1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{\sqrt{x}(x-1)g(x)+\sqrt{x}-1}{x-1}\right)=\ldots=1$

η.21● Θέτουμε $\dfrac{f(x)}{1-f(x)}=g_1(x) \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{g_1(x)}{1+g_1(x)}$

Οπότε $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to10}\left(\dfrac{g_1(x)}{1+g_1(x)}\right)=\dfrac{L}{1+L}$

Θέτουμε $\dfrac{2f(x)}{1-2f(x)}=g_2(x) \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{g_2(x)}{2+2g_2(x)}$

Οπότε $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to10}\left(\dfrac{g_2(x)}{2+2g_2(x)}\right)=\dfrac{L}{2+2L}$

Πρέπει $\dfrac{1}{1+L}=\dfrac{L}{2+2L} \Leftrightarrow L=0$

ή $L=-1$ Απορρίπτεται

αφού $0<f(x)<1$ και συνεπώς $\lim\limits_{x\to0} f(x)\geq 0$

η.22● $$0=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(1+2x)-f(1-x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(1+2x)-f(1)+f(1)-f(1-x)}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(1+2x)-f(1)}{x}\right)-\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(1-x)-f(1)}{x}\right)$$

Θέτουμε $2x=y$ $\quad -x=z$

$$=2\lim_{y\to 0}\left(\frac{f(1+y)-f(1)}{y}\right)+\lim_{z\to 0}\left(\frac{f(1+z)-f(1)}{z}\right)=3\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\right)=0$$

η.23● $$\lim_{x\to 0}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to 0}(f(f(x))=\lim_{f(x)\to 1}(f(f(x))=\lim_{y\to 1}f(y)=1$$

η.24● $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2f(x)+3g(x)}{f(x)+g(x)+f(x)g(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{2}{g(x)}+\frac{3}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}+\frac{1}{g(x)}+1}\right)=0$$

η.25● α) Θέτουμε $|x-1|f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{g(x)}{|x-1|}$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$

β) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{f^2(x)-8f(x)+2010}{f^2(x)+f(x)+1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{f(x)}-\frac{8}{f(x)}+\frac{2010}{f(x)}}{1+\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f^2(x)}}\right)=1$$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ε Πεδίο τιμών

Είναι γνωστό ότι με τη βοήθεια της μονοτονίας και της συνέχειας μπορούμε να προσδιορίσουμε το πεδίο τιμών μίας συνάρτησης.

Παράδειγμα **1**

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f(x) = x^3 + x + 1}$, με $\mathbf{x \in D = [0,+\infty)}$

Επειδή είναι προφανές ότι η συνάρτηση **f** είναι **γνήσια αύξουσα** και **συνεχής** είναι $\mathbf{f(D) = \left[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = [1,+\infty)}$

Αργότερα, στην παραγώγιση, θα δούμε αρκετά εύχρηστα κριτήρια μονοτονίας.

Να τονίσουμε τώρα, κάτι πολύ σημαντικό !

Το πεδίο τιμών μας πληροφορεί για ύπαρξη ορίων !

Όταν π.χ. η συνάρτηση **f**
είναι **γνήσια αύξουσα** και **συνεχής** στο διάστημα $\mathbf{\Delta = [0,+\infty)}$

γράφουμε ότι $\mathbf{f(D) = \left[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)}$

και σημαίνει ότι **υπάρχει** το όριο $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}$ και μάλιστα είναι **μεγαλύτερο** του **f(0)**

Παράδειγμα **2**

Έστω η **γνήσια αύξουσα** και **συνεχής** στο **R** συνάρτηση **f**
ώστε $\mathbf{f^3(x) + f(x) = x + 1}$, για κάθε $\mathbf{x \in R}$

Θα αποδείξουμε ότι το **πεδίο τιμών** της, είναι το **R** , δηλαδή, ότι $\mathbf{f(R) = R}$

Πραγματικά

Επειδή η **f** είναι **γνήσια αύξουσα** και **συνεχής** στο **R**
το **πεδίο τιμών** της είναι το $\mathbf{f(R) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)}$

Αν το όριο $\mathbf{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l_1}$ ήταν **πεπερασμένο**

από $\mathbf{f^3(x) + f(x) = x + 1}$, θα είχαμε $\mathbf{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f^3(x) + f(x)\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)}$ ή $\mathbf{l_1^3 + l_1 = -\infty}$

Άτοπο

Οπότε, το όριο $\mathbf{l_1}$ ως αριστερό άκρο διαστήματος ισούται με $\mathbf{l_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

Όμοια, καταλήγουμε ότι $\mathbf{l_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ και συνεπώς $\mathbf{f(R) = (-\infty,+\infty)}$

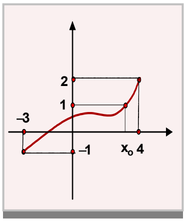
Είχαμε δει το ίδιο θέμα στην κλασική ανάλυση χωρίς χρήση της συνέχειας.

Αργότερα θα δούμε ότι μία συνάρτηση σαν την πιο πάνω είναι και συνεχής και συνεπώς θα μπορούσε να μη δοθεί στην υπόθεση.

γ Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Στην ουσία, το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών, μας πληροφορεί ότι, στην περίπτωση που ξέρουμε δύο τιμές του πεδίου τιμών μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης, τότε αυτή θα παίρνει και όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

Παράδειγμα **1**



Αν για την πολυωνυμική συνάρτηση $\mathbf{f}$

ξέρουμε ότι $\mathbf{f(-3)=-1}$ και $\mathbf{f(4)=2}$

τότε, αν πάρουμε μία τυχούσα τιμή μεταξύ των $\mathbf{-1}$ και $\mathbf{2}$

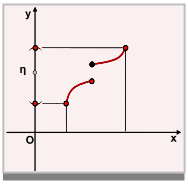
π.χ. την τιμή $\mathbf{1}$

αυτή θα ανήκει στο πεδίο τιμών, δηλαδή, θα υπάρχει $\mathbf{x_o \in (-3,4)}$, ώστε $\mathbf{f(x_o)=1}$

Αν και εφαρμόζοντας το Θ.Bolzano

δεν χρειάζεται να σκεφτόμαστε το Θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών

εντούτοις, μ' αυτό, διευκολυνόμαστε στις πιο κάτω περιπτώσεις.



Να παρατηρήσουμε, όπως έχουμε αναφέρει και ξανά

αν η $\mathbf{f}$ δεν είναι συνεχής

τότε δεν θα παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

Ας δούμε τα πιο κάτω θέματα:

Θέμα **1**

Έστω η **συνεχής** στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, με $\mathbf{f(2)=18}$ και $\mathbf{f(f(x))+f(x)=20}$, $\mathbf{x\in R}$

Θα αποδείξουμε ότι $\mathbf{f(18)=2}$ και μετά ότι $\mathbf{f(10)=10}$

Απάντηση

Για $\mathbf{x=2}$, η $f(f(x))+f(x)=20$ δίνει $f(f(2))+f(2)=20$ ή $f(18)+18=20$ ή $\mathbf{f(18)=2}$

Επειδή η $\mathbf{f}$ είναι **συνεχής** στο διάστημα $\mathbf{[2,18]}$ και $\mathbf{f(18)=2<\ 10\ <18=f(2)}$

σύμφωνα με το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών**

θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\mathbf{\xi\in(2,18)}$, ώστε $\mathbf{f(\xi)=10}$

Για $\mathbf{x=\xi}$, η $\mathbf{f(f(x))+f(x)=20}$ δίνει $f(f(\xi))+f(\xi)=20$ ή $f(10)+10=20$ ή $\mathbf{f(10)=10}$

Να τονίσουμε ένα σύνηθες λάθος.

Από $\mathbf{f(x)=y}$ είναι $\mathbf{f(f(x))=f(y)}$ και τελικά $\mathbf{f(x)+f(f(x))=y+f(y)}$ ή $\mathbf{20=y+f(y)}$

Οπότε $\mathbf{f(y)=20-y}$ και για $\mathbf{y=10}$ προκύπτει $\mathbf{f(10)=10}$

Αυτό όμως είναι **λάθος**, αφού **δεν** γνωρίζουμε αν το $\mathbf{y=10}$ τελικά ανήκει στο $\mathbf{f(R)}$

Πάντως ο τύπος της $\mathbf{f}$ είναι $\mathbf{f(x)=20-x}$

Είναι προφανές ότι η αρχική συνθήκη f(2)=18, δεν είναι τυχούσα.

Επαναληπτικές ασκήσεις

46● Έστω $f(x)=\ln x+e^{x}-1,\ x>0$

Α) Να βρείτε το **σύνολο** των **τιμών** της f

Β) Να αποδείξετε ότι **υπάρχει ένα ακριβώς** $x_o>0$, ώστε $x_o=e^{1-x_o}$

47● Έστω οι ορισμένες και συνεχείς στο $D=[-1,1]$ συναρτήσεις f,g

ώστε $\dfrac{f(-1)+f(1)}{g(-1)+g(1)}=-1$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho\in[-1,1]$, ώστε $\dfrac{f(\rho)+1}{g(\rho)-1}=-1$

48● Να βρείτε την ορισμένη και **συνεχή** στο R συνάρτηση f

αν γνωρίζουμε ότι $f(x)+\sqrt{x^2-2x+2}=xf(x)-x$, για κάθε πραγματική τιμή του x

49● Έστω η **περιττή** στο R συνάρτηση f

Αν η f είναι **συνεχής** στο 1, αποδείξτε ότι η f είναι **συνεχής** και στο σημείο -1

50● Έστω η ορισμένη στο R συνάρτηση f, ώστε $f(x)\big(f(x)-2x\big)\le 0,\ x\in R$

Να αποδείξετε ότι η f είναι **συνεχής** στο 0

51● Έστω η ορισμένη στο R συνάρτηση f, ώστε $f^5(x)+2f(x)=2002x,\ x\in R$

Να αποδείξετε ότι η f είναι **συνεχής** στο 0

52● Έστω η ορισμένη στο R και $1-1$ συνάρτηση f

Αν η f είναι **συνεχής** στο x_o, να αποδείξετε ότι η f^{-1} θα είναι **συνεχής** στο $f(x_o)$

53● Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2-\lambda x+\kappa$, ώστε $\kappa-\lambda\kappa+\kappa^2+1=0$

Αφού αποδείξετε ότι η f δέχεται **μία ρίζα**, μετά να αποδείξετε ότι $\lambda^2\ge 4\kappa$

54● Έστω η ορισμένη στο R συνάρτηση f, ώστε $f^3(x)+f(x)=x+1,\ x\in R$

Α) Να αποδείξετε ότι η πιο πάνω συνάρτηση f είναι **μοναδική**.

Να αποδείξετε ότι **Β₁**) $|f(x)-f(x_o)|\,|f^2(x)+f(x_o)f(x)+f^2(x_o)+1|=|x-x_o|$

Β₂) $|f^2(x)+f(x_o)f(x)+f^2(x_o)+1|\ge 1$

Β₃) $|f(x)-f(x_o)|\le|x-x_o|$

Γ) Μετά να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι **συνεχής** στο R

Δ) Μετά να αποδείξετε ότι η f **αντιστρέφεται**, με $f^{-1}(x)=x^3+x-1,\ x\in R$

Απαντήσεις των ασκήσεων

46● Α) $f(R_+^*) = R$

Η f είναι γνήσια αύξουσα και συνεχής

Β) Επειδή $0 \in R$ υπάρχει $x_o \in R$, ώστε $f(x_o) = 0$

Οπότε $\ln x_o + x_o - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x_o = 1 - x_o \Leftrightarrow x_o = e^{1-x_o}$

47● Από $\dfrac{f(-1)+f(1)}{g(-1)+g(1)} = -1$ είναι $f(-1)+g(-1) = -(f(1)+g(1))$

Εφαρμόζουμε γενίκευση Θ.Bolzano για την $h(x) = f(x) + g(x)$ στο $[-1,1]$

48● Από $f(x) + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = xf(x) - x$ είναι $f(x) = \dfrac{2}{x + \sqrt{x^2 - 2x + 2}}$, $x \neq 1$

Λόγω της συνέχειας στο 1 είναι $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x+\sqrt{x^2-2x+2}} & \text{αν } x \neq 1 \\ 2 & \text{αν } x = 1 \end{cases}$

Τελικά $f(x) = \dfrac{2}{x + \sqrt{x^2 - 2x + 2}}$

49● $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\lim\limits_{-x \to 1} f(-x) = -\lim\limits_{y \to 1} f(y) = -f(1) = f(-1)$

50● $f(x)(f(x) - 2x) \leq 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x) + x^2 \leq x^2 \Leftrightarrow |f(x) - x| \leq |x|$

Από το κριτήριο παρεμβολής διαπιστώνουμε ότι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

51● Από $f^5(x)+2f(x)=2002x \Leftrightarrow f(x)\left(f^4(x)+2\right)=2002x$

Οπότε $|f(x)|=\left|\dfrac{2002x}{f^4(x)+2}\right| \le \dfrac{1}{2}\left|2002x\right| \le 1001|x|$

Από το κριτήριο παρεμβολής διαπιστώνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

52● $\lim\limits_{y\to y_o} f^{-1}(y)=\lim\limits_{y\to f(x_o)} f^{-1}(y)=\lim\limits_{f(x)\to f(x_o)} f^{-1}(f(x))=\lim\limits_{x\to x_o} x=x_o=f^{-1}(y_o)$

53● Εφαρμόζουμε το Θ.Bolzano για την $f(x)=x^2-\lambda x+\kappa$ στο $[0,1]$

54● Α) $f^3(x)+f(x)=x+1$ και $f^3(x_o)+f(x_o)=x_o+1$

Β₁) Αφαιρώντας είναι $f^3(x)-f^3(x_o)+f(x)-f(x_o)+x-x_o=0$

και τελικά $|f(x)-f(x_o)||f^2(x)+f(x_o)f(x)+f^2(x_o)+1|=|x-x_o|$

Β₂) Το $y=f^2(x)+f(x_o)f(x)+f^2(x_o)+1$

είναι τριώνυμο και έχει μέγιστο το $-\dfrac{\Delta}{4\alpha}=\dfrac{3}{4}f^2(x_o)+1\ge 1$

Συνεπώς

$f^2(x)+f(x_o)f(x)+f^2(x_o)+1\ge 1$ άρα και $|f^2(x)+f(x_o)f(x)+f^2(x_o)+1|\ge 1$

Β₃) Από $|f(x)-f(x_o)||f^2(x)+f(x_o)f(x)+f^2(x_o)+1|=|x-x_o|$

είναι τελικά $|f(x)-f(x_o)|\le|x-x_o|$

Γ) Εφαρμόζουμε κριτήριο παρεμβολής

Δ) Από $f(x)=y$ έχουμε $f^{-1}(x)=x^3+x-1,\ x\in R$